

11. IEC 60904-3:2008. Photovoltaic devices. Pt. 3. Measurement principles for terrestrial photovoltaic (PV) solar devices with reference spectral irradiance data.

12. IEC 60891:2009. Photovoltaic devices — Procedures for temperature and irradiance corrections to measured I-V characteristics of crystalline silicon photovoltaic devices.

13. ISO/IEC Guide 98-3:2008. Uncertainty of measurement: Pt. 3. Guide to the expression of uncertainty in measurement.

14. Kaoru Ishikawa. Guide to Quality Control (Industrial engineering & technology). Tokyo: Asian Productivity Org. 1976.

15. Пономарев С. В и др. Управление качеством продукции. Инструменты и методы менеджмента качества: Учеб. пособие. М.: РИА «Стандарты и качество», 2005.

16. Руководство по выражению неопределенности измерения / Пер. с англ. СПб.: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999.

17. Luque A., Hegedus S. Handbook of Photovoltaic Science and Engineering. N.Y.: John Wiley & Sons, 2003.

Дата принятия 12.08.2013 г.

620.1.08

Оценка соответствия требованию на допуск при неопределенности измерений и неизвестных глобальных рисках

А. В. КОШУЛЯН, В. П. МАЛАЙЧУК

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара, Днепропетровск, Украина,
e-mail: a.koshulyan@gmail.com

Рассмотрены несколько стратегий рационального выбора границ приемки для случая неопределенности измерений и при неизвестных глобальных рисках потребителя и производителя. Приведены приближенные формулы для вычисления границ приемки.

Ключевые слова: допуск, качество, соответствие, приемка, риск.

The several strategies of rational selection of acceptance limits for the case of measurement uncertainty and the unknown consumer and producer global risks are considered. The approximate equations for calculation of acceptance limits are presented.

Key words: tolerance, quality, conformance, acceptance, risk.

Рассмотрим задачу оценки соответствия требованию на допуск, который задан нижней T_L и верхней T_U границами и определяет допускаемый интервал значений для некоторого параметра изделий (объектов) серийного производства. Ограничимся случаем, когда решения о соответствии требованию опираются на измерения как на основной источник информации. Поскольку решения о состоянии объектов принимаются по результатам измерений их параметров, и для этих измерений характерна неопределенность, то решения могут быть ошибочными, если, во-первых, объект, принятый как соответствующий, на самом деле не отвечает предъявляемому требованию и, во-вторых, объект, принятый как несоответствующий требованию, в действительности ему со-

ответствует. Вероятности ошибочных решений называют глобальными рисками потребителя и производителя.

При оценке соответствия одним из способов учета неопределенности измерений и вызванных ею рисков является установка, так называемых, зон безопасности w_L и w_U (рис. 1). Они определяют интервал приемки A , который может быть как уже (рис. 1, а), так и шире (рис. 1, б) интервала допуска T , что зависит от решаемой задачи. Если измеренное значение попадает в интервал приемки, то принимается решение о соответствии объекта заданному требованию, иначе — о несоответствии.

Существует два основных подхода к установке зон безопасности. Первый нашел отражение в стандартах [1, 2] и предполагает размещение внутри интервала допуска зон безопасности, ширина которых фиксирована и равна расширенной неопределенности U . Второй подход рассмотрен в [3, 4] и подразумевает установку зон безопасности с учетом возможных рисков производителя и потребителя. Этот подход обладает большей гибкостью по сравнению с первым, поскольку позволяет управлять ошибочными решениями путем выбора необходимой ширины зоны безопасности.

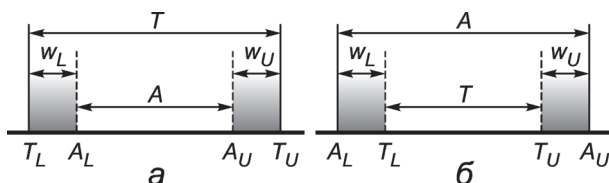


Рис. 1. Интервалы допуска T и приемки A :

а — $A < T$; б — $A > T$

Следует заметить, что способы определения границ приемки в [3, 4] основаны на предположении, что либо производитель и потребитель договорились о конкретных значениях глобальных рисков, либо для объектов задана пороговая апостериорная вероятность соответствия требованию на допуск, которой они должны отвечать. Поэтому актуальна задача рационального определения границ приемки для случая, когда глобальные риски неизвестны. Кроме того, представляет интерес получение формул, которые можно использовать для приближенного вычисления границ приемки. Ниже изложено решение этих двух задач, использованы основные обозначения и понятия, принятые в [3, 4].

