

Обобщённый интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска решений систем уравнений с неточно заданными исходными данными

К. К. Семёнов, А. А. Целищева

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия,
e-mail: semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

Представлен метод решения систем нелинейных уравнений для применения в метрологической практике, основанный на обобщении метода бисекции. Показано, что предложенный подход позволяет удовлетворить требованиям, предъявляемым к решению как к набору результатов косвенных измерений, и учесть сведения о неточности коэффициентов решаемых уравнений, являющихся результатами прямых измерений. Полученное решение автоматически сопровождается достоверной оценкой предельной погрешности его компонентов.

Ключевые слова: решение систем нелинейных уравнений, бисекция, косвенные измерения, метрологическое сопровождение вычислений с неточными данными.

Многие физические величины могут быть измерены только косвенным образом. Подобная ситуация возникает при оценке параметров состояния сложных объектов, которые невозможно измерить непосредственно. Поэтому значения этих параметров определяют по результатам прямых измерений характеристик объекта через решения систем уравнений, составляющих известную математическую модель его поведения. Так как любые измерения всегда выполняют с погрешностью, то и полученные характеристики оказываются искажены. Поскольку последние входят в систему уравнений как её коэффициенты, то при оценке точности решений следует учитывать погрешность, наследуемую от указанных характеристик. Упомянутая погрешность, как правило, является самой существенной составляющей неопределённости результатов косвенных измерений и значительно превосходит составляющие неопределённости, вызванные применением тех или иных вычислительных методов решения систем уравнений [1]. Таким образом, пренебрежение погрешностью результатов прямых измерений приведёт к непозволительному занижению оценки погрешности искомых результатов косвенных измерений.

Для решения систем уравнений, составляющих математическую модель изучаемого объекта и часто являющихся нелинейными, на практике обычно используют различные итерационные методы. Суть подхода, реализуемого этими методами, заключается в следующем. Сначала задают начальное приближение решения системы, а затем с помощью вычислительного алгоритма производят последовательное пошаговое уточнение этого приближения вплоть до достижения необходимой точности. При этом часто погрешность коэффициентов уравнений, представляющих собой результаты прямых измерений, при решении системы во внимание не принимают. Оценку погрешности решения если и проводят, то уже после нахождения решения. Оценивание происходит либо по полученным заранее аналитическим выра-

жениям, либо посредством статистического моделирования на основе метода Монте-Карло. Приёмы, лежащие в основе первого подхода, обычно предполагают, что погрешности результатов прямых измерений в рамках поставленной задачи достаточно малы, что сложно проверить. Второй же подход трудоёмок и может быть сопряжён с ситуациями, когда применяемые для решения системы уравнений итерационные процедуры расходятся.

В данной статье авторы предлагают метод решения систем уравнений косвенных измерений, с одной стороны, не требующий существенных вычислительных ресурсов, а с другой – не предъявляющий никаких требований к погрешности результатов прямых измерений. В статье [2] описана такая модификация метода бисекции, которая позволяет гарантированно с заданной точностью получить оценку корня отдельного уравнения. При этом указанная модификация учитывает погрешность коэффициентов уравнения. В настоящей статье алгоритм, изложенный в работе [2], обобщён для случая, когда требуется найти решение системы уравнений.

Метод бисекции для поиска решений систем нелинейных уравнений. Суть метода бисекции для решения систем уравнений косвенных измерений сводится к следующему. Пусть задана математическая модель изучаемого объекта, представляющая собой систему нелинейных уравнений [3]:

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0, \dots, f_k(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0,$$

где $f_1, \dots, f_k$ – монотонные функции, описывающие взаимосвязи искомых результатов косвенных измерений $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, т. е. параметров состояния объекта, с результатами прямых измерений $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$, т. е. с измеренными характеристиками объекта.

Пусть для каждой функции f_i внутри области её определения указана такая подобласть Ω_i , что знак значений этой

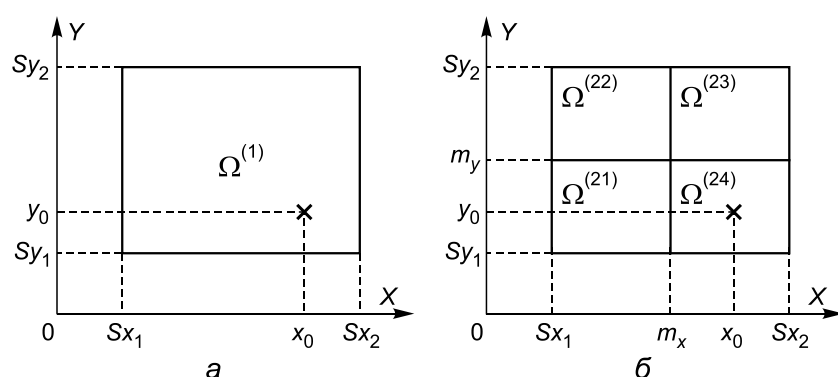


Рис. 1. Области $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(21)}, \Omega^{(22)}, \Omega^{(23)}, \Omega^{(24)}$ локализации решения системы двух уравнений на первом (а) и втором (б) шагах работы алгоритма

