

6. Солдатов В. П. Сканирование изображения объекта в фотоэлектрических датчиках перемещений с многоэлементными приемниками излучения // Измерительная техника. 2015. № 3. С. 26–28.

7. Парвлюсов Ю. Б., Жеболдов Г. В. Обоснование принципа построения стенда для контроля точности геодезических приборов // Известия вузов. Приборостроение. 1996. № 2. С. 20–22.

8. Парвлюсов Ю. Б., Шкаманова М. В. Принципы модульного проектирования метрологических угломерных

стендов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2013. № 5. С. 117–122.

9. Филоненко А. С., Шипицын Н. Г. Практикум по высшей геодезии. М.: Недра, 1965.

10. Парвлюсов Ю. Б., Гончар Б. В. Стенд для метрологической аттестации высокоточных угломерных приборов // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 2000. № 6. С. 157–162.

Дата принятия: 06.04.2017.

ОПТИКО-ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

551.501.793

Использование ненормализованных моментов для определения статистических параметров несферических частиц по их изображениям

Г. П. АРУМОВ, А. В. БУХАРИН

Институт космических исследований РАН, Москва, Россия, e-mail: tumbul@iki.rssi.ru

Рассмотрены две стадии статистической обработки сечений несферических частиц. Сечения получены по изображениям частиц с использованием ненормализованных моментов. Первая стадия основана на связи между ненормализованными моментами первого и второго порядков с коэффициентом пропускания и угловым размером ореола рассеяния оптического излучения вперёд. На второй стадии по ненормализованным моментам до четвёртого порядка с применением логнормального распределения восстановлены параметры распределения размеров частиц по площади поперечных сечений.

Ключевые слова: ненормализованный момент, сечение, несферические частицы, перфорированный экран.

Two stages of processing the nonspherical particles images using the nonnormalized moments of cross-sections measured according to these particles images. The first stage is based on the relationship between the nonnormalized moments of the first and second order with the transmission coefficient and the angular size of the halo from the forward scattering respectively. That relationship is determined by calibration. At the second stage the nonnormalized moments up to fourth order allow to restore the parameters for the distribution of cross-sections, using the lognormal distribution.

Key words: nonnormalized moment, cross section, nonspherical particles, perforated screen.

Лидар упругого рассеяния предназначен для измерения сигнала обратного рассеяния от распространяющегося в среде пучка оптического излучения [1]. Разработка методов измерения, позволяющих связать параметры сигнала и частиц (размеры и концентрацию) рассеивающей среды, является проблемой для метрологии. Для контактных методов [2], базирующихся на принципах светорассеяния и реализуемых, например, в лазерных анализаторах частиц, определение размеров частиц основано на решении обратной задачи [3] с использованием априорной информации об оптических и геометрических характеристиках сферических частиц (действительная и мнимая части показателя преломления). Для несферических частиц обратная задача является некорректной, поэтому требуется заменить несферические частицы

сплюснутыми или вытянутыми сфероидом [4]. Упомянутые методы можно условно отнести к методологической программе полного восстановления [5]. В рамках этой программы маловероятно выполнение нескольких последовательных калибровок для измерения геометрических параметров частиц (линейных размеров, сечения, объёма). Необходимым условием таких калибровок является разработка средств измерений, позволяющих связать микроструктуру частиц с трансформацией пучка. Тогда не требуется решать некорректную обратную задачу. Подобные методы можно отнести к методологической программе эффективного восстановления с использованием индикатора размера частиц – углового размера ореола пучка в рассеивающей среде [6]. Угловому размеру ореола можно поставить в соответствие эквива-

лентное сечение частиц, что позволяет не привлекать априорную информацию о микроструктуре среды. Отметим, что поле зрения и геометрия пучка могут быть описаны с помощью функции размытия точки. Следовательно, определять угловые размеры ореола пучка оптического излучения при рассеянии вперёд можно как по полю зрения, так и по угловому размеру зондирующего пучка.