Вероятности ошибочных и правильных решений. Согласно [3] измеряемая величина Y рассматривается как случайная с возможным значением η . Выход измерительной системы представляет другую случайную величину Y_m с возможным значением η_m (результат измерения). Возможное значение η характеризуется априорной плотностью вероятности $g_0(\eta|I)$, форма которой не зависит от измерительной системы, а определяется исключительно априорной информацией I . Все плотности вероятности и соответствующие вероятности правильных и ошибочных решений являются условными, так как они зависят от имеющейся информации I . Поэтому далее такая зависимость от I не указывается.

Наблюдаемые значения на выходе измерительной системы при известном значении на входе $Y = \eta$ подчиняются условному распределению с плотностью $h(\eta_m|\eta)$. Согласно теореме Байеса апостериорная плотность определяется как

$$g(\eta|\eta_m) = g_0(\eta)h(\eta_m|\eta)/h_0(\eta_m),$$

где $h_0(\eta_m)$ — плотность вероятности Y_m [3].

Совместное появление η , η_m описывается двумерной плотностью вероятности

$$f(\eta, \eta_m) = g_0(\eta)h(\eta_m|\eta) = h_0(\eta_m)g(\eta|\eta_m).$$

Обозначим $C = [T_L, T_U]$ — множество значений внутри интервала допуска и $\tilde{C}$ вне его. Аналогичные обозначения будем использовать для интервала приемки: $A = [A_L, A_U]$ и $\tilde{A} = (-\infty, A_L) \cup (A_U, \infty)$. Если значение параметра объекта принадлежит полю допуска $\eta \in C$, то его состояние соответствует требованию, а если $\eta \in \tilde{C}$, то не соответствует. Обозначим первое событие C , а второе $\bar{C}$. Если результат измерения параметра объекта попадает в интервал приемки $\eta_m \in A$, то принимается решение о соответствии объекта требованию, иначе, если $\eta_m \in \tilde{A}$, то — о его несоответствии требованию. При этом будем использовать обозначения соответственно C^* , $\bar{C}^*$.

Для случайно выбранного, но не измеренного объекта, априорные вероятности выражаются в виде

$$p(C) = \int_C g_0(\eta) d\eta; \quad p(C^*) = \int_A h_0(\eta_m) d\eta_m,$$

а вероятность сложного события CC^* будет

$$p(CC^*) = \iint_{CA} f(\eta, \eta_m) d\eta d\eta_m.$$

Глобальные риски потребителя R_C и производителя R_P можно определить следующим образом:

$$R_C = p(\bar{C}C^*) = p(C^*) - p(CC^*);$$

$$R_P = p(C\bar{C}^*) = p(C) - p(CC^*). \quad (1)$$

Используя безусловные вероятности (1), выразим условные вероятности ошибочных решений, которые характеризуют долю объектов с неправильно распознанным состоянием:

$$p(C^*|\bar{C}) = p(\bar{C}C^*)/p(\bar{C}); \quad p(\bar{C}^*|C) = p(C\bar{C}^*)/p(C), \quad (2)$$

где $p(\bar{C}) = 1 - p(C)$ — априорная вероятность несоответствия объекта установленному требованию на допуск.

Апостериорная вероятность соответствия объекта требованию определяется по результату его измерения η_m как [3]:

$$p_C(\eta_m) = p(C|\eta_m) = \int_C g(\eta|\eta_m) d\eta.$$

Приведенными выше вероятностями ошибочных и правильных решений, не изменяя допуск, можно управлять путем установки границ приемки A_L, A_U . Далее рассмотрим вопрос их рационального определения, когда глобальные риски (1) неизвестны.

Оптимальные границы приемки. Глобальные риски зависят от границ приемки: $p(\bar{C}C^*) = p_{\bar{C}C^*}(A_L, A_U)$, $p(C\bar{C}^*) = p_{C\bar{C}^*}(A_L, A_U)$. Поэтому за ошибочные решения можно ввести штраф и сформировать функцию потерь

$$L(A_L, A_U) = C_1 p_{\bar{C}C^*}(A_L, A_U) + C_2 p_{C\bar{C}^*}(A_L, A_U), \quad (3)$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — стоимости ошибочных решений [5].