функции различен в разных точках границы $\delta\Omega_i$. Тогда в силу монотонности функции f_i внутри подобласти Ω_i окажется хотя бы один корень, скорее всего, удовлетворяющий всем уравнениям системы. Таким образом, возможные решения системы определяются внутри заданной области локализации. На первом шаге эта область составляет $\Omega^{(1)} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n$, т. е. n -мерный прямоугольный параллелепипед – n -брус. На втором шаге границы области уточняются до значений $\Omega^{(2)} \subseteq \Omega^{(1)}$, на третьем – до $\Omega^{(3)} \subseteq \Omega^{(2)}$ и т. д. Уточнение на произвольном шаге метода производится разбиением текущей области, локализирующей решения, на части, из которых отбрасываются те, что заведомо решений не содержат. Данное разбиение можно осуществить различными способами. В методе, предложенном авторами, на каждом j -м шаге алгоритма происходит деление на прямоугольные подобласти (n -брусы) $\Omega^{(jk)}$, $k=1, 2, \dots, K$ с одинаковым объемом. На каждой итерации метода вычисляются знаки значений функций f_i во всех вершинах n -брусов $\Omega^{(jk)}$. При этом принимаются во внимание погрешности коэффициентов $\mathbf{p}$, так как из-за данных погрешностей знак функции может стать неопределённым: при одних возможных значениях параметров $\mathbf{p}$ (в пределах погрешности) он будет положительным, а при других – отрицательным. Далее по сочетанию знаков полученных значений определяют и отбрасывают те параллелепипеды, что гарантированно не содержат решений системы, т. е. такие, на границах которых точно не происходит смены знака всех функций f_i . Затем выполняется переход к следующей итерации алгоритма. Границы области, локализирующей решение системы, уточняются до тех пор, пока размеры этой области не станут удовлетворять метрологически обоснованному критерию остановки итерационного процесса, представленному в работе [2]. Процесс прекращается, когда границы возможных значений компонентов решения, найденные на текущей и предыдущей итерациях алгоритма, совпадут (при округлении по принятым в метрологии правилам).

Поясним обобщение метода бисекции на примере системы уравнений для двух неизвестных результатов косвенных измерений (x, y) , которые содержат два неточных параметра p_1, p_2 с измеренными значениями. Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} f_1(x, y, p_1, p_2) = 0; \\ f_2(x, y, p_1, p_2) = 0. \end{cases}$$

Пусть из априорных соображений заданы интервалы $Sx = [Sx_1, Sx_2]$, $Sy = [Sy_1, Sy_2]$, внутри которых требуется отыскать значения $x = x_0$, $y = y_0$, удовлетворяющие представленной системе уравнений. Функции f_1, f_2 должны быть монотонными в области $Sx \times Sy$. На первом шаге алгоритма проверим, что функции на границах указанной области действительно принимают значения с разными знаками. Тогда алгоритм гарантированно сойдётся к решению системы уравнений. В качестве области локализации решения на первом шаге алгоритма используем прямоугольник $\Omega^{(1)} = Sx \times Sy$ (рис. 1). Разделим его на четыре равных прямоугольника с помощью прямых $x = m_x$, $y = m_y$, где $m_x = 0,5(Sx_1 + Sx_2)$, $m_y = 0,5(Sy_1 + Sy_2)$ – середины интервалов Sx, Sy соответственно:

$$\begin{aligned} \Omega^{(21)} &= [Sx_1, m_x] \times [Sy_1, m_y]; \\ \Omega^{(22)} &= [Sx_1, m_x] \times [m_y, Sy_2]; \\ \Omega^{(23)} &= [m_x, Sx_2] \times [m_y, Sy_2]; \\ \Omega^{(24)} &= [m_x, Sx_2] \times [Sy_1, m_y]. \end{aligned}$$