Актуальная проблема для метрологии – нахождение параметров распределения частиц по размерам с учётом ширины функции распределения, в качестве которой обычно выбирают логнормальное распределение [6]. Интерес представляют методы, в которых можно разделять обработку сечений на две стадии. Первая стадия – программа эффективного восстановления – позволяет с достаточной точностью связать поперечные сечения частиц с угловым искажением пучка без использования каких-либо гипотез и априорной информации. Вторая стадия – программа полного восстановления – включает априорную информацию о распределении размеров частиц по сечениям.

Перфорированный экран. Базовым экраном является подложка с осаждёнными на ней частицами. Микроструктуру частиц на подложке анализируют по цифровым изображениям экрана. По этим изображениям можно изготовить контрастный экран p -типа в виде плёнки: частицам соответствуют участки с минимальным пропусканием, фону – с максимальным пропусканием.

Экран n -типа создаётся по негативу контрастного экрана, на котором частицам соответствуют пятна с максимальным пропусканием, а фону – с минимальным пропусканием. С экраном n -типа можно сопоставить перфорированный экран, отверстия на его непрозрачном фоне соответствуют изображениям частиц. При прохождении светового пучка через перфорированный экран образуется ореол рассеяния вперёд. Геометрия ореола описывается граничными дифракционными волнами [7]. Согласно принципу Бабинне экран n -типа является эквивалентом экрана p -типа по угловому размеру ореола. Изменяя коэффициент увеличения изображения частиц, можно изменять угловой размер ореола пучка на выходе экрана. Таким образом, перфорированный экран в основном предназначен для создания ореола, являющегося индикатором эквивалентного поперечного размера отверстий. Зная коэффициент увеличения изображения и угловое увеличение пучка на выходе экрана, можно определять эквивалентный размер (сечение) частиц.

Настройка взаимного расположения и оптических параметров приёмного и передающего каналов излучателя позволит создать оптическую схему для измерения угловой трансформации пучка, проходящего через перфорированный экран. В [6] было обосновано приближение

$$z/z_{\text{неп}} = G\sqrt{S_s/S_0}/(\sqrt{S_s/S_0} + 1), \quad (1)$$

где z – длина зондируемой трассы; $z_{\text{неп}}$ – длина трассы, измеренная по перекрытиям полей зрения с зондирующим пучком, в случае равенства углового размера пучка, поля

зрения и углового размера ореола; G – калибровочный коэффициент; $S_s = \pi d_s^2/4$ – площадь эквивалентного поперечного сечения пучка; d_s – диаметр эквивалентного поперечного сечения; $S_0 = \pi d_0^2/4$ – площадь сечения пучка для пятна диаметром d_0 , равному отношению длины волны источника излучения к параметру углового размера пучка.

Выражение (1) связывает статистические характеристики сечений с угловой трансформацией пучка. При $S_s/S_0 \ll 1$ и $S_s/S_0 \gg 1$ параметр $G=1$. При других значениях отношения S_s/S_0 калибровочный коэффициент G определяется по результатам измерений углового размера ореола для стандартных перфорированных экранов. Отверстия такого экрана круглые, имеют заданный радиус и расположены случайным образом. Любые повороты перфорированного экрана вокруг оптической оси приёмного канала дают одинаковое поперечное искажение пучка. Эквивалентная площадь сечения (далее – сечение) S_s выражается через моменты для поперечных сечений S частиц:

$$S_s = E(S^2)/E(S), \quad (2)$$

где $E(S)$, $E(S^2)$ – средняя площадь сечения и квадрат площади сечения.

С учётом найденных значений S_s можно изготовить перфорированный экран с монодисперсными круглыми отверстиями определённого диаметра.

Первая стадия обработки (ненормализованные моменты). Из выражения (2) следует, что эквивалентное сечение S_s зависит от отношения второго и первого моментов функции распределения по сечениям. Определение этих моментов не связано с необходимостью использования какого-либо распределения. Более того, вместо обычных статистических моментов можно применять ненормированные моменты

$$E^k(S^k) = \sum_i S_i^k, \quad (3)$$

где k – порядок моментов; $i=1, 2, 3, \dots, 144$.