Оптимальные границы приемки определяются минимумом функции потерь (3):

$$\{A_L, A_U\} := \arg \min \{L(x_1, x_2)\}.$$

Необходимое условие локального минимума записывается как равенство нулю частных производных функции (3). Используя (1), после вычисления производных функции потерь получаем необходимое условие локального минимума:

$$p_C(A_L) = p_C(A_U) = C_0, \quad (4)$$

где $C_0 = C_2 / (C_1 + C_2)$ — удельная стоимость.

Исследование вторых производных функции потерь (3) показывает, что достаточное условие локального минимума имеет вид

$$p'_c(A_L) > 0 > p'_c(A_U), \quad (5)$$

где штрих обозначает первую производную функции.

Таким образом, для условного локального минимума достаточно, чтобы функция $p_c(\eta_m)$ возрастала в окрестности нижней границы A_L и спадала в окрестности верхней A_U .

Из (4) следует, что физический смысл удельной стоимости C_0 — это вероятность соответствия требованию на допуск для объектов, у которых измеренное значение равно одной из границ приемки.

Если выбрать стоимости ошибочных решений равными, т. е. $C_1 = C_2$, то в этом случае согласно (3) суммарное количество изделий с неверно распознанным состоянием будет минимальным. Этот критерий называется критерием минимума вероятности ошибочных решений (МВО). Поскольку в этом случае $C_0 = 1/2$, объекты, у которых измеренное значение лежит в окрестности одной из границ приемки, почти с равной вероятностью могут как соответствовать требованию на допуск, так и не соответствовать [5].

Выберем стоимость C_1 , равную обратному значению априорной вероятности соответствия, т. е. $C_1 = 1/p(C)$, аналогично для C_2 имеем $C_2 = 1/p(\bar{C})$. Тогда из (1, 2) следует, что

$$L(A_L, A_U) = p_{\bar{C}^*|C}(A_L, A_U) + p_{C^*|\bar{C}}(A_L, A_U),$$

где $p_{\bar{C}^*|C}(A_L, A_U) = p(\bar{C}^*|C)$; $p_{C^*|\bar{C}}(A_L, A_U) = p(C^*|\bar{C})$.

Критерий с такими значениями стоимостей называется критерием минимума условной стоимости ошибочных решений (МУС). Для этого критерия удельная стоимость равна априорной вероятности соответствия требованию: $C_0 = p(C)$. Поэтому, если измеренное значение объекта попадает в интервал приемки, то апостериорная вероятность его соответствия требованию на допуск превышает априорную:

$$p(C|\eta_m, C^*) \geq p(C) \text{ [5].}$$

Рассмотрим случай, когда у законов распределения вероятностей, заданных плотностями вероятности $g_0(\eta)$ и $h(\eta_m|\eta)$, существуют конечные математические ожидания и дисперсии:

$$\mathbb{E}[Y] = y_0, \text{ var}[Y] = u_0^2, \mathbb{E}[Y_m|\eta] = \eta, \text{ var}[Y_m|\eta] = u_m^2.$$

Значение y_0 можно рассматривать как номинальное, а дисперсия u_0^2 характеризует производственный разброс измеряемой величины. Принято, что условное математическое ожидание наблюдаемой величины равно значению измеряемой величины. Дисперсия u_m^2 характеризует измерительную систему [3].

Плотность вероятности для Y_m имеет вид

$$h_0(\eta_m) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta, \eta_m) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} g_0(\eta) h(\eta_m|\eta) d\eta. \quad (6)$$

Из (6) получим $\mathbb{E}[Y_m] = y_0$, $\text{var}[Y_m] = u_{\eta_m}^2 = u_0^2 + u_m^2$; кова-

риацию $\text{cov}[Y, Y_m] = u_0^2$, коэффициент корреляции

$$r = \frac{\text{cov}[Y, Y_m]}{\sqrt{\text{var}[Y] \text{var}[Y_m]}} = \frac{u_0}{u_{\eta_m}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_u^2}},$$

где $\delta_u = u_m/u_0$.

Если $u_0 \gg u_m$, то $\delta_u \approx 0$, $r \approx 1$, тогда $\eta_m \approx \eta$. Если же $u_0 \ll u_m$, то $r \approx 0$ и измеренное значение η_m практически не зависит от значения η измеряемой величины Y .

