

Минимизация погрешностей измерения коэффициентов теплопроводности и температуропроводности теплоизоляционных материалов методом плоского импульсного источника теплоты

С. В. Пономарев, Е. В. Буланов, В. О. Буланова, А. Г. Дивин

Тамбовский государственный технический университет, Тамбов, Россия, e-mail: svponom@yandex.ru

Разработаны математические модели для расчёта погрешностей измерения коэффициентов тепло- и температуропроводности теплоизоляционных материалов. На основе моделей создана методика выбора следующих оптимальных параметров: длительности теплового импульса и основного конструкционного размера измерительного устройства. Также определены оптимальные условия применения алгоритма обработки экспериментальных данных.

Ключевые слова: коэффициент теплопроводности, коэффициент температуропроводности, длительность теплового импульса, конструкционный размер, обработка данных, оптимизация.

В рамках повышения эффективности деятельности в системе менеджмента качества испытательной лаборатории выполнено усовершенствование метода плоского импульсного источника теплоты. Данный метод применяется при испытаниях различных, в том числе теплоизоляционных, материалов.

Математическая модель температурного поля. Температурное поле $T(x, \tau)$ в плоском образце (в случае использования метода плоского импульсного источника теплоты) на основе классической теории теплопроводности [1–6] описывается математической моделью из четырёх уравнений:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0 = 0; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q(\tau, \tau_{\text{и}}) = q_c [h(\tau) - h(\tau - \tau_{\text{и}})]; \quad (3)$$

$$T(\infty, \tau) = T_0 = 0, \quad (4)$$

где $a = \lambda / C_p$, λ – коэффициенты тепло- и температуропроводности соответственно; C_p – объёмная теплоёмкость; $q(\tau, \tau_{\text{и}})$ – мощность импульсного плоского источника теплоты с импульсом длительностью $\tau_{\text{и}}$; q_c – мощность стационарного теплового потока, подводимого к образцу через поверхность $x=0$ (x – основной конструкционный размер (толщина) средней пластины исследуемого образца) в течение времени $0 < \tau \leq \tau_{\text{и}}$; $h(\tau)$, $h(\tau - \tau_{\text{и}})$ – единичные асимметричные ступенчатые функции [6],

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0; \\ 1 & \text{при } \tau \geq 0; \end{cases} \quad h(\tau - \tau_{\text{и}}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < \tau_{\text{и}}; \\ 1 & \text{при } \tau \geq \tau_{\text{и}}. \end{cases}$$

Если упростить граничное условие (3) до равенства

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q_c h(\tau),$$

то решение задачи (1)–(4) можно записать следующим образом [4]:

$$T(x, \tau) - T_0 = \sqrt{a\tau} \frac{2q_c}{\lambda} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}. \quad (5)$$

Здесь $\operatorname{ierfc}(u)$ – специальная функция [6], представляющая собой интеграл от функции ошибок Гауса $\operatorname{erf}(W)$ [6, 7]:

$$\operatorname{erfc}(W) = 1 - \operatorname{erf}(W); \quad \operatorname{erf}(W) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^W e^{-W^2} dW;$$

$$\operatorname{ierfc}(u) = \int_u^\infty \operatorname{erfc}(W) dW = (1/\sqrt{\pi}) e^{-u^2} - u \operatorname{erfc}(u).$$

На основе использования принципа суперпозиции [5, 6] и соотношения (5), решение краевой задачи (1)–(4) примет вид

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{2q_c}{\lambda} f(x, \tau, \tau_{\text{и}}, a); \quad (6)$$

$$f(x, \tau, \tau_{\text{и}}, a) = \begin{cases} \sqrt{a\tau} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} & \text{при } 0 < \tau \leq \tau_{\text{и}}; \\ \sqrt{a\tau} \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \sqrt{a(\tau - \tau_{\text{и}})} \times \\ \times \operatorname{ierfc} \frac{x}{2\sqrt{a(\tau - \tau_{\text{и}})}} & \text{при } \tau > \tau_{\text{и}}. \end{cases} \quad (7)$$