Далее эти моменты будем называть ненормализованными. Физический смысл ненормализованного момента первого порядка $E^1(S)$ – пропускание перфорированного экрана. Через ненормализованные моменты первого и второго порядков можно выразить S_s и количество этих сечений N_{21} :

$$S_s = S_{21} = E^2(S^2)/E^1(S); \quad (4)$$

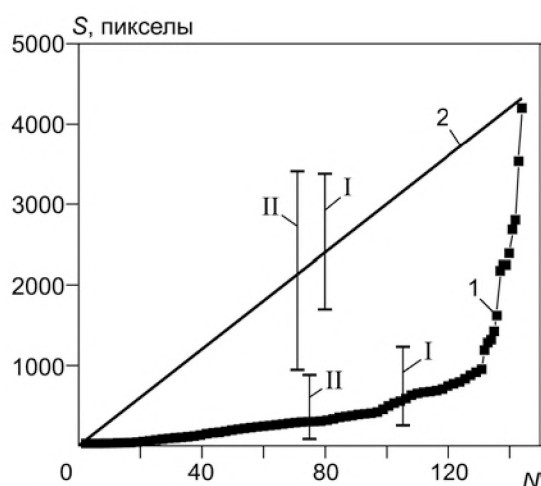
$$N_{21} = E^2(S)/S_s = [E^2(S)]^2 / E^2(S^2),$$

где S_{21} – отношение ненормализованных моментов второго и первого порядков; N_{21} – число эквивалентных сечений, которыми можно упаковать площадь $E^2(S)$; индексы указывают используемые порядки ненормализованных моментов.

Выражения (4) можно обобщить:

$$S_{k,k-1} = E^k(S^k)/E^{k-1}(S^{k-1}); \quad (5)$$

$$N_{k,k-1} = [E^k(S^{k-1})]^k / [E^k(S^k)]^{k-1}.$$



Графики распределения частиц по сечениям в порядке возрастания для реального снимка (1) и равномерного распределения (2); также указаны доверительные интервалы I, II, рассчитанные при использовании ненормализованных моментов и статистических методов, соответственно

Рассмотрим случай монодисперсных частиц: $S_0=S_1=S_2=S_3=\dots=S_k$, $k=N_0$. Тогда из (4) получим $S_{k,k-1}=S_0$ и $N_{k,k-1}=N_0$ для любого k . Если разброс по сечениям частиц незначителен, то $S_{k,k-1}$ медленно увеличивается с увеличением k , при этом число пятен $N_{k,k-1}$ будет медленно уменьшаться. В случае распределения частиц, близкого к монодисперсному, $S_{21}\approx E(S)$. В работе [6] получены снимки сечений 144 частиц. На рисунке представлены распределения сечений частиц в пикселях, расположенные в порядке возрастания, полученные для реального снимка из [6] и равномерного распределения – соответственно 1, 2. По данным кривой 1 вычислены (в пикселях) ненормализованные моменты (3) порядков с первого по четвёртый: $E^2(S)=70130$; $E^2(S^2)=9,641\cdot 10^7$; $E^2(S^3)=2,33\cdot 10^{11}$; $E^2(S^4)=7,153\cdot 10^{14}$. В табл. 1 приведены параметры сечений и числа частиц из (5), которые найдены по ненормализованным моментам.

Произведение $S_{k,k-1}N_{k,k-1}$ представляет суммарное сечение частиц, полученное с использованием ненормализованных моментов порядков k и $k-1$. С увеличением k суммарное сечение уменьшается из-за уменьшения вклада малых сечений.

Эквивалентный экран может содержать $N_{21}=51$ круглых монодисперсных пятен сечениями S_{21} . Этот экран создаёт такие же пропускание и угловое искажение пучка, как и ре-

альный экран. Тогда погрешность расчёта площади S_{21} можно оценить значением $1/N_{21}=2\%$. Эта погрешность возникает из-за неточного покрытия площади $E^2(S)=70130$ пикселей пятнами, сечения которых составляют 1371 пикселей.