Для каждого прямоугольника $\Omega^{(21)}, \Omega^{(22)}, \Omega^{(23)}, \Omega^{(24)}$ во всех вершинах вычислим оценку значений функций f_1, f_2 с учётом погрешности параметров p_1, p_2 . Например, для прямоугольника $\Omega^{(21)}$ и функции f_1 будут получены четыре интервала:

$$z_{211} = f_1(Sx_1, Sy_1, p_1, p_2) \pm \left[\left| \frac{\partial f_1(Sx_1, Sy_1, p_1, p_2)}{\partial p_1} \right| \Delta p_1 + \left| \frac{\partial f_1(Sx_1, Sy_1, p_1, p_2)}{\partial p_2} \right| \Delta p_2 \right]; \quad (1)$$

$$z_{212} = f_1(m_x, Sy_1, p_1, p_2) \pm \left[\left| \frac{\partial f_1(m_x, Sy_1, p_1, p_2)}{\partial p_1} \right| \Delta p_1 + \left| \frac{\partial f_1(m_x, Sy_1, p_1, p_2)}{\partial p_2} \right| \Delta p_2 \right]; \quad (2)$$

$$z_{213} = f_1(Sx_1, m_y, p_1, p_2) \pm \left[\left| \frac{\partial f_1(Sx_1, m_y, p_1, p_2)}{\partial p_1} \right| \Delta p_1 + \left| \frac{\partial f_1(Sx_1, m_y, p_1, p_2)}{\partial p_2} \right| \Delta p_2 \right]; \quad (3)$$

$$z_{214} = f_1(m_x, m_y, p_1, p_2) \pm \left[\left| \frac{\partial f_1(m_x, m_y, p_1, p_2)}{\partial p_1} \right| \Delta p_1 + \left| \frac{\partial f_1(m_x, m_y, p_1, p_2)}{\partial p_2} \right| \Delta p_2 \right], \quad (4)$$

где $\Delta p_1, \Delta p_2$ – наибольшие значения модулей допускаемой абсолютной погрешности коэффициентов p_1, p_2 соответственно.

В выражениях (1)–(4) оценка возможной погрешности значения функции f_1 , вызванной погрешностями её коэффициентов, выполнена с помощью общепринятой в метрологии техники линеаризации. Значения производных $\partial f_1 / \partial p_1, \partial f_1 / \partial p_2$ могут быть определены разными способами. В общем случае их можно вычислить методом метрологического автосопровождения [4]. Данный метод позволяет автоматически получить требуемую оценку возможной погрешности

значения любой из функций f_i при любом (систематическом, случайном или смешанном) характере погрешности коэффициентов p_1, p_2 и не требует отдельного расчёта производных. Если обе границы любого из полученных интервалов $z_{211}; z_{212}; z_{213}; z_{214}$ значений функции f_1 окажутся одного знака, то становится понятно, чему этот знак равен. Если же выяснится, что знаки различны в силу влияния погрешности коэффициентов p_1, p_2 , то нельзя будет точно указать знак функции f_1 в соответствующей точке.

После указанной обработки прямоугольников $\Omega^{(21)}, \Omega^{(22)}, \Omega^{(23)}, \Omega^{(24)}$ следует сделать заключение о том, содержат эти прямоугольники решение системы или нет. Для этого вычислим сумму знаков функций f_1, f_2 для значений x, y , соответствующих вершинам каждого прямоугольника. Если знак функции из-за погрешностей коэффициентов невозможно определить точно, то считается, что он равен нулю. Если модуль найденной суммы и для f_1 и для f_2 оказывается меньше четырёх, т. е. меньше количества вершин прямоугольника, то в анализируемом прямоугольнике точно содержится решение системы. В противном случае решение в данной области значений аргументов x, y отсутствует, и такой прямоугольник следует устранить из дальнейшего исследования. На следующем шаге алгоритма следует рассмотреть не отброшенные ранее прямоугольники из перечня $\Omega^{(21)}, \Omega^{(22)}, \Omega^{(23)}, \Omega^{(24)}$ по такой же последовательности действий. Аналогично представленному описанию можно решить системы, содержащие более двух уравнений. Итерационный процесс следует продолжать до тех пор, пока не выполнится условие остановки, удовлетворяющее ряду соображений метрологической практики. Для случая нахождения корня лишь одного уравнения правило остановки алгоритма изложено в работе [2]. Для системы уравнений оценку решения надо уточнять до тех пор, пока пределы возможной погрешности компонентов (координат x, y в двумерном случае) перестанут уменьшаться с выполнением новых итераций. При этом на каждой итерации авторы предлагают округлять пределы погрешности по принятым в метрологии правилам, а именно: округлять только в большую сторону и до одной, максимум двух, значащих цифр. Оценивать пределы погрешности компонентов решения на j -й итерации следует через поиск их минимального и максимального значений по границам всех n -брусков $\Omega^{(jk)}, k=1, 2, \dots, K$, осуществляющих локализацию решения.

