

погрешности $\pm 0,004$ и $\pm 0,01$ дБ соответственно при ослаблениях до 20 и 80 дБ.

Исследования на трех образцах установок ЭО-01 показали, что при индивидуальной аттестации возможно двух-, трехкратное снижение погрешности измерений относительно нормированных значений и расширение диапазона измеряемых ослаблений более 120 дБ.

Л и т е р а т у р а

1. **Эталонная база ВНИИФТРИ:** Каталог. Менделеево, 2008.

2. **ГОСТ Р 8.851—2013.** ГСИ. Государственная поверочная схема для средств измерений ослабления электромагнитных колебаний в диапазоне частот от 0 до 178 ГГц.

3. **ГОСТ 8.249—77.** ГСИ. Атенюаторы коаксиальные и волноводные измерительные. Методы и средства поверки в диапазоне частот от 100 кГц до 17,44 ГГц.

4. **Widarta A.** Development of Attenuation Standard in Frequency Range of 100 kHz to 10 MHz. KL. MALAYSIA, March 27—30, 2012.

Дата принятия 09.09.2014 г.

532.517.4

Модифицированный сдвиговый алгоритм обработки измерительных данных

Д. А. СОЛОДКИЙ, А. В. КИСТОВИЧ

Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, Менделеево, Россия, e-mail: dsolodkiy@vniiftri.ru

Разработан алгоритм выделения полезного сигнала на фоне помех, позволяющий получать необходимую информацию при соотношении сигнал—шум до -15 дБ. Работоспособность алгоритма проверена на ряде модельных и реальных сигналов.

Ключевые слова: отношение сигнал—шум, непараметрический алгоритм.

The algorithm of useful signal separation in presence of background noise permitting to gain the relevant information at signal-noise ratio up to -15 dB is developed. The algorithm efficiency was tested on the model and real signals.

Key words: signal-noise ratio, nonparametric algorithm.

Задача обработки измерительных данных часто затруднена из-за помех, присутствующих в измерительном канале. В случае крайне малых значений отношения сигнал—шум (менее -10 дБ) возникает серьезная проблема выделения полезного сигнала. В данной работе предложен усовершенствованный непараметрический алгоритм [1], позволяющий выявить мелкомасштабные особенности полезного сигнала, недоступные при использовании линейно-сдвигового алгоритма.

Процедура выделения полезного сигнала на фоне шумов состоит в следующем. Пусть принимаемый зашумленный сигнал измеряется в моменты времени t_n , отличающиеся друг от друга на постоянную величину Δt , так что в результате получается последовательность из N равноотстоящих измеренных значений y_n , $n \in [0, N-1]$. Эта последовательность, начиная с некоторого значения m , разбивается на окна длиной $2K+1$, где K — натуральное число. Внутри окна измеренные значения нумеруют индексом $i \in [-K, K]$, причем в середине окна $i = 0$. Окна обозначаются как $s \in [0, P]$, всего окон $P+1$. В итоге некоторое измеренное значение y_j , участвующее в обработке сигнала, можно описать числами (m, s, i) , связанными с j соотношением $j = m + (2s+1)K + i$.

На границах окон задают подлежащие дальнейшему определению значения F_s^m (всего $P+2$ значения), а внутри окна s измеренные значения аппроксимируют функцией вида

$$f_s^m(i) = \delta_s^m i^3 + \gamma_s^m i^2 + \beta_s^m i + \alpha_s^m. \quad (1)$$

Также на границах окон задают граничные условия

$$f_s^m(-K) = F_s^m, \quad f_s^m(K) = F_{s+1}^m. \quad (2)$$

Подстановка (1) в (2) позволяет выразить параметры аппроксимации α_s^m, β_s^m с помощью соотношений

$$\alpha_s^m = (F_{s+1}^m + F_s^m) / 2 - \gamma_s^m K^2, \quad \beta_s^m = (F_{s+1}^m - F_s^m) / (2K) - \delta_s^m K^2$$

и найти окончательный вид функции

$$f_s^m(i) = \delta_s^m i^3 + \gamma_s^m i^2 + \left((F_{s+1}^m - F_s^m) / (2K) - \delta_s^m K^2 \right) i + \left((F_{s+1}^m + F_s^m) / 2 - \gamma_s^m K^2 \right). \quad (3)$$