Из (5) следует, что на площади пятен $E^2(S^3)$ может уместиться приблизительно 16 площадей частиц S_{32}^3 (см. табл. 1 при $k=3$). Это позволяет определить погрешность расчёта S_{32} , которая составляет $1/N_{32}\approx 6\%$. Можно утверждать, что пятна с размерами более 2417 пикселей будет менее 16 из 144. В этом случае произведение $S_{32}N_{32}=38672$ пикселей, что существенно меньше суммарного сечения при $k=2$. Использование $E^2(S^4)$ приводит к ещё большему уменьшению вклада малых сечений. Действительно, площади частиц $S_{43}=E^2(S^4)/E^2(S^3)=3070$ пикселей укладываются на площади пятна $E^2(S^4)$ (ненормализованный момент четвёртого порядка) приблизительно 8 раз ($N_{43}=8$). Погрешность расчёта S_{43} составляет 13 %, произведение $S_{43}N_{43}=24560$ пикселей (см. табл. 1).

Точность оценки сечения $S_{k,k-1}$ можно увеличить, если перфорированный экран создавать по нескольким снимкам. Действительно, отрезку 32 пиксела на снимке соответствует длина 100 мкм. Сечение 10000 мкм² содержит 1024 пиксела. Ненормализованному моменту первого порядка соответствует 70130 пикселей или суммарное сечение $6,8\cdot 10^5$ мкм² (0,68 мм²) для прозрачных участков перфорированного экрана. Установка такого экрана перед приёмным каналом радиусом 7 мм создаст пропускание $0,68/3,14\cdot 7^2=4,4\cdot 10^{-3}$. Это значение можно увеличить в десятки раз, если использовать накопленные ранее сечения, полученные по изображениям частиц на нескольких снимках. В таком случае повысится точность расчёта $S_{k,k-1}$ и параметров распределения за счёт увеличения выборки. Кроме того, появится возможность для создания стандартных снимков, например, по пропусканию, числу изображений частиц и т. д.

Первый ненормализованный момент стандартных снимков определяется как оптическими методами (по пропусканию перфорированного экрана), так и по цифровым изображениям частиц (по сечениям). Ненормализованный момент второго порядка находится по угловому размеру ореола прошедшего через перфорированный экран светового пучка. Следовательно, указанный момент также можно получить и оптическими методами (по угловому размеру ореола), и с использованием цифровых изображений частиц (по сечениям).

Вторая стадия обработки (использование логнормального распределения в качестве пробного). Основные выражения для логнормального распределения имеют вид

$$f(S)=(S\sigma\sqrt{2\pi})^{-1}\exp[-(\ln S-\ln S_M)^2/(2\sigma^2)];$$

$$E(S^k)=S_M^k\exp(k^2\sigma^2/2), \quad (6)$$

где $k=1, 2, 3$; σ – параметр ширины распределения; S_M – параметр среднего, равный медиане распределения. В работе [6] обычными статистическими методами получены параметры распределения $\sigma=1$ (13 %) и $S_M=320$ (1 %).

Т а б л и ц а 1

Площади $S_{k,k-1}$ и количество $N_{k,k-1}$ сечений, рассчитанные по (5)

k	$S_{k,k-1}$, пиксели	$N_{k,k-1}$	$S_{k,k-1}N_{k,k-1}$, пиксели
2	1371	51	69921
3	2417	16	38672
4	3070	8	24560

Запишем выражения для ненормализованных моментов логнормального распределения:

$$S_{k,k-1} = E^z(S^k) / E^z(S^{k-1}) = S_M \exp(\sigma^2(2k-1)/2);$$

$$N_{k,k-1} = [E^z(S^{k-1})]^k / [E^z(S^k)]^{k-1} = N_0 \exp(-\sigma^2 k(k-1)/2),$$

$$k=1,2,3,\dots$$

Здесь N_0 – возникающая из-за ненормализованных моментов характеристика размера выборки (например, $N_0=144$). Допустим, известны ненормализованные моменты до третьего порядка. Тогда можно оценить параметры ширины распределения σ и среднего S_M как