Предложенный авторами подход основан на том, что если некоторая область значений аргументов монотонной функции содержит её корень, то данная функция принимает значения разных знаков на границах этой области. Неточность же параметров, входящих в уравнения системы, может приводить к неопределённости знака функции. В такой ситуации уместно считать его равным нулю. Действительно, если в заданной точке значение функции окажется меньше по модулю оценки его предельной погрешности, то это означает, что нет оснований считать его отличным от нуля. Если же подобная ситуация имеет место при определении знака функции в вершинах n -брусков,

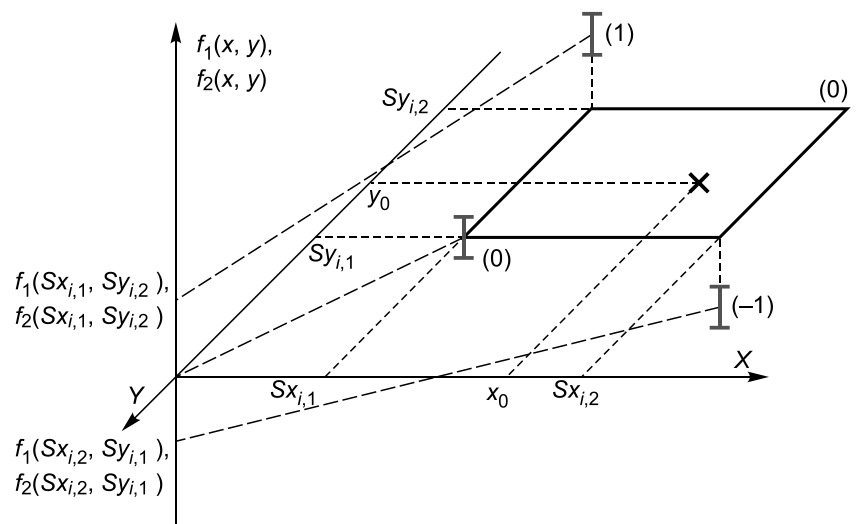


Рис. 2. Определение знаков функций f_1, f_2 в вершинах прямоугольника с учётом погрешностей параметров решаемых уравнений

локализирующих решение анализируемой системы, то такие n -брусы не надо исключать из области поиска. Пример ситуации с определением знаков значений функций f_1, f_2 в вершинах одного из прямоугольников $\Omega^{(21)}, \Omega^{(22)}, \Omega^{(23)}, \Omega^{(24)}$ с учётом погрешности параметров p_1, p_2 показан на рис. 2.

Примеры применения обобщённого интервального метода бисекции. Рассматриваемый подход был применён к нескольким задачам, взятым из метрологической практики.

Пример 1. Рассмотрим задачу из прикладной гидродинамики, а именно – определение высоты волны на поверхности воды по значениям давления в жидкости на глубине. За исходные данные примем результаты измерений размаха гидродинамического давления Δp в жидкости на глубине z , который вызван распространением волн с периодом T по поверхности слоя воды глубиной $d \geq z$. На основе результатов прямых измерений величин $\Delta p, T, d, z$ необходимо косвенным образом определить высоту волн h .

Для решения поставленной задачи авторы применили математическую модель распространения волн на поверхности жидкости, описывающую связь между величинами $h, \Delta p$ следующими уравнениями [5]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta p}{\rho g} &= 2a \frac{\text{ch}[k(d-z)]}{\text{ch}(kd)} + \frac{3}{4} \frac{a^3 k^2}{\text{sh}^2(kd) \text{sh}(2kd)} \times \\ &\times \left\{ -2\text{ch}[3k(d-z)] + \frac{13-4\text{ch}^2(kd)}{4\text{sh}^2(kd)} \text{ch}^2[3k(d-z)] + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{8}{3} \text{ch}^4(kd) - \frac{8}{3} \text{ch}^2(kd) + 1 \right) \text{ch}[k(d-z)] \right\}; \\ T^2 g k \text{th}(kd) &\left(1 + \frac{8\text{ch}^4(kd) - 8\text{ch}^2(kd) + 9}{16\text{sh}^4(kd)} a^2 k^2 \right)^2 = 4\pi^2; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$h = 2a \left[1 + \frac{a^2 k^2}{64 \text{sh}^6(kd)} \times \right. \\ \left. \times [32 \text{ch}^6(kd) + 32 \text{ch}^4(kd) - 76 \text{ch}^2(kd) + 39] \right], \quad (6)$$

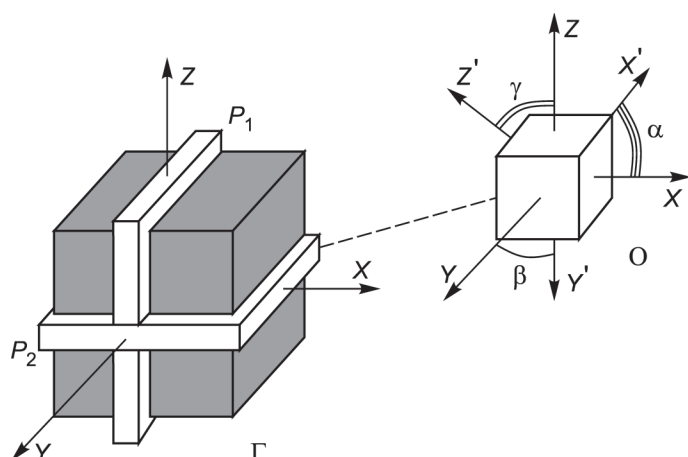


Рис. 3. Системы координат при позиционировании во внешнем магнитном поле:

G – генератор поля; O – позиционируемый объект; P_1, P_2 – рамки генератора

где ρ – плотность воды; g – ускорение свободного падения; a – амплитудный множитель; k – волновое число.

Для определения искомой величины h решим систему уравнений (5) относительно неизвестных параметров k, a , которые подставим затем в формулу (6). Для этого используем предложенный в данной статье метод. Чтобы оценить достоверность полученных оценок метрологических характеристик решения системы, сравним полученные результаты с результатами совместных измерений величин $\Delta p, T, d, z, h$. Такие измерения были выполнены одним из авторов настоящей статьи в ходе специального эксперимента, описанного в работе [6]. Опыты проводили в гидроволновой лаборатории с применением датчиков для нахождения текущих значений давления в жидкости, а также уровнемеров, измеряющих текущие значения уровня воды.

С помощью математической обработки результатов указанных измерений косвенно вычислим значения $\Delta p, T, h$, опираясь на показания приборов. Выполним оценку погрешности полученных результатов, унаследованной от погрешности использованных средств измерений. Известно, что заглубление датчиков давления составило $z = (26,5 \pm 0,2)$ см, а глубина в месте их установки $d = (65,7 \pm 0,2)$ см. Исходные данные для решения системы уравнений (5) математической

модели следующие. Интервалы начальных приближений для аргументов k, a , относительно которых решается система, соответственно $Sk = [0,5; 2,0] \text{ м}^{-1}$, $Sa = [0; 0,15] \text{ м}$. Результаты измерений размаха гидродинамического давления Δp и периода регулярного волнения T , а также пределы их допускаемой абсолютной погрешности представлены в табл. 1.

При решении системы уравнений округление оценок погрешности величин a, k , унаследованной от величин $\Delta p, T, d, z$, проведём до одной значащей цифры. Полученные значения a, k подставим в формулу (6) для вычисления высоты волнения h . Сравним результаты с данными измерений, а полученную оценку предела её абсолютной погрешности – с результатами расчётов из работы [6], выполненных методом Монте-Карло (табл. 2).

Представленные в табл. 2 данные указывают на достоверность результатов, полученных с помощью предложенного метода: все вычисленные границы возможных значений высоты волны h хорошо согласуются с результатами метода Монте-Карло и содержат результаты прямых измерений этой же величины.

Пример 2. Определим координаты объекта во внешнем магнитном поле, создаваемом специальным генератором. Суть подобной задачи позиционирования и технические средства для её решения описаны в работах [7–9].

Специальный генератор с помощью двух перпендикулярно ориентированных рамок P_1, P_2 , через которые попеременно пропускается электрический ток, создаёт переменное магнитное поле. Позиционирование объекта в этом поле осуществляется в системе координат $OXYZ$ с началом в центре генератора G (рис. 3). Для нахождения координат объекта измерим в разные фазы работы генератора три взаимно ортогональные составляющие магнитной индукции в точке нахождения объекта. По полученным результатам измерений с помощью математической модели, связывающей индукцию магнитного поля в разных точках пространства с известными параметрами генератора, определим линейные координаты $(x_0; y_0; z_0)$ объекта и углы $(\alpha_0; \beta_0; \gamma_0)$ его ориентации в системе координат $OXYZ$. Компоненты $(B_x; B_y; B_z)$ вектора $\mathbf{B}$ магнитной индукции измерим тремя датчиками Холла, размещёнными на объекте, оси чувствительности которых задают

Таблица 1

Результаты решения системы (5) представленным методом

Номер опыта	Исходные данные [6]		Решение системы (5)	
	$\Delta p, \text{ см}$	$T, \text{ с}$	$k, \text{ м}^{-1}$	$a, \text{ м}$
1	$10,1 \pm 0,5$	$1,930 \pm 0,005$	$1,435 \pm 0,009$	$0,063 \pm 0,004$
2	$6,0 \pm 0,5$	$1,928 \pm 0,003$	$1,447 \pm 0,009$	$0,038 \pm 0,004$
3	$16,8 \pm 1,0$	$1,938 \pm 0,007$	$1,390 \pm 0,05$	$0,103 \pm 0,010$
4	$5,97 \pm 0,35$	$1,697 \pm 0,005$	$1,710 \pm 0,02$	$0,042 \pm 0,004$
5	$10,60 \pm 0,35$	$1,702 \pm 0,003$	$1,683 \pm 0,015$	$0,071 \pm 0,005$