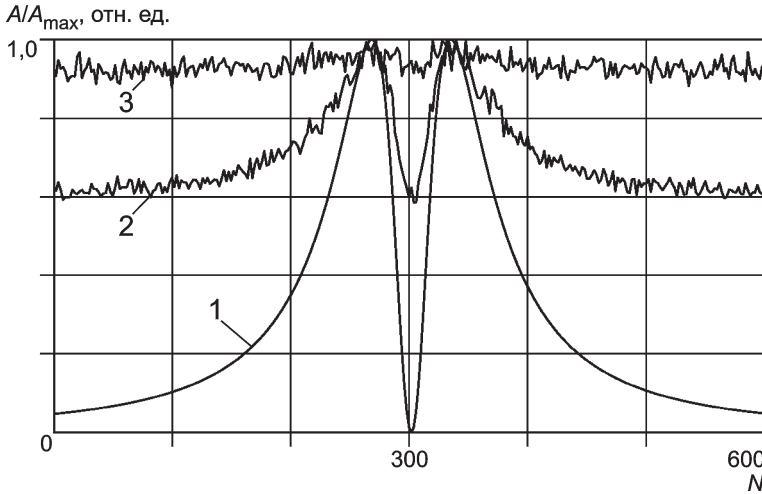


Рис. 1. Идеализированная проходная характеристика:
1—3 — отношение сигнал—шум 0; -5; -15 дБ, соответственно

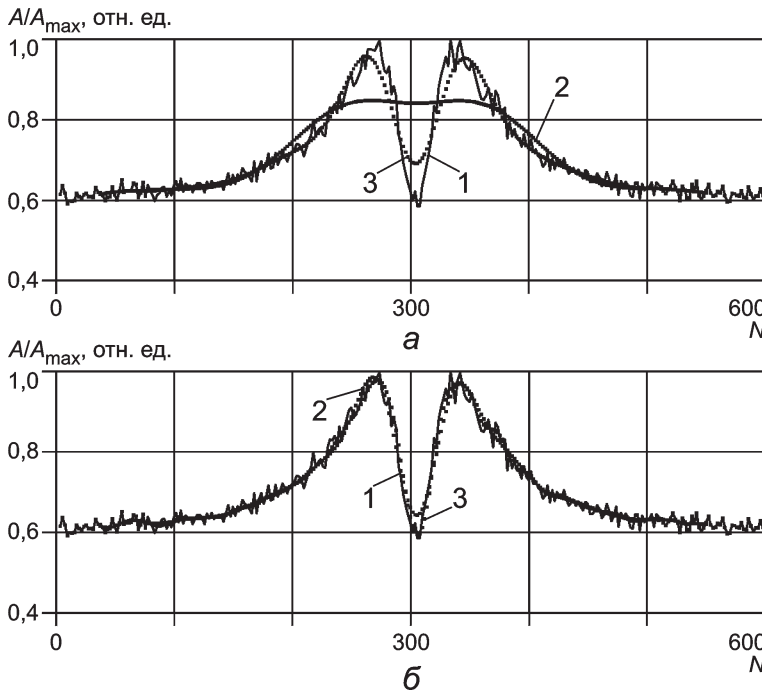


Рис. 2. Результаты обработки сигнала с отношением сигнал—шум -5 дБ с помощью линейного (а) и кубического (б) алгоритмов:
1 — исходный сигнал; 2, 3 — $K = 17$; 7, соответственно

В выражении (3) неизвестные F_s^m , γ_s^m , δ_s^m выбирают таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала, представляющего сумму квадратов отклонений значений аппроксимирующей функции от измерительных данных по всем окнам:

$$\Phi_m = \sum_{s=0}^P \sum_{i=-K}^K \left(f_s^m(i) - y[m + (2s+1)K + i] \right)^2 - \sum_{s=1}^P \left(F_s^m - y[m + 2sK] \right)^2. \quad (4)$$

Минимум функционала (4) достигается при выполнении условий

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial F_s^m} = 0, n \in [0, P+1]; \quad \frac{\partial \Phi_m}{\partial \gamma_n^m} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial \delta_n^m} = 0, n \in [0, P]. \quad (5)$$