$$\exp(\sigma_{31}^2) = E^z(S^3)E^z(S) / [E^z(S^2)E^z(S^2)]; \quad (7)$$

$$S_M = S_{21} \exp(-3\sigma_{31}^2/2). \quad (8)$$

Нижний индекс параметра ширины распределения из (7), (8) обозначает порядки 3, 1 используемых в числителе (7) ненормализованных моментов. После обработки выборки из 144 сечений определили $\sigma_{31}=0,75$; $S_M=590$. Полученные параметры распределения с использованием ненормализованных моментов до третьего порядка дают заниженные значения σ и завышенные значения S_M . В данном случае используется один снимок, что не позволяет оценить точность ненормализованных моментов в (7). Для нахождения σ и погрешности $\Delta\sigma$ требуются моменты более высоких порядков. Доверительный интервал I (кривая 1), ограниченный диапазоном от $S_1=S_M \exp(-\sigma_{31})=278$ до $S_2=S_M \exp(\sigma_{31})=1249$ (последний получен при использовании статистических методов), показан на рисунке, откуда следует, что значение параметра среднего S_M , рассчитанное обычными статистическими методами (II, кривая 1), входит в доверительный интервал I (кривая 1), найденный по ненормализованным моментам.

По ненормализованным моментам до четвертого порядка параметр σ может быть вычислен (с учётом (6)) несколькими способами:

$$\exp(2\sigma_{41}^2) = E^z(S^4)E^z(S) / [E^z(S^2)E^z(S^3)]; \quad (9)$$

$$\exp(\sigma_{42}^2) = E^z(S^4)E^z(S^2) / [E^z(S^3)E^z(S^3)]; \quad (10)$$

откуда имеем $\sigma_{41}=0,63$; $\sigma_{42}=0,49$.

Максимальный порядок моментов сечений в числителе (7) равен трём, в (9) – четырём. Однако суммарный порядок в (9) равен пяти, в (10) – шести. В (9), (10) равны суммарные порядки момента в числителе и знаменателе. Это делает выражения (7), (9) независимыми от объема N_0 выборки. Кроме того, параметр ширины распределения σ не зависит от коэффициента увеличения для изображения частиц. Выражения (9), (10) позволяют оценить погрешность.

Расчёт параметра ширины распределения допускает аппроксимацию для сечения, момент которого может соот-

ветствовать первому порядку. Так, $\sigma_{31}-\sigma_{41}=0,12$. Если обозначить σ_2, σ_1 – параметры ширины распределения для сечений, образующих ненормализованные моменты второго порядка, и для всех сечений, соответственно, то можно предположить $\Delta\sigma=\sigma_2-\sigma_{31}\approx\sigma_1-\sigma_2=0,12$. Отсюда следует, что $\sigma=0,99\pm0,12$. Параметр $S_M=315$ определяется по формуле (8), S_{21} – из табл. 1, его погрешность по формуле переноса ошибок (error propagation equation) $\Delta S_M/S_M=3\sigma\Delta\sigma=36\%$. Расчётные значения обоих параметров практически совпадают со значениями, найденными статистическими методами (см. пояснения к формуле (6)).

Представляет интерес использование ненормализованных моментов для определения параметров другого распределения. На рисунке приведён пример, в котором сечения пятен соответствуют арифметической прогрессии ($S_1=30$ пикселей; $S_2=60$ пикселей; ...; $S_{144}=4320$ пикселей) с равномерным распределением (линия 2). Для наглядности изменения площади пятен кратны 30. Для этого распределения среднее квадратическое отклонение составляет 1247 пикселей; $S_M=E(S)=2160$ пикселей; $S_1=913$ пикселей; $S_2=3407$ пикселей. Запишем ненормализованные моменты с первого по четвёртый: $E^z(S)=3,13\cdot10^5$ пикселей; $E^z(S^2)=9,05\cdot10^8$ пикселей; $E^z(S^3)=2,94\cdot10^{12}$ пикселей; $E^z(S^4)=1,02\cdot10^{16}$ пикселей. Использование моментов даёт оценку эквивалентного сечения $S_{21}=2880$ пикселей (1%). В табл. 2 представлены значения параметров сечений $S_{k,k-1}$ и количество $N_{k,k-1}$, найденные по ненормализованным моментам порядка k .

Отметим медленные увеличение $S_{k,k-1}$ и уменьшение $N_{k,k-1}$ с увеличением порядка k . Это делает указанное распределение близким к распределению монодисперсных сечений.