Таблица 2

Значения высоты волнения h , см, полученные в результате измерений, расчётов методом Монте-Карло и с помощью предложенного метода

Номер опыта	Прямые измерения [6]	Метод Монте-Карло [6]	Предложенный метод
1	$12,93 \pm 0,25$	$13,2 \pm 0,7$	$13,1 \pm 0,8$
2	$7,7 \pm 0,2$	$7,8 \pm 0,7$	$7,7 \pm 0,7$
3	$22,23 \pm 0,25$	$22,7 \pm 1,6$	$22,2 \pm 2,0$
4	$8,0 \pm 0,2$	$8,3 \pm 0,5$	$8,3 \pm 0,7$
5	$14,87 \pm 0,25$	$14,9 \pm 1,1$	$14,7 \pm 1,3$

систему координат $OX'Y'Z'$. Задача нахождения значений $x_0, y_0, z_0, \alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ сводится к решению системы нелинейных уравнений [9]:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1^T \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{B}}_1; \\ \mathbf{B}_2^T \mathbf{E} = \tilde{\mathbf{B}}_2, \end{cases} \quad (7)$$

где $\mathbf{B}_1^T = (B_{x1}, B_{y1}, B_{z1})$, $\mathbf{B}_2^T = (B_{x2}, B_{y2}, B_{z2})$ – векторы магнитной индукции поля, создаваемого соответственно первой и второй рамками генератора в точке с координатами $(x_0; y_0; z_0)$ согласно математической модели генератора; B_{x1}, B_{y1}, B_{z1} и B_{x2}, B_{y2}, B_{z2} – функции от параметров генератора; $\mathbf{E}$ – матрица Эйлера, которая определяет ориентацию размещённых на объекте датчиков Холла в системе координат $OXYZ$; $\tilde{\mathbf{B}}_1^T = (\tilde{B}_{x1}, \tilde{B}_{y1}, \tilde{B}_{z1})$, $\tilde{\mathbf{B}}_2^T = (\tilde{B}_{x2}, \tilde{B}_{y2}, \tilde{B}_{z2})$ – векторы результатов измерений компонентов магнитной индукции в точке $(x_0; y_0; z_0)$ в системе координат $OX'Y'Z'$, принятой на объекте.

Значения B_{x1}, B_{y1}, B_{z1} и B_{x2}, B_{y2}, B_{z2} зависят от геометрических размеров генератора Γ и силы пропускаемого электрического тока. Запишем уравнения, связывающие эти параметры с компонентами вектора $\mathbf{B}_1$:

$$\begin{aligned} \frac{B_{x1}}{\mu_0 I_1} &= r_{14z} \left(\frac{r_{14y}}{\|\mathbf{r}_{14}\|} + \frac{r_{12y}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{14z}^2 \right) + \\ &+ r_{14y} \left(\frac{r_{13z}}{\|\mathbf{r}_{13}\|} + \frac{r_{14z}}{\|\mathbf{r}_{14}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{14y}^2 \right) + \\ &+ r_{11z} \left(\frac{r_{11y}}{\|\mathbf{r}_{11}\|} + \frac{r_{13y}}{\|\mathbf{r}_{13}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{11z}^2 \right) + \\ &+ r_{11y} \left(\frac{r_{11z}}{\|\mathbf{r}_{11}\|} + \frac{r_{12z}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{11y}^2 \right); \\ \frac{B_{y1}}{\mu_0 I_1} &= x_0 \left(\frac{r_{13z}}{\|\mathbf{r}_{13}\|} + \frac{r_{14z}}{\|\mathbf{r}_{14}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{14y}^2 \right) + \\ &+ x_0 \left(\frac{r_{11z}}{\|\mathbf{r}_{11}\|} + \frac{r_{12z}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{11y}^2 \right); \\ \frac{B_{z1}}{\mu_0 I_1} &= x_0 \left(\frac{r_{14y}}{\|\mathbf{r}_{14}\|} + \frac{r_{12y}}{\|\mathbf{r}_{12}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{14z}^2 \right) + \\ &+ x_0 \left(\frac{r_{11y}}{\|\mathbf{r}_{11}\|} + \frac{r_{13y}}{\|\mathbf{r}_{13}\|} \right) / \left(x_0^2 + r_{11z}^2 \right), \end{aligned}$$

где I_1 – сила электрического тока, протекающего по первой рамке; μ_0 – магнитная постоянная; $\mathbf{r}_{11}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{13}, \mathbf{r}_{14}$ – векторы, образованные точкой $(x_0; y_0; z_0)$ и вершинами первой рамки, которая считается тонкой; $\|\mathbf{r}_{11}\|, \|\mathbf{r}_{12}\|, \|\mathbf{r}_{13}\|, \|\mathbf{r}_{14}\|$ – длины данных векторов; $r_{11x}, r_{11y}, r_{11z}, r_{12x}, r_{12y}, r_{12z}$ и т. д. – проекции векторов на оси OX, OY, OZ .