Нормальное распределение вероятностей. Если $g_0(\eta)$, $h(\eta_m|\eta)$ — нормальные плотности вероятности, то можно показать, что у случайной величины Y_m также нормальная плотность $h_0(\eta_m)$ с математическим ожиданием y_0 и дисперсией $u_{\eta_m}^2$. Апостериорная плотность $g(\eta|\eta_m)$ тоже будет соответствовать нормальному закону распределения вероятностей [3], математическое ожидание и дисперсию которого можно выразить как

$$\mathbb{E}[Y|\eta_m] = y(\eta_m) = \frac{\eta_m u_0^2 + y_0 u_m^2}{u_0^2 + u_m^2} = y_0 + r^2(\eta_m - y_0);$$

$$\text{var}[Y|\eta_m] = u^2 = \frac{u_0^2 u_m^2}{u_0^2 + u_m^2} = (1 - r^2) u_0^2,$$

где $y(\eta_m)$ — функция регрессии; u — ассоциированная стандартная неопределенность.

Выражение для апостериорной вероятности соответствия требованию на допуск для случая нормальных плотностей примет вид

$$p_c(\eta_m) = \Phi\left(\frac{T_U - y(\eta_m)}{u}\right) - \Phi\left(\frac{T_L - y(\eta_m)}{u}\right), \quad (7)$$

$$\text{где } \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-t^2/2) dt.$$

Запишем первую и вторую производные от функции (7):

$$p'_c(\eta_m) = r^2 [g(T_L|\eta_m) - g(T_U|\eta_m)]; \quad (8)$$

$$p''_c(\eta_m) = r \frac{u}{u_m^3} \times$$

$$\times \{g(T_L|\eta_m)[T_L - y(\eta_m)] - g(T_U|\eta_m)[T_U - y(\eta_m)]\}. \quad (9)$$

Используя (8), достаточное условие (5) для случая нормального распределения вероятностей можно представить неравенством

$$y(A_L) < T_C < y(A_U), \quad (10)$$

где $T_C = (T_L + T_U)/2$.

Приравняв (8) к нулю, определим, что $p_c(\eta_m)$ имеет единственную критическую точку η_{mc} , в которой $y(\eta_{mc}) = T_C$, $p_c''(\eta_{mc}) < 0$ (см. (9)). Поскольку также $p_c(-\infty) = p_c(\infty) = 0$, точка η_{mc} соответствует глобальному максимуму функции (3) и, следовательно, достаточное условие (10) выполняется для любых оптимальных решений A_L и A_U .

Максимально возможное значение вероятности соответствия $p_c(\eta_{mc}) = 2\Phi[T/(2u)] - 1$. Поэтому удельную стоимость C_0 нельзя выбрать больше этого значения: $C_0 \leq p_c(\eta_{mc})$. Таким образом, отношение T/u ограничивает область возможных решений.

Приближенные значения границ приемки A_L и A_U можно вычислить, применив логистическую аппроксимацию функции:

$$\Phi(z) \approx \Phi^*(z) = [1 + \exp(-bz)]^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{th}\left(\frac{bz}{2}\right). \quad (11)$$

где $b = 1,702$ — константа аппроксимации [6]; при этом максимальная разность $\Delta\Phi(z) = \Phi(z) - \Phi^*(z)$ не превышает 0,01.

С использованием (11), формула для приближенного вычисления границ приемки примет вид

$$A_{L,U} \approx (1 + \delta_u^2) \left\{ T_C \mp \frac{u}{b} \operatorname{Arch}\left(\frac{1}{C_0} \operatorname{sh}\left[\frac{b}{2} \frac{T}{u}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{b}{2} \frac{T}{u}\right]\right) \right\} - \delta_u^2 y_0, \quad (12)$$

где $\operatorname{Arch}(z) = \ln\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$, $z \geq 1$; $T = T_U - T_L$.

Поскольку область определения функции $\operatorname{Arch}(z)$ — вещественные значения $z \geq 1$, то должно выполняться условие

$$\frac{1}{C_0} \operatorname{sh}\left[\frac{b}{2} \frac{T}{u}\right] - \operatorname{ch}\left[\frac{b}{2} \frac{T}{u}\right] \geq 1,$$

которое можно привести к неравенству $C_0 \leq \operatorname{th}[bT/(4u)]$. Оно эквивалентно полученному ранее неравенству $C_0 \leq p_c(\eta_{mc})$,

так как при логистической аппроксимации $p_c(\eta_{mc}) \approx \operatorname{th}[bT/(4u)]$.

