

## Возможности применения методов статистической обработки дискретизованных наблюдений при координатных измерениях сложнопрофильных поверхностей

Д. А. МАСТЕРЕНКО

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»,  
Москва, Россия, e-mail: metrologycenter@gmail.com

Исследованы статистические методы оценивания результатов координатных измерений сложнопрофильных поверхностей по дискретизованным наблюдениям. Даны рекомендации по дополнению существующих методов регуляризации оптимизационных задач при вычислении значений геометрических параметров.

**Ключевые слова:** дискретность наблюдений, оценивание измеряемых величин, сложнопрофильные поверхности.

The statistical methods of coordinate measurements results estimation for complex profile surfaces by strongly discretized observations have been studied. The recommendations on addition to existing methods of regularization of optimization problems during computation of geometric parameters values are given.

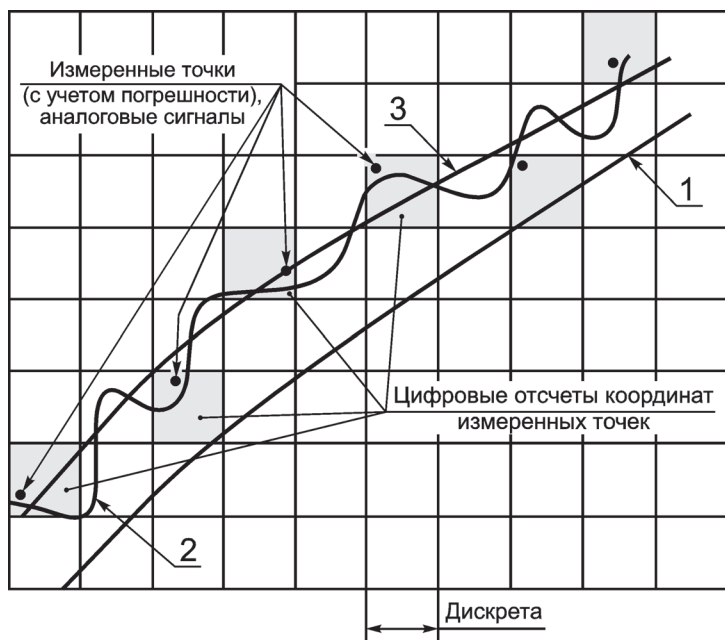
**Key words:** discretization of observations, estimation of measured values, complex profile surfaces.

В публикациях [1—5] описан подход к статистическому оцениванию измеряемых величин в ситуациях, когда случайный разброс, свойственный наблюдаемым данным (включая случайную погрешность измерений), сопоставим с дискретой отсчета используемого средства измерений. Показано, что неучтенная дискретность наблюдений приводит к воз-

никновению дополнительной систематической погрешности, которую можно уменьшить с помощью соответствующих статистических оценок. Такие оценки основаны на утверждении, что каждое из экспериментальных наблюдений  $y_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  рассматривается не как вещественное число, а как представитель множества (отрезка)  $Q(y_i)$ , определяемого дискретностью отсчета и способом округления. Зависимость между факторной и наблюдаемой переменными  $\theta$  оценивают исходя из модели, описывающей не плотность вероятностей  $f(y; \theta)$ , а дискретное распределение  $p(y; \theta)$  вероятностей попадания в соответствующие отрезки  $Q(y)$ .

Цель данной статьи — распространение указанного подхода на оценивание параметров сложнопрофильных поверхностей по координатам набора их точек. Методы анализа измеряемых величин по дискретным наблюдениям применяли в программно-математическом обеспечении координатно-измерительных машин, разработанных совместно «НИИИзмерения» и «СТАНКИН» [6, 7], но лишь для прямолинейных или плоских поверхностей и только при специальном их расположении, когда дискретизация присутствовала в отношении одной координаты. Однако задачи, связанные с измерением и контролем геометрических параметров сложнопрофильных поверхностей, широко распространены в машиностроении. Большое внимание таким задачам уделяют специалисты ВНИИМС [8—10].

Координатные измерения выполняют не только с помощью координатно-измерительных машин (трехкоординатные измерения), но и другими средствами, например универсальными и инструментальными измерительными микроскопами (двухкоординатные измерения). В настоящее время измерительные микроскопы оснащают средствами оцифровки и ввода изображений в компьютер, при этом дискретность отсчета связана с пиксельной структурой оцифрованного изображения [11, 12].