Соблюдение условий (5) приводит к системе уравнений для искомых величин F_s^m , γ_s^m , δ_s^m , которая после исключения из нее γ_s^m , δ_s^m приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} AF_0^m + BF_1^m &= \sum_{i=-K}^K D_i^- y[m + K + i]; \\ BF_{s-1}^m + 2(A-1)F_s^m + BF_{s+1}^m &= \\ &= \sum_{i=-K}^K D_i^+ y[m + (2s-1)K + i] + \\ &+ \sum_{i=-K}^K D_i^- y[m + (2s+1)K + i] - 2y[m + 2sK], s \in [1, P]; \\ BF_P^m + AF_{P+1}^m &= \sum_{i=-K}^K D_i^+ y[m + (2P+1)K + i]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь

$$A = \frac{(K+1)(2K+1)(2K+3)(4K+1)(4K^2+2K+3)}{15K(4K^2+5)(4K^2+1)};$$

$$B = \frac{(K+1)(2K+1)(2K+3)(K-1)(2K-1)(2K-3)}{15K(4K^2+5)(4K^2+1)};$$

$$D_i^\pm = 1 \pm \frac{i}{K} \mp \left(1 - \frac{i^2}{K^2} \right) \left(d_3 \frac{i}{K} \pm d_2 \right), d_2 = \frac{5K^2}{4K^2+1}, d_3 = \frac{7K^2}{4K^2+5}.$$

На основании решений системы (6) величины γ_s^m , δ_s^m определяют как

$$\begin{aligned} \gamma_s^m &= \frac{5(F_{s+1}^m + F_s^m)}{2(4K^2+1)} - \frac{15K}{(4K^2+1)(4K^2-1)} \times \\ &\times \sum_{i=-K}^K \left(1 - \frac{i^2}{K^2} \right) y[m + (2s+1)K + i]; \\ \delta_s^m &= \frac{7(F_{s+1}^m - F_s^m)}{2K(4K^2+5)} - \frac{105K}{(K^2-1)(4K^2+5)(4K^2-1)} \times \\ &\times \sum_{i=-K}^K i \left(1 - \frac{i^2}{K^2} \right) y[m + (2s+1)K + i]. \end{aligned} \quad (7)$$

Вид полученных соотношений (7), а именно зависимость γ_s^m , δ_s^m от F_s^m , F_{s+1}^m , указывает на математическую некорректность условий

$$\frac{\partial \Phi_m}{\partial \gamma_n^m} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial \delta_n^m} = 0 \quad (8)$$

в определении минимума (см. (5)) используемого функционала (4). В то же время приводимое далее аналитическое обоснование алгоритма, выполненное на корректной основе, когда независимыми варьируемыми переменными являются только величины F_s^m , показывает, что формальное использование условий (8) действительно приводит к минимизации функционала. В этом можно убедиться, подставив (7) в (4) с последующим варьированием только F_s^m .

Представим систему уравнений (6) для величин F_s^m в матричном виде

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ B & 2(A-1) & B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B & 2(A-1) & B & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2(A-1) & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & B & A \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} F_0^m \\ F_1^m \\ F_2^m \\ \dots \\ F_{P-1}^m \\ F_P^m \\ F_{P+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0^m \\ C_1^m \\ C_2^m \\ \dots \\ C_{P-1}^m \\ C_P^m \\ C_{P+1}^m \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где C_s^m — правые части уравнений (6).

Матрица (9) трехдиагональная со строгим преобладанием главной диагонали при $K \geq 1$, что обуславливает решение системы (6) и получение значений F_s^m . Затем

на основании (7) вычисляют γ_s^m, δ_s^m . В итоге находят аппроксимирующие функции $f_s^m(i)$ согласно (3).

Описанная процедура — один элементарный акт обработки измерительных данных. После этого значение m увеличивается на 1 и элементарный акт повторяется. Все последующие акты применяют также к исходной последовательности данных y_n , но для различных значений начальной точки $m \in [m^*, m^* + 2K - 1]$, где m^* — номер точки, с которой началась обработка данных. Таким образом, формируется набор из $2K$ аппроксимирующих функций, усреднение которых дает окончательный результат для сглаживающей функции:

$$f(j) = \frac{1}{2K} \sum_{m=m^*}^{m^*+2K-1} f_s^m(i), \quad j = m^* + (2s+1)K + i.$$

$A/A_{\max}$, отн. ед.