При симметричных границах допуска, когда $y_0 = T_C$, формулу (12) удобно представить в виде

$$\frac{A}{T} \approx (1 + \delta_u^2) \left(b \frac{T}{2u}\right)^{-1} \operatorname{Arch}\left[\frac{1}{C_0} \operatorname{sh}\left(b \frac{T}{2u}\right) - \operatorname{ch}\left(b \frac{T}{2u}\right)\right], \quad (13)$$

где $A = A_U - A_L$ — ширина интервала приемки.

Отношение A/T можно графически исследовать в зависимости от $p(C)$, δ_u , C_0 . Для этого значение T/u в (13) можно вычислить по формуле

$$\frac{T}{u} = 2\Phi^{(-1)}\left(\frac{p(C)+1}{2}\right) \sqrt{1 + \delta_u^2},$$

где $\Phi^{(-1)}(p)$ — квантильная функция, т. е. обратная к $\Phi(z)$.

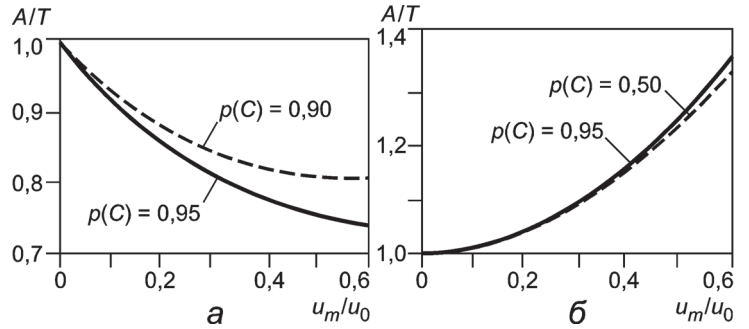


Рис. 2. Зависимость отношения ширины интервала приемки A к ширине интервала допуска T для критериев МУС (а) и МВО (б) при разных значениях априорной вероятности $p(C)$

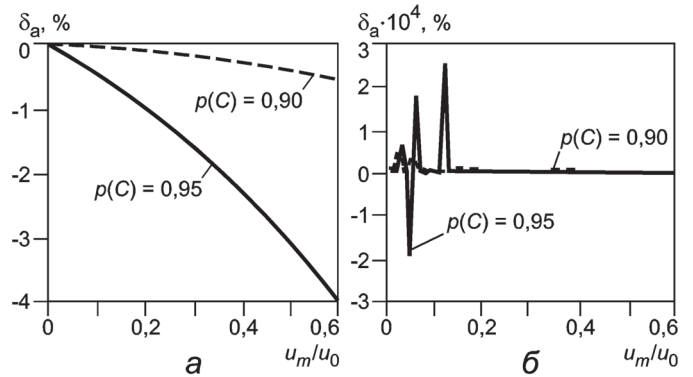


Рис. 3. Зависимости погрешности δ_a для критериев МУС (а) и МВО (б) при разных значениях априорной вероятности $p(C)$

На рис. 2 представлены графики зависимости отношения A/T от $\delta_u = u_m/u_0$ для двух рассмотренных выше критериев и некоторых значений априорной вероятности соответствия $p(C)$.

Из анализа рис. 2 следует, что с возрастанием δ_u для критерия МУС интервал приемки сужается, а для критерия МВО расширяется. Для критерия МУС эта характеристика зависит от вероятности $p(C)$, тогда как для критерия МВО она почти не зависит от этой вероятности, если последняя больше 0,5. Если $C_0 = 0,5$, то значение функции

$$f\left(\frac{T}{u}, C_0\right) = \left(b \frac{T}{2u}\right)^{-1} \operatorname{Arch}\left[\frac{1}{C_0} \operatorname{sh}\left(b \frac{T}{2u}\right) - \operatorname{ch}\left(b \frac{T}{2u}\right)\right]$$

при $T/u > 4$ приблизительно равно единице. Поэтому для критерия МВО из (13) можно получить более простую аппроксимацию

$$A/T \approx 1 + \delta_u^2. \quad (14)$$

На рис. 3 для критерия МУС показан график относительной погрешности аппроксимации δ_a при вычислении A/T с использованием (13), а для критерия МВО — выражения (14). Опорные значения A/T были рассчитаны методом сопряженных градиентов, причем значения, вычисленные по указанным приближенным формулам, использовались как начальные приближения для численного определения минимума функции потерь.