Измеренные точки на реальной поверхности:

1, 2, 3 — номинальная, реальная и координатная поверхности, соответственно

Переход от анализа зависимости, наблюдения которой искажены случайными слагаемыми, к оцениванию параметров сложнопрофильных поверхностей осложнен различиями моделей данных. Для постановки задачи используем следующую терминологию [10].

**Номинальная поверхность** — поверхность, форма и положение которой в конструкторской документации заданы без учета допускаемых отклонений одним из способов: аналитическим (параметрическим, векторно-параметрическим, явным или неявным уравнением); дискретным (набором точек, лежащих на поверхности); дискретно-аналитическим (набором уравнений на различных участках с заданными границами). При аналитическом или дискретно-аналитическом способах поверхность определяется, в основном, значениями параметров, входящих в уравнения.

**Координатная поверхность** — поверхность, имеющая форму номинальной, но смещенная и повернутая относительно нее. Применительно к аналитическому и дискретно-аналитическому способам задания сложнопрофильных поверхностей можно считать, что координатная поверхность описывается теми же уравнениями, что и номинальная, но с другими параметрами.

**Реальная поверхность** — поверхность, ограничивающая деталь и отделяющая ее от окружающей среды.

Локальные отклонения формы отсчитывают от координатной поверхности, которая чаще всего определена как средняя или прилегающая [13].

На рисунке схематически изображены номинальная, реальная и координатная поверхности. Координаты некоторого набора точек измеряют с погрешностью, поэтому точки показаны лежащими не точно на реальной поверхности. Отсчеты координат выполняют с дискретностью, так что результатом могут быть не любые вещественные числа, а лишь целые, кратные некоторой величине — дискрете. Если все рассматриваемые величины — и изменения номинальной и реальной поверхностей на исследуемом участке, и случайные отклонения измеренных точек от координатной поверхности — имеют порядок 10 дискрет и более, то последним обстоятельством можно пренебречь. Однако при измерениях с высокой точностью на небольших участках поверхностей значение дискретности отсчета возрастает.

Координатную поверхность строят с помощью программно-математического обеспечения на основании координат массива точек на реальной поверхности, измеренных с некоторой погрешностью, в том числе случайной. При этом используют методы статистического оценивания параметров уравнения, которым описывается поверхность.

В [10] рассмотрена поверхность, заданная уравнением, которое решено относительно координаты  $z$  и имеет вид линейной комбинации базисных функций, неизвестные коэффициенты которой оценены методом наименьших квадратов (МНК). Там же отмечено, что базисные функции могут входить в уравнение поверхности нелинейно. Более общее выражение имеет вид  $z = h(x, y; a_1, \dots, a_r)$ . При этом номинальной поверхности соответствуют значения параметров

$a_1^0, \dots, a_r^0$ , а для построения координатной требуется оценить их действительные значения по измеренным координатам массива точек. Если дискретизация наблюдается в отношении координаты  $z$ , а по остальным осям ею можно пренебречь, то оценивание проводят по распределению вероятностей дискретных значений координаты с помощью

методов, являющихся модификацией предложенных в [1—4]:

$$p(z_i^d; x_i, y_i, a_1, \dots, a_r) = \int_{Q(z_i^d)} f[z - h(x_i, y_i, a_1, \dots, a_r)] dz. \quad \text{Таким образом, при предложенном способе задания поверхности принципиальных отличий от ранее рассмотренных задач не возникает.}$$

Сложнее обстоит дело в случае, когда поверхность задана уравнениями вида:

$$H(x, y, z; a_1, \dots, a_r) = 0; \quad (1)$$

$$H(x, y; a_1, \dots, a_r) = 0, \quad (2)$$

причем дискретизация одновременно может быть по разным координатам. При обычном подходе, без учета дискретизации отсчетов координат, не существует общепринятого метода оценивания параметров уравнений (1) или (2). Для частной, но практически важной и широко распространенной задачи восстановления или подгонки окружности по измеренным координатам отдельных точек, соответствующих уравнению (2) с функцией

$$H(x, y; a, b, R) = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2, \quad (3)$$

также предлагались различные методы решений, некоторые из которых приведены в [14].

Метод, названный полным МНК, заключается в минимизации суммы квадратов отклонений точек от построенной окружности:

$$\sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R \right]^2 \xrightarrow{a, b, R} \min. \quad (4)$$

В конечном виде задачу (4) можно решить только относительно переменной  $R$ , а результат будет равен среднему расстоянию от центра до исходных точек. Решение для координат центра явным образом найти нельзя, его можно получить лишь численно, для чего были предложены различные способы, среди которых отметим разновидность градиентного метода минимизации (4), рассмотренную в [15].

