

# Цифровое оценивание моментов корреляционной функции на основе знакового аналого-стохастического квантования случайного процесса

В. Н. ЯКИМОВ, А. В. МАШКОВ

Самарский государственный технический университет,  
Самара, Россия, e-mail: yvnr@hotmail.com, mavstu@list.ru

Разработан быстродействующий цифровой алгоритм вычисления оценок моментов корреляционной функции  $n$ -го порядка. В качестве первичного цифрового преобразования использован исследуемый случайный процесс знакового аналого-стохастического квантования.

**Ключевые слова:** случайный процесс, моменты корреляционной функции, знаковый сигнал, отсчёт времени, стохастическое квантование.

A fast-acting digital algorithm to compute the estimates of correlation function  $n$ -order moments is developed. The algorithm is based on using as primary digital conversion of random process under study the sign analog-stochastic quantization.

**Key words:** random process, correlation function moments, sign signal, time readout, stochastic quantization.

При комплексном анализе случайных процессов в качестве информативных статистических характеристик часто выступают моменты корреляционной функции (КФ). Знание этих моментов позволяет решать прикладные задачи, связанные с идентификацией случайных процессов, метрологическим анализом результатов оценивания вероятностных характеристик, определением моментов импульсной характеристики и т. п.

В теории случайных процессов оценки моментов КФ  $n$ -го порядка в классическом варианте определяют из выражения

$$\hat{\mu}_n = \int_0^T \tau^n \hat{R}_{XX}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $\hat{R}_{XX}(\tau)$  — оценка КФ исследуемого случайного процесса  $X(t)$ ;  $\tau$  — время запаздывания;  $T$  — длительность интервала времени, в пределах которого происходит оценивание.

При практической реализации выражения (1) для вычисления оценок  $\hat{\mu}_n$  требуется предварительно выбрать способ вычисления текущих оценок КФ и процедуру численного интегрирования. При этом в ходе принятия решения необходимо учитывать требование оперативного оценивания вероятностных характеристик наблюдаемого случайного процесса. Условия оперативности приводит к тому, что первостепенное значение приобретает разработка быстродействующего цифрового алгоритма вычисления  $\hat{\mu}_n$ , не требующего предварительной прямой оценки КФ и обеспечивающего высокую точность численного интегрирования. Использование знакового аналого-стохастического квантования в качестве первичного аналого-цифрового преобразования исследуемого случайного процесса  $X(t)$  помогает эффективно решить эту задачу. Знаковое аналого-стохастическое кван-

тование позволяет выполнять предельно грубое двухуровневое преобразование непрерывных случайных процессов без систематической погрешности и независимо от их статистических свойств [1].

Пусть в результате выполнения двух независимых по отношению друг к другу процедур знакового аналого-стохастического квантования в пределах интервалов времени  $T$ ,  $2T$  сформированы два знаковых сигнала  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  (см. рисунок). Данные сигналы математически можно представить как

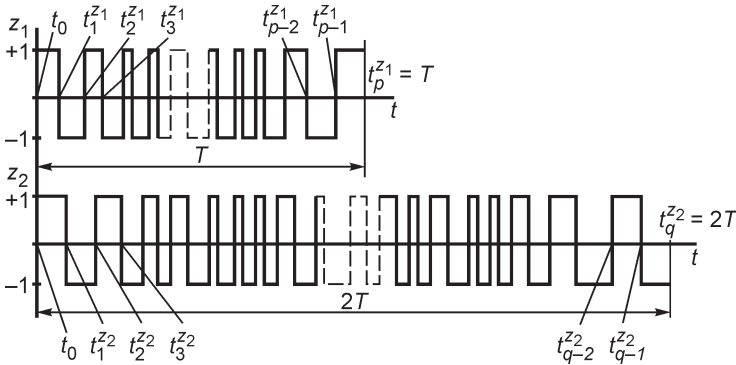
$$z_1(t) = \begin{cases} -1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi_1(t) < 0; \\ +1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi_1(t) \geq 0; \end{cases} \quad z_2(t) = \begin{cases} -1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi_2(t) < 0; \\ +1, & \overset{\circ}{x}(t) + \xi_2(t) \geq 0, \end{cases}$$

где  $\overset{\circ}{x}(t)$  — центрированная, т. е. имеющая нулевое математическое ожидание, реализация исследуемого случайного процесса  $X(t)$ ;  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  — случайные вспомогательные сигналы, исполняющие роль стохастического порога квантования.