Для моментов времени $\tau \geq \tau_{\text{и}}$ решение (6) с учётом функции (7) можно выразить как

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{q_c x}{\lambda} \left[\frac{\operatorname{ierfc} U(\tau)}{U(\tau)} - \frac{\operatorname{ierfc} U(\tau - \tau_{\text{и}})}{U(\tau - \tau_{\text{и}})} \right], \quad (8)$$

где $U(\tau)$; $U(\tau - \tau_{\text{и}})$, – безразмерные функции, зависящие от параметров x , τ , $\tau_{\text{и}}$, a ;

$$U(\tau) = \frac{x}{2\sqrt{a\tau}};$$

$$U(\tau - \tau_{\text{и}}) = \frac{x}{2\sqrt{a(\tau - \tau_{\text{и}})}} = \frac{x}{2\sqrt{a\tau[(\tau - \tau_{\text{и}})/\tau]}} = U(\tau)\sqrt{\tau/(\tau - \tau_{\text{и}})}.$$

Рассчитанное по формуле (8) изменение разности температур $T(x, \tau) - T_0$ достигает максимального значения $T_{\text{max}} - T_0 = T(x, \tau_{\text{max}}) - T_0$ в момент времени $\tau = \tau_{\text{max}}$, которому соответствует определённое значение безразмерной функции

$$U^{\text{max}} = U(\tau_{\text{max}}) = \frac{x}{2\sqrt{a\tau_{\text{max}}}}.$$

Процедуры проведения эксперимента и обработки данных. При измерениях коэффициентов тепло- и температуропроводности новым методом плоского импульсного источника теплоты образец исследуемого материала изготавливают в виде трёх пластин. Между нижней и средней пластинами размещают плоский нагреватель, а между средней и верхней – термопару. После достижения в образце равномерного распределения температурного поля $T(x, \tau) = T_0 = \text{const}$ в течение заданного промежутка времени $0 < \tau \leq \tau_{\text{и}}$ в плоский электронагреватель площадью S подают импульс постоянной мощности P и с помощью термопары регистрируют массив временных изменений разности температур $T(x, \tau) - T_0$. По полученному массиву определяют максимальную разность температур $T_{\text{max}} - T_0$ материала образца и соответствующее значение момента времени τ_{max} . Затем по полученным данным и с учётом известных значений x , $q_c = P/(2S)$ вычисляют коэффициенты температуро- и теплопроводности исследуемого материала. Экспериментальные данные должны соответствовать оптимальным значениям безразмерного параметра γ , представляющего отношение текущего значения разности температур к её максимально значению в момент времени $\tau = \tau_{\text{max}}$:

$$\gamma = (T(x, \tau) - T_0) / (T_{\text{max}} - T_0). \quad (9)$$

Рассмотрим определение безразмерной функции $U(\tau) = x/(2\sqrt{a\tau})$, соответствующей заданному значению безразмерного параметра γ , по экспериментально измеренным коэффициентам тепло- и температуропроводности (в виде указанного выше массива разностей температур). Если в формулу (8) подставить интервал $\tau = \tau_{\text{max}}$, то она примет вид

$$T_{\text{max}} - T_0 = T(x, \tau_{\text{max}}) - T_0 = \frac{q_c x}{\lambda} \left[\frac{\text{ierfc} U(\tau_{\text{max}})}{U(\tau_{\text{max}})} - \frac{\text{ierfc} U(\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{и}})}{U(\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{и}})} \right]. \quad (10)$$

С учётом выражения (10) перепишем соотношение (9):

$$\gamma = \frac{\text{ierfc} U(\tau)/U(\tau) - \text{ierfc} U(\tau - \tau_{\text{и}})/U(\tau - \tau_{\text{и}})}{\text{ierfc} U(\tau_{\text{max}})/U(\tau_{\text{max}}) - \text{ierfc} U(\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{и}})/U(\tau_{\text{max}} - \tau_{\text{и}})}. \quad (11)$$

При численном моделировании процесса измерений сначала определяли массив разностей температур, затем мето-