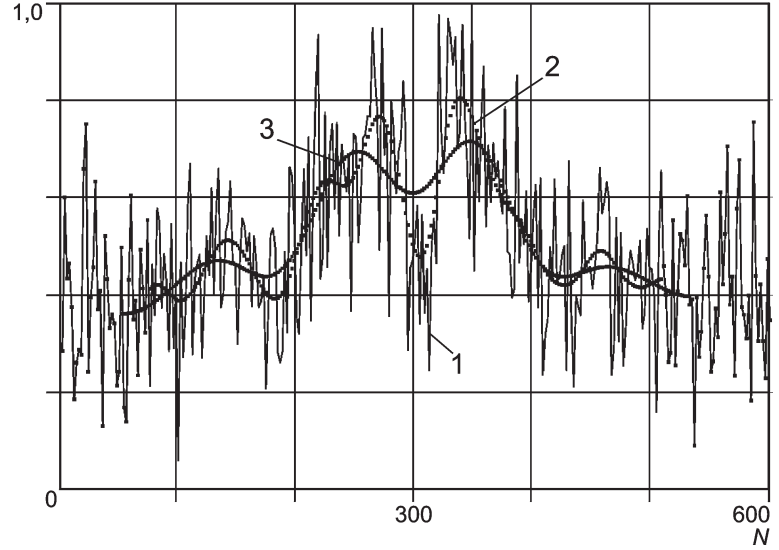


Рис. 3. Результаты обработки исходного сигнала с отношением сигнал—шум -15 дБ (1) с помощью кубического (2, $K = 17$) и линейного (3, $K = 11$) алгоритмов

$A/A_{\max}$, отн. ед.

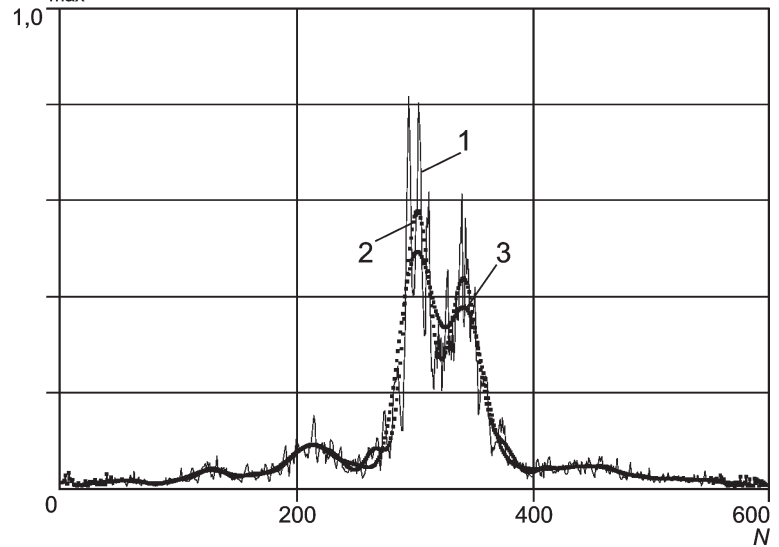


Рис. 4. Результаты обработки реального сигнала с неизвестным отношением сигнал—шум (1) с помощью кубического (2, $K = 20$) и линейного (3, $K = 10$) алгоритмов

Так как точки y_n левого $n \in [m^*, m^* + 2K - 1]$ и правого $n \in [m^* + 2(P+1)K, m^* + 2(P+1)K + 2K - 1]$ краев реализации участвуют в меньшем количестве элементарных актов, чем внутренние точки, то полное сглаживание имеет силу для отсчетов, определяемых индексом $j = m^* + (2s+1)K, i \in [-K, K], s \in [1, P-1]$.

Для полного завершения алгоритма необходимо определить количество окон, т. е. $P+1$. Поскольку при выполнении элементарных актов последовательные сдвиги аппроксимирующей кривой вправо по оси отсчетов данных приводят к тому, что длина обрабатываемой реализации состав-

ляет $P+2$ окна, то искомая величина определяется соотношением

$$P+1 = [(N - m^* - 1)/(2K)] - 1,$$

где квадратные скобки означают округление до ближайшего меньшего целого.

Представленный алгоритм асимметричен, так как сглаживающий проход осуществляется слева направо. Для его симметризации проводится точно такой же проход справа налево, а затем результаты двух проходов усредняют.

Если в представленном алгоритме принять $\delta_s^m = d_3 = 0$, то реализуется квадратичный сдвиговой алгоритм. Если же $\delta_s^m = \gamma_s^m = 0$, $d_3 = d_2 = 0$, то это линейный сдвиговой алгоритм [1]. После использования линейного сдвигового алгоритма в ряде случаев возникает необходимость в дополнительном сглаживании результатов обработки с помощью кубических сплайнов. Результаты практического применения предлагаемого модифицированного алгоритма при кубической аппроксимации функции $f_s^m(i)$ показали, что в этом случае дополнительного сглаживания не требуется.