Вспомогательные сигналы  $\xi_1(t)$ ,  $\xi_2(t)$  являются однородными. Они независимы относительно друг друга и по отношению к исследуемому процессу  $X(t)$ . Мгновенные значения этих сигналов распределены равномерно внутри интервала  $-\xi_{\max} \dots +\xi_{\max}$ . При этом должно выполняться условие

$|\overset{\circ}{x}(t)|_{\max} \leq \xi_{\max}$ , где  $|\overset{\circ}{x}(t)|_{\max}$  — абсолютное максимально возможное значение, которое может принять наблюдаемая ре-

ализация  $\overset{\circ}{x}(t)$  исследуемого случайного процесса  $X(t)$ .



Знаковые сигналы  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$

В пределах формирования знаковых сигналов  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  в качестве оценки  $\hat{R}_{XX}(\tau)$  для  $0 \leq \tau \leq T$  рассмотрим несмещённую оценку вида [2]:

$$\hat{R}_{XX}(\tau) = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t) z_2(t + \tau) dt. \quad (2)$$

Подставим оценку (2) в выражение (1). Тогда, изменив порядок интегрирования, получим

$$\hat{\mu}_n = \xi_{\max}^2 T^{-1} \int_0^T z_1(t) \int_0^T \tau^n z_2(t + \tau) d\tau dt.$$

Дальнейшую задачу по оцениванию моментов КФ сведем к практической реализации операции интегрирования. Выполнение этой операции во многом будет определять вычислительную эффективность алгоритмов оценивания моментов КФ.

Результат знакового аналого-стохастического квантования является непрерывной во времени функцией, ограниченной по уровню значениями  $-1$  и  $+1$ , последовательно сменяющимися друг друга. Поэтому динамику изменения сигналов  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  в пределах интервалов времени  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq \tau \leq 2T$  можно описать с помощью следующих конечных множеств:

$$\{z_1(t_0); t_i^{z_1}\}; \{z_2(t_0); t_j^{z_2}\}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q,$$

где  $z_1(t_0)$ ,  $z_2(t_0)$  — значения, которые знаковые сигналы  $z_1(t)$ ,  $z_2(t)$  принимают в момент времени  $t_0 = t_0^{z_1} = t_0^{z_2} = 0$ , определяемый началом анализа исследуемого процесса;  $\{t_i^{z_1}, 1 \leq i \leq p-1\}$ ,  $\{t_j^{z_2}, 1 \leq j \leq q-1\}$  — отсчёты моментов времени, когда сигналы пересекают нулевой уровень в процессе их формирования, т. е. меняют текущее значение на противоположное;  $t_p^{z_1} = T$ ,  $t_q^{z_2} = 2T$ .

Так как знаковый сигнал  $z_1(t)$  постоянен в интервале  $t_i^{z_1} \leq t \leq t_{i+1}^{z_1}$  и может принимать лишь только одно из возмож-

ных значений  $-1$ ,  $+1$ , внешний интеграл по переменной  $t$  в выражении (1) можно представить в виде суммы интегралов. Тогда будем иметь

$$\hat{\mu}_n = \xi_{\max}^2 T^{-1} z_1(t_0) \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} \int_0^T \tau^n z_2(t + \tau) d\tau dt.$$

Изменим порядок интегрирования по  $\tau$ ,  $t$ , тогда оценка  $\hat{\mu}_n$  примет вид

$$\hat{\mu}_n = \xi_{\max}^2 T^{-1} z_1(t_0) \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \times$$

$$\left( \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_2(\tau) \int_{t_i^{z_1}}^{\tau} (\tau - t)^n dt d\tau + \int_{t_{i+1}^{z_1}}^{t_i^{z_1} + T} z_2(\tau) \int_{t_i^{z_1}}^{\tau} (\tau - t)^n dt d\tau + \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1}} z_2(\tau) \int_{\tau - T}^{\tau} (\tau - t)^n dt d\tau \right).$$