Компоненты вектора $\mathbf{B}_2$, описывающего магнитное поле от второй рамки генератора, определим по аналогичным соотношениям, в которых уже следует использовать координаты вершин этой рамки.

Поскольку позиционируемый объект может быть ориентирован в пространстве так, что оси чувствительности установленных на нём датчиков Холла могут быть повернуты относительно осей генератора, применим матрицу $\mathbf{E}$ поворота системы координат $OXYZ$ в $OX'Y'Z'$ [9]:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} = \cos\beta_0 \cos\alpha_0$; $a_{12} = \cos\beta_0 \sin\alpha_0$; $a_{13} = -\sin\beta_0$;
 $a_{21} = \sin\gamma_0 \sin\beta_0 \cos\alpha_0 - \cos\gamma_0 \sin\alpha_0$; $a_{22} = \sin\gamma_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 + \cos\gamma_0 \cos\alpha_0$;
 $a_{23} = \sin\gamma_0 \cos\beta_0$; $a_{31} = \cos\gamma_0 \sin\beta_0 \cos\alpha_0 + \sin\gamma_0 \sin\alpha_0$;
 $a_{32} = \cos\gamma_0 \sin\beta_0 \sin\alpha_0 - \sin\gamma_0 \cos\alpha_0$; $a_{33} = \cos\gamma_0 \sin\beta_0$.

После перемножений $\mathbf{B}_1^T \mathbf{E}, \mathbf{B}_2^T \mathbf{E}$ получим выражения, в которые искомые неизвестные – координаты $x_0; y_0; z_0$ и углы ориентации $\alpha_0; \beta_0; \gamma_0$ – входят нелинейно.

Точность позиционирования в создаваемом по описанной схеме магнитном поле существенно зависит от точности генератора Γ , в частности – от точности выполнения его рамок, стабильности силы пропускаемого через них тока, точности размещения датчиков Холла на объекте O , помех и других факторов, влияние которых можно существенно снизить при должном уровне технологичности изделия. Неустранимым источником погрешности определения координат позиционируемого объекта является неточность используемых датчиков Холла. От их метрологических характеристик в первую очередь и зависит потенциально достижимая точность позиционирования при рассмотренном методе позиционирования.

Авторы настоящей работы выполнили расчёты, указывающие на границы той точности определения координат при подобном позиционировании, которая достижима при применении современных серийных датчиков Холла. Для этого они допустили, что все составляющие погрешности датчиков (от нелинейности, гистерезиса, собственных шумов и т. д.) в совокупности приводят к допустимой относительной погрешности, не превосходящей по модулю $\gamma = 0,1\%$. Данное предположение позволило получить количественное представление о предельной погрешности позиционирования, достижимой в рамках подхода из работ [7–9], при современном состоянии технологий. При вычислениях использовали следующие параметры: длина и ширина первой и второй рамок составляли соответственно 0,25 и 0,50 м; 0,50 и 0,25 м. Силы токов, протекающих через рамки, взяли из работы [10]: $I_1 = 0,5$ А, $I_2 = 1,0$ А.

Систему уравнений (7) для трёх неизвестных – координат $x_0; y_0$ и угла α_0 – решили предложенным методом в ситуации, когда позиционируемый объект не двигался по оси Z (рассматривали перемещения объекта O в плоскости OXY). Значения z_0, β_0, γ_0 считали фиксированными и равными 2,5 м, 0,12 и 0,24 рад соответственно. Вычисления провели для разных начальных приближений координат: $Sx = [0; 2]$ м – интервал для x_0 ; $Sy = [0; 2]$ м – интервал для y_0 , $S\alpha = [-0,75; 0]$ рад – интервал для α_0 . Полученные результаты при этом совпали.

Оценки искомых координат и их погрешности, рассчитанные предложенным методом, а также заложенные в расчёты модельные значения координат позиционируемого объекта указаны в табл. 3.