Аналитическое обоснование метода. Пусть имеется бесконечная реализация обрабатываемого сигнала $y(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, его произвольно разбиваем на отрезки длиной $2\Delta T$. Нумерация отрезков определяется символом s , причем отрезок $s = 0$ заканчивается в момент времени t_0 . Внутри отрезков вводим локальное время $\tau \in [-\Delta T, \Delta T]$, отсчитываемое от центра каждого отрезка, тогда абсолютное время t определим как $t = t_0 + (2s-1)\Delta T + \tau$.

Аппроксимирующий сигнал внутри отрезка s зададим функцией

$$\varphi_s(\tau) = \delta_s \tau^3 + \gamma_s \tau^2 + \beta_s \tau + \alpha_s. \quad (10)$$

Изначально неизвестные величины F_s на границах отрезков связаны с аппроксимирующим сигналом φ_s граничными условиями

$$F_{s-1} = \varphi_s|_{\tau=-\Delta T}; \quad F_s = \varphi_s|_{\tau=\Delta T}. \quad (11)$$

После подстановки (10) в (11) и последующего исключения величин α_s, β_s выражение (10) примет вид

$$\varphi_s(\tau) = \delta_s \tau^3 + \gamma_s \tau^2 + \left(\frac{F_s - F_{s-1}}{2\Delta T} - \delta_s \Delta T^2 \right) \tau + \frac{F_s + F_{s-1}}{2} - \gamma_s \Delta T^2. \quad (12)$$

Предлагаемый функционал имеет вид

$$\Phi = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \int_{-\Delta T}^{\Delta T} (\varphi_s(\tau) - y_s(\tau))^2 d\tau, \\ y_s(\tau) = y[t_0 + (2s-1)\Delta T + \tau]. \quad (13)$$

Минимум функционала (13) определяется только соотношениями

$$\partial \Phi / \partial F_n = 0, \quad n \in (-\infty, +\infty), \quad (14)$$

так как свободными варьируемыми параметрами являются исключительно значения $\{F_n\}$.

Подставив (13) в (14), получим бесконечную систему уравнений

$$\int_{-\Delta T}^{\Delta T} \left(1 + \frac{\tau}{\Delta T} \right) (\varphi_n(\tau) - y_n(\tau)) d\tau + \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta T} \right) (\varphi_{n+1}(\tau) - y_{n+1}(\tau)) d\tau + \\ + 2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \delta_s}{\partial F_n} \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \tau (\tau^2 - \Delta T^2) (\varphi_s(\tau) - y_s(\tau)) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\partial \gamma_s}{\partial F_n} \int_{-\Delta T}^{\Delta T} (\tau^2 - \Delta T^2) (\varphi_s(\tau) - y_s(\tau)) d\tau \right] = 0, \quad n \in (-\infty, +\infty). \quad (15)$$

После подстановки (12) в (15) и вычисления интегралов

$$\int_{-\Delta T}^{\Delta T} (1 + \tau / \Delta T) \varphi_n(\tau) d\tau; \quad \int_{-\Delta T}^{\Delta T} (1 - \tau / \Delta T) \varphi_{n+1}(\tau) d\tau,$$

система уравнений, обеспечивающих искомый минимум функционала (13), примет вид

$$\frac{2}{3} (F_{n-1} + 4F_n + F_{n+1}) \Delta T - \frac{4}{3} (\gamma_n + \gamma_{n+1}) \Delta T^3 - \frac{4}{15} (\delta_n - \delta_{n+1}) \Delta T^4 + \\ + 2 \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \delta_s}{\partial F_n} \left(\frac{16}{105} \delta_s \Delta T^7 - \frac{2}{15} (F_s - F_{s-1}) \Delta T^4 - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \tau (\tau^2 - \Delta T^2) y_s(\tau) d\tau \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \gamma_s}{\partial F_n} \left(\frac{16}{15} \gamma_s \Delta T^5 - \frac{2}{3} (F_s + F_{s-1}) \Delta T^3 - \int_{-\Delta T}^{\Delta T} (\tau^2 - \Delta T^2) y_s(\tau) d\tau \right) \right] = \\ = \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \left(1 + \frac{\tau}{\Delta T} \right) y_n(\tau) d\tau + \int_{-\Delta T}^{\Delta T} \left(1 - \frac{\tau}{\Delta T} \right) y_{n+1}(\tau) d\tau, \quad n \in (-\infty, +\infty). \quad (16)$$

Построить решение системы (16) в самом общем виде крайне затруднительно, но один из способов удовлетворить ей — предположить

$$\delta_n = \frac{7}{8\Delta T^3} \left[F_n - F_{n-1} + \frac{15}{2} \int_{-1}^1 x(x^2 - 1) y_n(x) dx \right];$$

$$\gamma_n = \frac{5}{8\Delta T^2} \left[F_n + F_{n-1} + \frac{3}{2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1) y_n(x) dx \right], \quad (17)$$

где $y_n(x) = y(t_0 + (2n-1+x)\Delta T)$.