Внутренние интегралы по переменной  $t$  вычислим аналитически, после чего получим

$$\hat{\mu}_n = \frac{1}{(n+1)} \left( T^{(n+1)} \hat{R}_{XX}(T) + \xi_{\max}^2 T^{-1} z_1(t_0) \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i W_i(n) \right),$$

где

$$W_i(n) = \int_{t_i^{z_1}}^{t_{i+1}^{z_1} + T} z_2(\tau) (\tau - t_i^{z_1})^{n+1} d\tau; \quad (3)$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & i=0, i=p; \\ 2, & 1 \leq i \leq p-1. \end{cases}$$

Таким образом, разработку алгоритма оценивания моментов КФ можно свести к построению алгоритма вычисления  $W_i(n)$ .

Пусть для знакового сигнала  $z_2(t)$  границы интервала  $t_i^{z_1} \leq t \leq t_{i+1}^{z_1} + T$  соответствуют моментам времени  $t_{m(i)}^{z_2} = t_i^{z_1}$ ,  $t_{m(i)+r(i)+1}^{z_2} = t_{i+1}^{z_1} + T$ , где  $m(i)$ ,  $r(i)$  — целые числа, зависящие от номера интервала. В соответствии с этим имеется совокупность величин  $\{t_{m(i)+1}^{z_2}, t_{m(i)+2}^{z_2}, \dots, t_{m(i)+r(i)}^{z_2}\}$ , принадлежащих множеству  $\{t_j^{z_2}, 0 \leq j \leq q\}$  и определяющих моменты времени, в которые сигнал  $z_2(t)$  последовательно пересекает нулевой уровень в пределах интервала  $t_i^{z_1} \leq t \leq t_{i+1}^{z_1} + T$ .

С учётом множества  $\{t_{m(i)}^{z_2}, t_{m(i)+1}^{z_2}, \dots, t_{m(i)+r(i)+1}^{z_2}\}$  и того, что сигнал  $z_2(t)$  может принимать лишь значения  $-1$  и  $+1$ , интеграл (3) представим в виде суммы

$$W_i(n) = z_2(t_i^{z_1}) \sum_{j=m(i)}^{m(i)+r(i)} (-1)^{j-m(i)} \int_{t_j^{z_2}}^{t_{j+1}^{z_2}} (\tau - t_i^{z_1})^{n+1} d\tau.$$

Интегралы, находящиеся под знаком суммы, можно вычислить аналитически. Тогда

$$W_i(n) = \frac{z_2(t_i^{z_1})}{(n+2)} \sum_{j=m(i)}^{m(i)+r(i)+1} (-1)^{j-m(i)+1} v_j (t_j^{z_2} - t_i^{z_1})^{n+2},$$

где

$$v_j = \begin{cases} 1, & j = m(i) + r(i) + 1; \\ 2, & m(i) + 1 \leq j \leq m(i) + r(i). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\hat{\mu}_n = \frac{T^{n+1}}{n+1} \hat{R}_{XX}(T) + \frac{\xi_{\max}^2 T^{-1}}{(n+1)(n+2)} z_1(t_0) \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i z_2(t_i^{z_1}) \times \sum_{j=m(i)}^{m(i)+r(i)+1} (-1)^{j-m(i)+1} v_j (t_j^{z_2} - t_i^{z_1})^{n+2}. \quad (4)$$

Данное соотношение можно использовать для вычисления искомых оценок моментов КФ.

Отметим, что для статистической устойчивости результатов оценивания моментов КФ продолжительность анализа интервала времени  $T$  нужно выбирать не менее интервала корреляции  $\tau_{kx}$  исследуемого случайного процесса. За пределами интервала корреляции, т. е. при  $\tau > \tau_{kx}$ , можно считать, что  $R_{XX}(\tau) \approx 0$ . Для  $T > \tau_{kx}$  с высокой степенью вероятности можно принять, что будет выполняться приближенное равенство  $\hat{R}_{XX}(T) \approx 0$ . Тогда первое слагаемое в (4) будет пренебрежимо мало и его можно не учитывать.