Как показано на рис. 3, а, интервал приемки для критерия МУС, вычисленный по (13), будет меньше, чем при его расчете численными методами. При увеличении $p(C)$, относительная погрешность для этого критерия возрастает. Для критерия МВО при использовании аппроксимации (14) погрешность незначительна (см. рис. 3, б).

На рис. 4 приведены зависимости глобальных рисков от отношения $\delta_u = u_m/u_0$ для критериев МВО и МУС.

Из графиков на рис. 4 следует, что для критерия МВО глобальный риск производителя меньше глобального риска потребителя, в то время как для критерия МУС эта закономерность противоположная.

Выводы. Оценка соответствия изделий с учетом возможных рисков производителя и потребителя по существующим подходам в [3, 4] возможна путем установки границ приемки, только если потребитель и производитель достигли компромисса в значениях своих глобальных рисков.

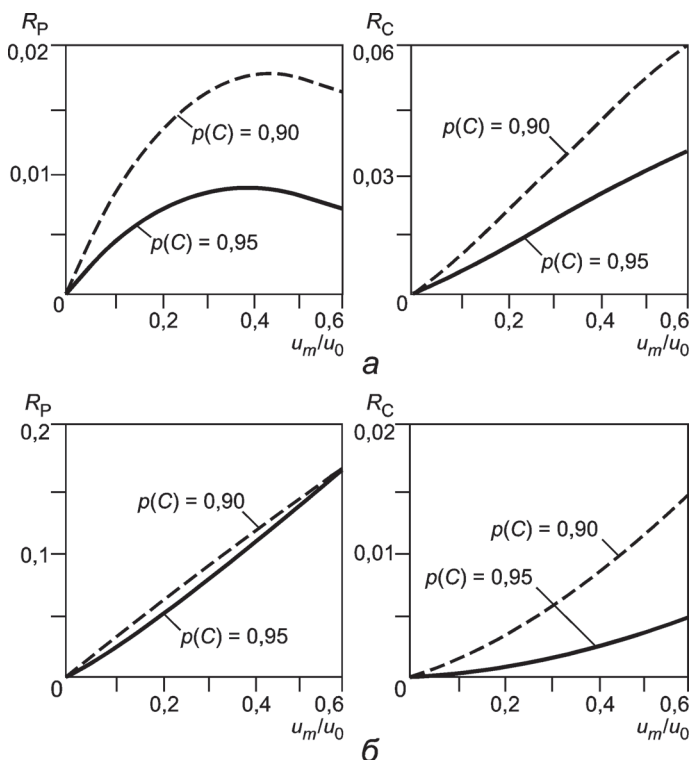


Рис. 4. Глобальные риски производителя R_p и потребителя R_c для критериев МВО (а) и МУС (б)

Границы приемки при неизвестных глобальных рисках предложено определять по критериям минимума вероятности ошибочных решений и минимума условного среднего риска. Применение первого критерия соответствует стратегии нестрогой приемки, когда интервал приемки шире интервала допуска, а второго — строгой, когда интервал приемки уже, чем интервал допуска. По критерию МВО суммарные глобальные риски производителя и потребителя минимальны, однако, у потребителя он выше. Применение критерия МУС гарантирует, что если по измерению объекта принимается решение о его соответствии требованию на допуск, то апостериорная вероятность этого соответствия не меньше, чем априорная. При этом глобальный риск потребителя меньше, чем производителя.

Получены формулы для вычисления приближенных значений границ приемки. Исследованы погрешности предложенной аппроксимации. Если точность аппроксимации неудовлетворительна, то приближенные значения можно использовать в качестве начальных приближений для более точных расчетов вычислительными методами.

Литература

1. ISO 14253-1:1998. GPS. Inspection by measurement of workpieces and measuring equipment. Pt.1. Decision rules for proving conformance or non-conformance with specifications.
2. ГОСТ Р ИСО 10576-1—2006. Руководство по оценке соответствия установленным требованиям. Общие принципы. Ч. 1.
3. JCGM 106:2012. Evaluation of measurement data. The role of measurement uncertainty in conformity assessment.
4. ASME B89.7.4.1—2005. Measurement Uncertainty and Conformance Testing: Risk Analysis.
5. Кошулян А. В., Малайчук В. П., Мозговой А. В. Задача оптимального контроля качества изделий со случайными параметрами // Системные технологии. 2010. № 1(66). С. 91—99.
6. Bowling S. R. e.a. A logistic approximation to the cumulative normal distribution // J. industrial engineering and management. 2009. N 2 (1). P. 114—127.

Дата принятия 22.08.2013 г.