В этом случае система (16) с учетом (17) после некоторых вычислений редуцируется к виду

$$F_{n-1} + 8F_n + F_{n+1} = 60 \int_{-1}^1 (1 - 7|x| + 13x^2 - 7|x|^3) y(t_0 + 2(n+x)\Delta T) = U_n. \quad (18)$$

Выражение (7) переходит в (17) при бесконечной частоте дискретизации измерительного сигнала. Таким образом, в общем случае некорректные операции (8) при определении минимума функционала (4) имеют формальное математическое доказательство, полученное на строгой аналитической основе.

Для окончательного обоснования предлагаемого метода необходимо построить решение бесконечной системы уравнений (18), подстановка которых в правые части соотношений (17) однозначно определит коэффициенты δ_n, γ_n .

В самом общем случае бесконечная система уравнений вида $F_{n-1} + \kappa F_n + F_{n+1} = U_n$, $|\kappa| \neq 2$ имеет решение

$$F_n = a_0 U_n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (U_{n-k} + U_{n+k});$$

$$a_0 = (\kappa^2 - 4)^{-1/2}; \quad a_k = (-1)^{k+1} (\lambda_k - a_0 \mu_k) / 2;$$

$$\lambda_k = \kappa^{k-1} \sum_{j=0}^{[(k-1)/2]} (-1)^j \frac{(k-j-1)!}{j!(k-2j-1)!} \kappa^{-2j},$$

$$\mu_k = k \kappa^k \sum_{j=0}^{[k/2]} (-1)^j \frac{(k-j-1)!}{j!(k-2j)!} \kappa^{-2j}.$$

Подставив полученное решение в (17), определим все величины, необходимые при реализации алгоритма, и таким образом завершим его аналитическое обоснование.

Работоспособность предложенного алгоритма исследована на модельных и реальных сигналах.

На рис. 1 представлены численные модели идеализированной проходной характеристики и ее же в присутствии шума. Все графики нормированы на собственное максимальное значение. Результаты обработки сигнала при отношении сигнал—шум -5 дБ с помощью линейного и кубического алгоритмов для значений полуширины окна $K = 17$; 7 показаны на рис. 2, а, б, соответственно. Из представленных графиков следует, что результаты работы линейного алгоритма существенно зависят от выбора K . Кубический алгоритм позволяет точнее отслеживать провал проходной характеристики, а также более устойчив по отношению к вариациям ширины окна обработки данных. На рис. 3 приведены результаты обработки сигнала при отношении сигнал—шум -15 дБ с применением кубического и линейного алгоритмов. Из графиков следует, что кубический алгоритм имеет преимущество в области центра проходной характеристики, а линейный — на ее концах. На рис. 4 показаны результаты обработки реального измерительного сигнала (при неизвестном отношении сигнал—шум) с помощью кубического и линейного алгоритмов. Полученные данные показывают, что оба алгоритма позволяют выделить проходную характеристику и дают ожидаемый минимум в ее центре, тогда как в зашумленном сигнале присутствует ярко выраженный локальный максимум.

Опробование предложенных алгоритмов доказало их работоспособность на модельных и реальных сигналах. Развитие сдвигового алгоритма предполагает последовательную обработку одного и того же сигнала при разных значениях полуширины окна K с дальнейшим усреднением получаемых результатов. Машинная реализация подобного подхода приводит к естественному переходу к параллельным вычислениям на современной технологии CUDA.

Л и т е р а т у р а

1. **Беляев В. С. и др.** Линейно-сдвиговой алгоритм выделения нестационарного сигнала на фоне стационарной помехи // Измерительная техника. 1997. № 3. С. 45—47; **Belyaev V. S. et al.** Linear shift algorithm for detecting nonstationary signals on the back-ground of stationary noise // Measurement Techniques. 1997. V. 40. N. 3. P. 45—47.

Дата принятия 15.09.2014 г.