Чтобы соотношение (4) использовать для вычисления цифровых оценок  $\hat{\mu}_n$ , необходимо перейти к числовому представлению дискретных отсчетов

$\{t_i^{z_1}, 1 \leq i \leq p-1\}$ ,  $\{t_j^{z_2}, 1 \leq j \leq q-1\}$ . На практике это можно сделать, используя классический подход к цифровому представлению интервалов времени с заданной точностью, согласно которому

$$t_i^{z_1} = \eta_i^{z_1} \Delta t, \quad t_j^{z_2} = \eta_j^{z_2} \Delta t,$$

где  $\eta_i^{z_1}, \eta_j^{z_2}$  — целочисленные отсчеты времени;  $\Delta t$  — период следования счётных импульсов, удовлетворяющий требованию

$$\Delta t = \delta \min \left\{ \Delta t_i^{z_1} = t_{i+1}^{z_1} - t_i^{z_1}, \Delta t_j^{z_2} = t_{j+1}^{z_2} - t_j^{z_2} \right\},$$

$$0 \leq i \leq p-1, \quad 0 \leq j \leq q-1,$$

где  $\delta$  — заданная в относительных единицах необходимая точность числового представления дискретных отсчетов вре-

мени  $t_i^{z_1}, t_j^{z_2}$  в зависимости от длительности минимально

возможного интервала  $\Delta t_i^{z_1} = t_{i+1}^{z_1} - t_i^{z_1}$  или  $\Delta t_j^{z_2} = t_{j+1}^{z_2} - t_j^{z_2}$ , определяемого этими отсчётами. Точность  $\delta$  выбирают исходя из априорных сведений о динамических и частотных характеристиках исследуемого процесса  $X(t)$ . В частности, должны выполняться условия  $\Delta t < k f_{\max}^{-1}$  и  $k \geq 2$ , где  $f_{\max}^{-1}$  — верхняя граничная частота в спектре процесса  $X(t)$ .

В результате будем иметь два множества целых чисел

$\{\eta_i^{z_1}, 1 \leq i \leq p-1\}, \{\eta_j^{z_2}, 1 \leq j \leq q-1\}$ . Отметим, что  $\eta_0 = \eta_0^{z_1} = \eta_0^{z_2} = 0$ . Продолжительность анализа интервала времени

равна произведению  $N \Delta t$ . Отсюда следует, что  $\eta_p^{z_1} = N$ ,

$\eta_q^{z_2} = 2N$ . Таким образом, цифровой алгоритм вычисления текущих оценок моментов КФ запишем как

$$\hat{\mu}_n = k_n z_1(\eta_0) \sum_{i=0}^p (-1)^i \lambda_i z_2(\eta_i^{z_1}) \times \sum_{j=m(i)}^{m(i)+r(i)+1} (-1)^{j-m(i)+1} v_j (\eta_j^{z_2} - \eta_i^{z_1})^{n+2},$$

где  $k_n = \xi_{\max}^2 / [N(n+1)(n+2)]$ .

**Заключение.** Знаковое аналого-стохастическое квантование, использованное в качестве первичного преобразования исследуемого непрерывного во времени случайного процесса  $X(t)$ , позволило вычислить аналитически операции интегрирования в ходе разработки цифрового алгоритма оценивания моментов КФ. Данное обстоятельство избавляет от численного интегрирования, наиболее существенной проблемой которого является выбор шага, что исключает методическую погрешность, вызванную выполнением этой операции. При практической реализации разработанного алгоритма нет необходимости формировать и обрабатывать многозарядные цифровые отсчеты исследуемого случайного процесса. Вычисление текущих оценок моментов КФ  $n$ -го порядка удалось свести к выполнению цифровых процедур, требующих реализации логических и простых арифметических операций суммирования и вычитания, связанных с обработкой двух множеств целочисленных отсчетов времени  $\{\eta_i^{z_1}\}$ ,

$\{\eta_j^{z_2}\}$ , где  $0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq q$ . Последнее обстоятельство способ-

ствует повышению оперативности цифрового оценивания моментов КФ  $n$ -го порядка.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 13-08-00036-А).

#### Л и т е р а т у р а

1. Якимов В. Н. Обобщённая математическая модель двухуровневого знакового преобразования // Техника машиностроения. 2000. № 4. С. 72—74.

2. Якимов В. Н. Цифровой корреляционный анализ на основе интервального представления результата знакового преобразования случайных процессов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2001. № 11. С. 61—66.

Дата принятия 11.03.2015 г.