дом перебора находили максимальное значение этой разности (аналитическое выражение (10)). При заданном параметре γ из уравнения (11) вычисляли его корень в виде значения безразмерной функции $U(\tau')$. Искомое значение коэффициента температуропроводности при известных значениях безразмерной функции $U(\tau')$ и соответствующих значениях x , τ' вычисляли по формуле

$$a = \frac{x^2}{4\tau'[U(\tau')]^2}. \quad (12)$$

Значения момента времени $\tau' = \tau'(\gamma)$ и безразмерной функции $U[\tau'(\gamma)] = U'(\gamma)$ зависят от безразмерного параметра γ при каждой известной длительности теплового импульса. В этом случае формула для вычисления коэффициента теплопроводности с учётом соотношений (8), (9) примет вид

$$\lambda = \frac{q_c x}{T[x, \tau(\gamma)] - T_0} F(\gamma); \quad (13)$$

$$F(\gamma) \equiv \Phi\{U[\tau'(\gamma)], U[\tau'(\gamma) - \tau_{\text{и}}]\};$$

$$\Phi[U(\tau'), \tau_{\text{и}}, \tau'] = \frac{\text{ierfc}[U(\tau')]}{U(\tau')} - \frac{\text{ierfc}[U(\tau')\sqrt{\tau'/(\tau' - \tau_{\text{и}})}]}{U(\tau')\sqrt{\tau'/(\tau' - \tau_{\text{и}})}}.$$

Выбор оптимальных значений длительности теплового импульса $\tau_{\text{и}}$, безразмерного параметра γ и геометрического размера x . В соответствии с рекомендациями теории погрешностей и имеющегося опыта решения аналогичных задач [1, 4, 5, 8–10] после логарифмирования зависимости (12) и последующих преобразований получим формулу для вычисления среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерения коэффициента температуропроводности:

$$(\delta a)_{\text{СК}} = \left\{ 4(\delta x)^2 + \left[\Delta T \left(\frac{\tau' \{ d[T(x, \tau) - T_0] \}}{d\tau'} \right)^{-1} \right]^2 + \left[\frac{1}{U'} \frac{dU'}{d\gamma} \sqrt{(\gamma^2 + 1)} \delta(T_{\text{max}} - T_0) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

где $\delta x = \Delta x/x$ – относительная погрешность измерения геометрического размера x ; ΔT , $\delta(T_{\text{max}} - T_0) = \Delta T/(T_{\text{max}} - T_0)$ – абсолютная и относительная погрешности измерения максимального значения разности температур; τ' , U' – значения момента времени и функции U , соответствующие заданному параметру γ .

По соотношению (14) можно найти оптимальные значения безразмерного параметра γ и основного конструкционного размера x средней пластины исследуемого образца.

Формулу для вычисления среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерения коэффициента теплопроводности получили также в соответствии с рекомендациями [1, 5, 8] после логарифмирования зависимости (13) и последующих преобразований:

$$(\delta\lambda)_{\text{СК}} = \left\{ \left[\frac{\Delta P}{P(\tau_{\text{и}})} \right]^2 + (\delta S)^2 + (\delta x)^2 + \left(\gamma^2 + 1 \right) \left(\frac{dF(\gamma)}{F(\gamma)d\gamma} \delta(T_{\text{max}} - T_0) \right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T(x, \tau) - T_0} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (15)$$

где ΔP – абсолютная погрешность измерения мощности плоского нагревателя; δS – относительная погрешность измерения площади S нагревателя.

Результаты численного моделирования среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерения коэффициентов температуро- и теплопроводности. С применением полученных формул (14), (15) были рассчитаны зависимости среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ и температуропроводности $(\delta a)_{\text{СК}}$ от безразмерного параметра γ при различных значениях длительности теплового импульса $\tau_{\text{и}}$ и толщины x средней пластины. Мощность нагревателя вычисляли по формуле