Таблица 3

Литература

Результаты решения системы уравнений (7) задачи позиционирования объекта в магнитном поле

γ , %	Номер опыта	Заданные модельные значения координат			Результаты расчётов предложенным методом		
		x, м	y, м	α , рад	x, м	y, м	α , рад
0,1	1	1,90	1,20	-0,38	1,90±0,01	1,20±0,01	-0,381±0,005
	2	1,50	1,75	-0,10	1,500±0,008	1,75±0,02	-0,100±0,005
	3	1,85	1,20	-0,30	1,85±0,01	1,20±0,01	-0,300±0,004
0,01	1	1,90	1,20	-0,38	1,900±0,001	1,200±0,001	-0,3800±0,0005
	2	1,50	1,75	-0,10	1,5000±0,0005	1,75±0,001	-0,1000±0,0004
	3	1,85	1,20	-0,30	1,850±0,001	1,20±0,001	-0,3000±0,0004

Полученные с помощью предложенного авторами метода интервалы содержат заданные значения координат. При пределе допускаемой относительной погрешности датчиков Холла, равной 0,1 %, предел абсолютной погрешности позиционирования на плоскости при удалении в несколько метров от генератора поля составит порядка сантиметра, что для некоторых приложений может оказаться весьма существенным. Если же принять, что предел допускаемой относительной погрешности датчиков Холла на порядок меньше и составляет 0,01 %, то погрешность определения координат снизится примерно до миллиметра (см. табл. 3). Данное обстоятельство указывает в целом на не очень высокую предельную точность позиционирования объекта в магнитном поле, если использовать упомянутый способ его организации.

Заключение. Предложена модификация интервального метода бисекции, которая позволяет решать системы уравнений в измерительных задачах и принимать во внимание характеристики погрешности всех результатов измерений, входящих в систему как коэффициенты уравнений. Представлено правило остановки итерационного процесса, согласующее момент остановки с точностью исходных данных задачи. Рассмотренный метод обеспечивает гарантированное получение результатов, если уравнения заданы функциями, монотонными в областях поиска решений. Предложенный метод вместе с решениями систем уравнений предоставляет оценки характеристик их погрешности, что делает желательным его применение в составе метрологически значимого программного обеспечения. С его помощью можно получить оценку предельной точности того или иного метода косвенных измерений при известном составе используемых средств измерений.

The generalized interval bisection for the metrologically valid solving of the system of the equations with inaccurate initial data

K. K. Semenov, A. A. Tzelischeva

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russia, e-mail: semenov.k.k@iit.icc.spbstu.ru

This paper presents a metrology-oriented method to solve systems of nonlinear equations, which allows satisfying the requirements for the solution as a set of indirect measurements results. The proposed approach is a generalization of the interval method of bisection and allows one to take into account information about the inaccuracy of the coefficients of the equations to be solved that are the results of direct measurements. The resulting solution is automatically accompanied by a reliable estimate for its components' accuracy.

Key words: solving systems of nonlinear equations, bisection, indirect measurements, metrological self-tracking for inaccurate data processing.

1. Чуновкина А. Г., Слаев В. А., Степанов А. В., Звягин Н. Д. Оценивание неопределенности измерений при использовании программ обработки данных // Измерительная техника. 2008. № 7. С. 3–8.

2. Семёнов К. К., Целищева А. А. Интервальный метод бисекции для метрологически обоснованного поиска корней уравнений с неточно заданными исходными данными // Измерительная техника. 2018. № 3. С. 10–15.

3. Bachrathy D., Stepan G. Bisection method in higher dimensions and the efficiency number // Periodica Polytechnica. Mechanical Engineering. 2012. V. 56. No. 2. P. 81–86.

4. Семёнов К. К., Солопченко Г. Н. Исследование комбинированного метода метрологического автосопровождения программ обработки результатов измерений // Измерительная техника. 2011. № 4. С. 14–19.

5. Алешков Ю. 3. Теория волн на поверхности тяжёлой жидкости. Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1981.

6. Максимов В. В., Нуднер И. С., Семёнов К. К., Титова Н. Д. Восстановление возвышения волновой поверхности по значениям гидродинамического давления в толще жидкости в рамках теории поверхностных волн третьего приближения // Труды Межд. конф. «Математические и информационные технологии, MIT-2013», Белград: Štamparija Offsetpres, Kraljevo, 2014. С. 438–442.

7. Желамский М. В. Особенности измерения локального магнитного поля позиционирования на малых дальностях // Измерительная техника. 2014. № 9. С. 39–43.

8. Желамский М. В. Особенности создания поля позиционирования для локальной навигации в закрытых пространствах // Измерительная техника. 2014. № 7. С. 40–44.

9. Желамский М. В. Электромагнитное позиционирование подвижных объектов. М: ФИЗМАТЛИТ, 2013.

10. Желамский М. В., Семёнов К. К., Солопченко Г. Н. Особенности вычисления координат позиционируемого объекта по результатам магнитных измерений // Сб. науч. трудов IV межд. науч.-практ. конф. «Измерения в современном мире – 2013». СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2013. С. 135–137.

Дата принятия: 17.10.2018.