Следующие методы — соответственно, метод среднего пересечений, редуцированный МНК и модифицированный МНК — основаны на особенностях окружности как формы номинального профиля и не могут быть обобщены на другие формы. Еще один подход заключается в минимизации вы-

ражения  $\sum_{i=1}^n \left[ \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} - R \right]^2$  по параметрам  $a, b, R^2$ .

В [14] этот способ приведен как метод I. Kasa, по авторству работы [16], где он впервые был описан. При использовании этого метода радиус оценивается как среднее квадратическое расстояние от оценки центра до исходных точек.

В [14] дано обобщение полного МНК, модифицированного МНК и метода I. Kasa для подгонки сфер в трехмерном пространстве. Из описанных методов только полный МНК и метод I. Kasa допускают обобщение на другие виды поверхностей естественным образом. Чтобы в дальнейшем не делать различий между двух- и трехкоординатными измерениями там, где они несущественны, будем использовать обо-

значение  $\mathbf{y} = (x, y)$  при двухкоординатных измерениях или  $\mathbf{y} = (x, y, z)$  — при трехкоординатных, а при дискретизации  $\mathbf{y}^d = (x^d, y^d)$  или  $\mathbf{y}^d = (x^d, y^d, z^d)$ , соответственно.

Запишем обобщение метода I. Kasa:

$$\sum_{i=1}^n [H(\mathbf{y}_i; a_1, \dots, a_r)]^2 \xrightarrow{a_1, \dots, a_r} \min. \quad (5)$$

Для обобщения полного МНК введем следующие обозначения:  $\Gamma(a_1, \dots, a_r) = \{\mathbf{y} : H(\mathbf{y}; a_1, \dots, a_r) = 0\}$  — поверхность или кривая, определяемая уравнением (1) или (2), при определенных значениях параметров  $a_1, \dots, a_r$ ;  $d[\mathbf{y}; \Gamma(a_1, \dots, a_r)]$  — расстояние от точки с координатами  $\mathbf{y}$  до кривой или поверхности  $\Gamma(a_1, \dots, a_r)$ , т. е. длина отрезка нормали, проведенной из точки  $\mathbf{y}$ , до пересечения с  $\Gamma(a_1, \dots, a_r)$ ;  $\theta$  — вектор параметров, который представляет набор  $a_1, \dots, a_r$  или некоторую взаимно-однозначную функцию от него в области определения. Например, в случае с окружностью в качестве компонент вектора можно рассматривать  $(a, b, R)$  или  $(a, b, R^2)$ . Второй вариант взаимно-однозначно соотносится с первым при условии  $R > 0$ .

С использованием введенных обозначений полный МНК примет вид

$$\sum_{i=1}^n \{d[\mathbf{y}_i; \Gamma(\theta)]\}^2 \xrightarrow{\theta} \min. \quad (6)$$

Такая постановка задачи имеет ясный статистический смысл: если расстояние от измеренной точки до координатной поверхности, являющееся случайной величиной, обладает нормальным распределением, то (6) действительно определяет оценку наименьших квадратов, а также оценку максимального правдоподобия параметров кривой или поверхности.

Для подгонки окружности результаты (5), (6) сопоставимы, как следует из численных исследований, описанных в [17], но при более общем виде функции  $H$  ситуация меняется. При подгонке конических сечений (т. е. кривых второго порядка), рассмотренной в [18], оказывается, что использование (5) приводит к «неравноправию» точек, когда точки, находящиеся на одном расстоянии от  $\Gamma(a_1, \dots, a_r)$ , но в областях с разным по модулю градиентом функции  $H$ , вносят различный вклад в сумму квадратов в (5). Для функции (3), отвечающей уравнению окружности, градиент во всех точках одинаков по модулю, из-за чего оба метода сопоставимы. В [19] эта ситуация проанализирована и предложен итеративный метод «перевзвешивания» исходных точек для уравнивания их влияния. Однако и в этом случае параметры оценивают, исходя из минимизации среднеквадратического расстояния, что в статистическом смысле оправдано только для нормального распределения отклонений.

Пусть распределение расстояния от координатной поверхности до наблюдаемых точек описывается плотностью  $f(\cdot)$ , не обязательно нормальной. Оценивание по методу максимального правдоподобия должно осуществляться максими-

С учетом дискретизации получение наблюдения  $\mathbf{y}^d$  означает, что точка, принимающая это значение, находится в прямоугольнике или параллелепипеде  $Q(\mathbf{y}^d)$ , и вероятность получить определенное дискретизованное значение следующая:

$$p(\mathbf{y}^d; \theta) = \int_{Q(\mathbf{y}^d)} f\{d[\mathbf{y}; \Gamma(\theta)]\} d\mathbf{y}. \quad (7)$$

Таким образом, сформулирована задача оценивания параметров координатной поверхности в виде, аналогичном моделям, рассмотренным в [1—5]. Следовательно, с учетом дискретизации наблюдений оценка максимального правдоподобия должна находиться в результате максимизации про-

изведения  $\prod_{i=1}^n p(\mathbf{y}_i^d; \theta)$ , в котором сомножители определяются выражением (7).