$$P(\tau_{\text{и}}) = Q_{\text{и}} / \tau_{\text{и}}. \quad (16)$$

Использовали следующие исходные данные: количество теплоты, выделяющееся в единицу площади плоского нагревателя на протяжении времени действия теплового импульса $Q_{\text{и}} = 55 \text{ кДж/м}^2$; $\delta S = 0,5 \%$; $5 \text{ с} < \tau_{\text{и}} < 40 \text{ с}$; $\alpha = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$; $\lambda = 0,194 \text{ Вт/(м·К)}$; $\Delta P = 0,5 \text{ Вт}$; $x = 2 \dots 8 \text{ мм}$; $\Delta x = 0,1 \text{ мм}$; $\Delta T = 0,05 \text{ К}$. Указанные зависимости при длительности теплового импульса $\tau_{\text{и}} = 21 \text{ с}$ представлены на рис. 1 в виде линий равных уровней.

При исходных расчётных данных приемлемые значения среднеквадратичных оценок $(\delta a)_{\text{СК}}$ относительной погрешности измерений коэффициента температуропроводности наблюдаются для безразмерного параметра в диапазоне $0,35 < \gamma_a \leq 0,59$ и толщине в интервале $4,0 \text{ мм} < x \leq 5,0 \text{ мм}$. Минимальные значения оценок $(\delta a)_{\text{СК}}$ достигаются при $\gamma_{a \text{ опт}} \approx 0,465$ и $x_{a \text{ опт}} \approx 4,5 \text{ мм}$. Для среднеквадратичных оценок $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ относительных погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности диапазоны следующие: $0,90 < \gamma_\lambda \leq 1,0$; $2,4 \text{ мм} \leq x \leq 3,6 \text{ мм}$. Минимальные значения оценок $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ получаются при $\gamma_{\lambda \text{ опт}} = 1$ и $x_{\lambda \text{ опт}} \approx 3,0 \text{ мм}$.

Для достижения минимальных значений оценок указанных погрешностей при одновременном измерении коэффициентов температуро- и теплопроводности исследуемого материала расстояние x между измерителем температуры и нагревателем используемого измерительного преобразователя должно быть от 3,0 до 4,5 мм. Можно принять $x_{\text{опт}} = (x_{a \text{ опт}} + x_{\lambda \text{ опт}}) / 2 = 3,75 \text{ мм}$.

Для нахождения оптимальной длительности теплового импульса, обеспечивающей получение минимальных значений оценок $(\delta a)_{\text{СК}}$, $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ и среднеарифметического значения $\delta_{\text{ср}} = [(\delta a)_{\text{СК}} + (\delta\lambda)_{\text{СК}}] / 2$ выполнены расчёты по формулам (14), (15) при известных оптимальных значениях $\gamma_{a \text{ опт}} = 0,65$; $\gamma_{\lambda \text{ опт}} = 1$; $x_{\text{опт}} = 3,75 \text{ мм}$. На рис. 2 представлена зависимость среднеарифметического значения $\delta_{\text{ср}}$ среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ и температуропроводности $(\delta a)_{\text{СК}}$ от длительности $\tau_{\text{и}}$ теплового импульса при обработке данных

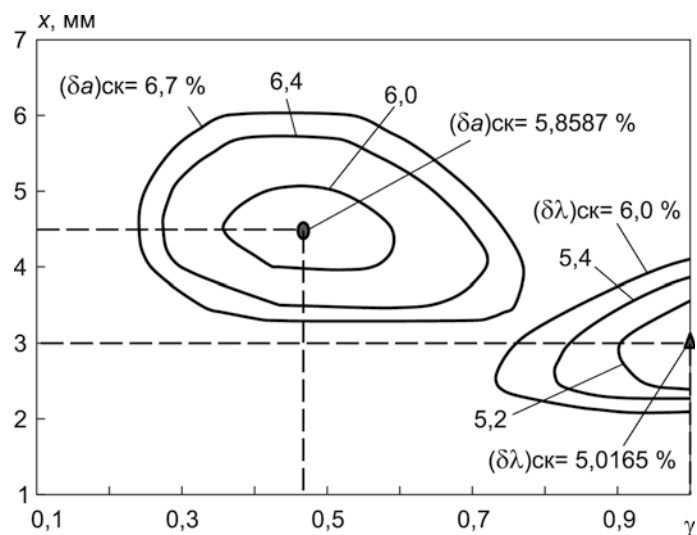


Рис. 1. Линии равных уровней среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ и температуропроводности $(\delta a)_{\text{СК}}$, построенные при оптимальной длительности теплового импульса $\tau_{\text{и}} = 21 \text{ с}$ и различных параметрах x, γ

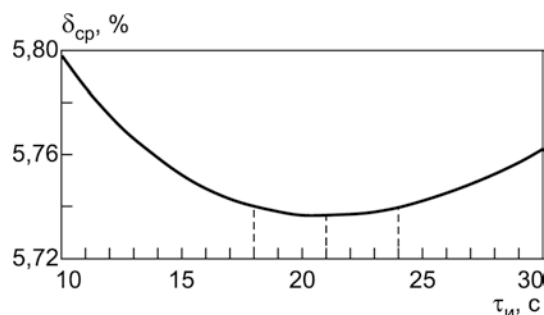


Рис. 2. Зависимость среднеарифметического значения среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерений коэффициентов теплопроводности $(\delta\lambda)_{\text{СК}}$ и температуропроводности $(\delta a)_{\text{СК}}$ от длительности $\tau_{\text{и}}$ теплового импульса при обработке данных методом плоского импульсного источника теплоты

методом плоского импульсного источника теплоты. При изменении длительности теплового импульса $\delta_{\text{ср}}$ принимает минимальные значения для $\tau_{\text{и опт}} \approx 21 \text{ с}$ при $\tau_{\text{и}}$ от 18 до 24 с.

Заметим, что при учёте влияния длительности теплового импульса с применением предложенных в настоящей статье метода измерения и методики обработки данных можно уменьшить значение $\delta_{\text{ср}}$ на 5–8 % по сравнению с традиционным методом плоского «мгновенного» источника теплоты [1–4] (а не на 0,025–0,063 %, см. рис. 2). Для иллюстрации данного факта значения коэффициентов $a_{\text{МГН}}$, $\lambda_{\text{МГН}}$ температуро- и теплопроводности при различных длительностях теплового импульса вычислены по формулам (10), (11) и расчётным соотношениям традиционного метода плоского «мгновенного» источника теплоты [1–3, 5]:

$$a_{\text{МГН}} = x^2 / (2\tau_{\text{max}}); \quad (17)$$

$$\lambda_{\text{МГН}} = Q_{\text{п}} x_0 / (2\tau_{\text{max}} T_{\text{max}} \sqrt{2\pi e}). \quad (18)$$

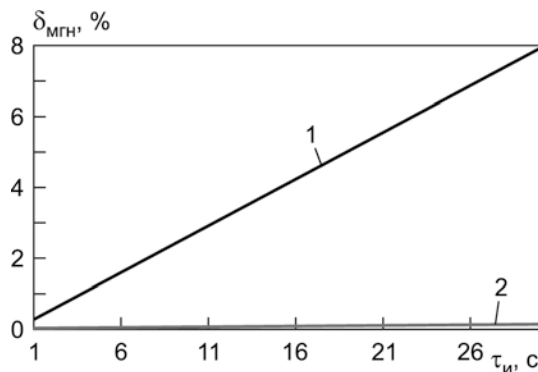


Рис. 3. Сравнение погрешностей обработки экспериментальных данных с использованием методов плоского «мгновенного» источника теплоты (1) и плоского импульсного источника теплоты (2)

При расчётах использованы указанные выше точные значения a , λ , $x_{\text{опт}}$, мощность вычисляли по формуле (16). Найденные по формулам (12), (13) и (17), (18) значения a , λ и $a_{\text{МГН}}$, $\lambda_{\text{МГН}}$ соответственно подставляли в формулы для вычислений погрешностей и их среднеарифметических значений:

$$\delta a = (a - a_T) / a_T; \quad \delta \lambda = (\lambda - \lambda_T) / \lambda_T;$$

$$\delta a_{\text{МГН}} = (a_{\text{МГН}} - a_T) / a_T; \quad \delta \lambda_{\text{МГН}} = (\lambda_{\text{МГН}} - \lambda_T) / \lambda_T;$$

$$\bar{\delta} = (\delta a + \delta \lambda) / 2; \quad \bar{\delta}_{\text{МГН}} = (\delta a_{\text{МГН}} + \delta \lambda_{\text{МГН}}) / 2.$$