При задании множества  $\Theta$  возможных значений параметра  $\theta$  можно применить байесовские оценки или оценки типа Питмена, аналогичные приведенным в [1—5].

В [20] утверждается, что оценивание параметров геометрического объекта по набору наблюдаемых точек, взятых в малой области объекта, относится к так называемым «плохо обусловленным задачам». При использовании традиционных квадратических критериев минимизации наподобие (6) минимум оказывается нечетко выраженным и расположен на некотором плато с очень малым градиентом. При численной минимизации в компьютерной программе, когда итеративный процесс достигает это плато, перестают отражаться изменения функции и фиксируется минимум в случайной точке. Небольшие изменения в исходных данных в таких ситуациях приводят к значительным, в относительном выражении — на порядки большим, изменениям результата. Для преодоления указанных проблем в [21, 22] предложен метод оценивания, учитывающий не только отклонения наблюдаемых точек от аппроксимируемой поверхности, но и отклонения параметров поверхности от их номинальных значений. Он состоит в минимизации выражения

$$\prod_{i=1}^n \{d[\mathbf{y}_i; \Gamma(a_1, \dots, a_r)]\}^2 + \sum_{k=1}^r w_k (a_k - a_{k\text{ном}})^2, \quad (8)$$

где  $a_{k\text{ном}}$ ,  $k = 1, \dots, r$  — номинальные значения соответствующих параметров;  $w_k$ ,  $k = 1, \dots, r$  — назначенные веса отклонений параметров.

Такой метод является комбинацией более раннего, традиционного метода, основанного на аппроксимации наблюдаемых точек стандартных геометрических объектов (окружностей, цилиндров и т. д.), и метода контроля деталей по математическим моделям, т. е. определения отклонений реальной детали от ее идеальной геометрии, представленной в математической модели. Вторая сумма в (8) свидетельствует об отклонении от идеальной геометрии, достигаемой при совпадении значений всех параметров с номиналами [21].

Согласно результатам исследований, приведенным в [22], на примере измерений окружности показано, что на секторах (вплоть до 45°) погрешность оценивания параметров на порядок превышает погрешность в исходных данных (на углах 5° — на два порядка), в то время как метод минимизации

зацией выражения  $\prod_{i=1}^n f\{d[\mathbf{y}_i; \Gamma(\theta)]\}$ .

ции (8) дает погрешности оценивания, значительно меньшие, чем в исходных данных. На секторах в 90° погрешности методов сопоставимы, а на полуокружности и целой окружности — практически равны. Погрешности в исходные данные в ходе исследований вносили в виде грубого округления координат наблюдаемых точек, т. е. с дискретизацией наблюдений.

Таким образом, с одной стороны, задача снижения влияния дискретизации координат актуальна при измерениях в малых областях, с другой же стороны, введение дополнительного требования — близости параметров объекта к номинальным значениям — позволяет добиться регуляризации оптимизационной задачи, в результате решения которой вычисляют оценки параметров.

Сумма взвешенных квадратов отклонений параметров от номинальных, присутствующая в (8), — это один из способов учета информации о целевой форме объекта. Другой способ заключается в задании множества возможных значений параметров  $\theta$  и плотности распределения вероятностей на нем  $\pi(\theta)$ . Тогда можно найти байесовскую оценку для вектора параметров:

$$\hat{\theta}_B = \int \theta \prod_{i=1}^n p(y_i^d; \theta) \pi(\theta) d\theta / \int \prod_{i=1}^n p(y_i^d; \theta) \pi(\theta) d\theta. \quad (9)$$

Если множество  $\Theta$  задано без априорного распределения параметра, то при подстановке в (9)  $\pi(\theta) = \text{const}$  получим оценки типа Питмена.

**Выводы.** Предложен математический аппарат, позволяющий оценивать параметры уравнений сложнопрофильных поверхностей по координатным измерениям при повышенных требованиях к точности, когда дискретность отсчета играет значительную роль в общей погрешности измерений.