На рис. 3 приведены графики зависимостей $\bar{\delta}(\tau_{\text{и}})$, $\bar{\delta}_{\text{МГН}}(\tau_{\text{и}})$. В результате численного моделирования измерений теплофизических характеристик установлено, что при использовании предлагаемого метода плоского импульсного источника теплоты среднеарифметические значения дополнительных погрешностей $\bar{\delta}(\tau_{\text{и}})$, обусловленных влиянием длительности теплового импульса, не превышают 1 %. В случае традиционного метода плоского «мгновенного» источника теплоты [1–4] дополнительные погрешности $\bar{\delta}_{\text{МГН}}(\tau_{\text{и}}) = 5 \dots 8$ % при длительности теплового импульса $17 < \tau_{\text{и}} < 30$ с.

Заключение. При исследовании материала, коэффициенты температуро- и теплопроводности которого неизвестны, необходимо выполнить следующие действия:

- предварительно экспериментально измерить ориентировочные значения $a_{\text{ор}}$, $\lambda_{\text{ор}}$ коэффициентов;
- в соответствии с предлагаемой методикой определить

(уточнить) оптимальные значения параметра $\gamma_{\text{опт}}$ и размеров $x_{a \text{ опт}}$, $x_{\lambda \text{ опт}}$ средней пластины измерительного устройства;

из исследуемого материала изготовить образцы устройства с двумя средними пластинами толщинами $x_{a \text{ опт}}$, $x_{\lambda \text{ опт}}$ либо с одной средней пластиной толщиной $x_{\text{опт}}$;

выполнить измерения и последующую обработку полученных данных и в результате получить значения искомых коэффициентов температуро- и теплопроводности исследуемого материала.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках соглашения № 14.577.21.0214 (ПНИЭР RFMEFI57716X0214).

Литература

1. **Теоретические** и практические основы теплофизических измерений: монография / Под ред. С. В. Пономарева. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 408 с.
2. **Теплофизические** измерения: Учеб. пособие / Под ред. Е. С. Платунова. СПб.: СПбГУНИПТ, 2010. 738 с.
3. **Методы** определения теплопроводности и температуропроводности / Под ред. А. В. Лыкова. М.: Энергия, 1973. 336 с.
4. **Гуров А. В., Пономарев С. В.** Измерение теплофизических свойств теплоизоляционных материалов методом плоского «мгновенного» источника теплоты: монография. Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. 100 с.
5. **Беляев В. П., Беляев М. П., Мищенко С. В., Беляев П. С.** Проектирование измерительных устройств для определения коэффициента диффузии растворителей в тонких изделиях из капиллярно-пористых материалов // Измерительная техника. 2013. № 10. С. 65–71.
6. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
7. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 832 с.
8. **Зайдель А. Н.** Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974. 108 с.
9. **История** метрологии, стандартизации, сертификации и управления качеством: Учебное пособие / Под ред. С. В. Мищенко. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. 112 с.
10. **Теория** погрешностей технических измерений: учеб. пособие / Под ред. В. К. Жукова. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. 180 с.

Дата принятия: 08.10.2018.

Minimizing the errors of heat-insulating materials heat conductivity and thermal diffusivity measuring by the method of plane pulse source of heat

S. V. Ponomarev, E. V. Bulanov, V. O. Bulanova, A. G. Divin

Tambov state technical University, Tambov, Russia, e-mail: svponom@yahoo.com

Mathematical models of the thermal conductivity and the coefficient of thermal diffusivity of heat-insulating materials measurement errors were developed. With their use was proposed the procedure of choosing the optimal value of the heat pulse duration, main structural dimension of the measuring device, conditions for implementing the algorithm for processing the experimental data.

Key words: heat conductivity, thermal diffusivity, measurement, duration of heat pulse, structural size, data processing, optimization.