## Л и т е р а т у р а

1. **Мастеренко Д. А.** О подходах к оцениванию параметров по сильно дискретизованным наблюдениям // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2010. № 3 (11). С. 88—94.
2. **Мастеренко Д. А.** Выбор наилучшей оценки измеряемой величины по сильно дискретизованным наблюдениям // Измерительная техника. 2011. № 7. С. 17—20.
3. **Мастеренко Д. А.** Исследование оценок измеряемой величины по сильно дискретизованным наблюдениям // Измерительная техника. 2011. № 8. С. 22—24.
4. **Мастеренко Д. А.** Статистическое оценивание измеряемых величин по сильно дискретизованным наблюдениям при неизвестном параметре масштаба случайной составляющей // Измерительная техника. 2012. № 6. С. 40—42.
5. **Мастеренко Д. А.** Исследование оценок параметров линейной статистической модели по сильно дискретизованным наблюдениям // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2012. № 3 (22). С. 89—93.
6. **Григорьев С. Н., Мастеренко Д. А., Ковальский М. Г., Емельянов П. Н.** Опыт МГТУ «СТАНКИН» в разработке координатно-измерительных машин субмикронной точности // Контроль. Диагностика. 2012. № 12. С. 25—30.
7. **Мастеренко Д. А., Емельянов П. Н., Ковальский М. Г., Байковский А. Ю., Алабин С. Ю.** Разработка модельного ряда координатно-измерительных машин // Измерительная техника. 2013. № 12. С. 23—27.

8. **Кононогов С. А., Лысенко В. Г., Золотаревский С. Ю.** Концепция обеспечения единства координатных измерений геометрических параметров поверхностей сложной формы // Приборы. 2008. № 3. С. 1—11.

9. **Кононогов С. А., Лысенко В. Г., Гоголев Д. В., Золотаревский С. Ю.** Методические основы 3-D измерений геометрических параметров поверхностей сложной формы // Приборы. 2008. № 12. С. 12—18.

10. **Гоголев Д. В.** Разработка и исследование методов и средств обеспечения единства измерений геометрических параметров отклонений формы сложнопрофильных поверхностей: Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук. М.: ВНИИМС, 2009.

11. **Телешевский В. И., Шулепов А. В., Есин А. П.** Методы повышения точности линейных измерений на измерительных микроскопах с помощью цифровой обработки оптических изображений // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2009. № 1. С. 102—107.

12. **Телешевский В. И., Шулепов А. В., Роздина Е. М.** Метод интеллектуальной компьютерной микроскопии при измерении линейных и угловых размеров изделий // Измерительная техника. 2011. № 8. С. 3—6.

13. **ГОСТ 24642—81.** ГСИ. Основные нормы взаимозаменяемости. Допуски формы и расположения поверхностей. Основные термины и определения.

14. **Umbach D., Jones K. N.** A Few Methods for Fitting Circles to Data // IEEE Trans. Instrum. Measur. 2003. V. 52. N. 6. P. 1881—1885.

15. **Heng-sheng Wang, Qiang Zhang, Fu-liang Wang.** Iterative circle fitting based on circular attracting factor // J. Central. South. Univer. 2013. V. 20. N. 10. P. 2663—2675.

16. **Kasa I.** A circle fitting procedure and its error analysis // IEEE Trans. Instrum. Measur. 1976. V. IM-25. N. 1. P. 8—14.

17. **Михляев С. В.** Аппроксимация окружности при измерении диаметра кристалла // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. № 1. С. 61—71.

18. **Bookstein F. L.** Fitting conic sections to very scattered data — An iterative refinement of the Bookstein algorithm // Comput. Graph. Image Process. 1979. N. 9. P. 56—91.

19. **Sampson P. D.** Fitting conic sections to very scattered data — An iterative refinement of the Bookstein algorithm // Comput. Graph. Image Process. 1982. N. 18. P. 97—108.

20. **Кудрявцев М. Д., Яворовская Н. Л.** Оценивание погрешностей координатных измерений геометрических параметров в условиях плохо обусловленной измерительной задачи // Навигация и управление движением: Тез. докл. VIII науч.-техн. конф. молодых ученых. С.-Петербург, 2006.

21. **Суслин В. П., Джунковский А. В., Шутер М. Г.** Новый метод определения геометрических параметров объектов при измерениях на малых областях // Прикладная и законодательная метрология. 2008. № 6. С. 39—42.

22. **Суслин В. П., Джунковский А. В.** Применение метода регуляризации для решения плохо обусловленных задач координатных измерений // Измерительная техника. 2009. № 7. С. 23—27.

Дата принятия 15.04.2015 г.