Допустим, найдены моменты до третьего порядка. Тогда из (7), (8) можно получить оценки параметров логнормального распределения $\sigma_{31}=0,34$ и $S_M=2430$. Параметр среднего $E(S)=2160$ пикселей входит в доверительный интервал I линии 2, определённый с использованием ненормализованных моментов до третьего порядка; интервал I находится внутри доверительного интервала II для равномерного распределения (см. рисунок). Границы интервалов, содержащих площади сечений пятен, практически совпадают. Следовательно, найденные по ненормализованным моментам параметры распределения могут применяться как приближенные для описания реального распределения. Тем не менее, по ненормализованным моментам до третьего по-

Т а б л и ц а 2

Площади $S_{k,k-1}$ и количество $N_{k,k-1}$ сечений для равномерного распределения

k	$S_{k,k-1}$, пиксели	$N_{k,k-1}$	$S_{k,k-1}N_{21}$, пиксели
2	2891	108	312228
3	3249	85	276165
4	3469	70	242830

Т а б л и ц а 3
Восстановленные параметры пробного распределения

σ	S_M , пиксeлы	S_1 , пиксeлы	S_2 , пиксeлы
1,00 (13 %)	320 (1,6 %)	118	870
0,75 (σ_{31})	590	278	1249
0,99 (12 %)	315 (36 %)	117	847
0,34 (σ_{31})	2430	1729	3414
0,42 (9 %)	2218 (5 %)	1457	3375

рядка также получены заниженное значение σ и завышенное значение S_M .

Аналогично предыдущему случаю при использовании выражений (9), (10) находим две оценки погрешности параметра σ : $\sigma_{41}=0,3$; $\sigma_{42}=0,26$. Параметр σ для реального распределения аппроксимируем до первого порядка: $\sigma=0,42\pm0,04$ (9 %).

Можно сделать вывод, что значения параметра среднего S_M для пробного и равномерного распределений согласуются. В табл. 3 представлены основные результаты применения ненормализованных моментов для определения параметров логнормального распределения.

В первой строке представлены параметры пробного логнормального распределения, полученные с использованием обычных статистических методов [6], во второй – оценки параметров распределения, полученных только по ненормализованным моментам до третьего порядка. Обратим внимание на заниженное значение $\sigma_{31}=0,75$, и завышенное значение $S_M=590$. Отметим, что ненормализованные моменты до третьего порядка позволяют получить только одну оценку для ширины распределения σ_{31} , что не позволяет оценить погрешность этого параметра. При использовании ненормализованных моментов до четвертого порядка (см. табл. 3, третья строка) можно применить аппроксимацию для оценки ширины распределения и оценить её погрешность.

Результаты применения пробного распределения к равномерному приведены в четвертой и пятой строках табл. 3. Использование логнормального распределения (пятая строка) даёт удовлетворительные результаты для среднего пятая значения сечения и диапазона S_1-S_2 . Равномерное распределение пятен по сечениям порождает неопределённость идентификации функции распределения. При $\sigma=0,42$ искомого распределение может быть как логнормальным, так и равномерным. Для обоих распределений значения средних практически совпадают, а доверительные интервалы существенно отличаются. Следовательно, методы оценки параметров распределения площади сечений для второй стадии обработки не всегда могут быть обоснованы метрологически.

Применение гауссова распределения в качестве пробного для определения статистических параметров $\ln S$, как

это сделано в [6], в данном случае нецелесообразно из-за возможных смещений распределения в область отрицательных значений. Кроме того, устранение искажений гауссова распределения для корректной интерпретации погрешности приводит к необходимости вмешательства в выборку. Отметим, что $\ln S$ не связан с какой-либо физической характеристикой распространяющегося в среде светового пучка.

Заключение. Рассмотрены две стадии статистической обработки сечений частиц, полученных по их изображениям. Первая стадия характеризуется тем, что ненормализованные моменты первого и второго порядка находят с использованием и оптических методов, и цифровых снимков. Ненормализованный момент первого порядка – пропускание перфорированного экрана – определяют по суммарному сечению частиц на снимке. Ненормализованный момент второго порядка зависит от углового размера ореола светового пучка от рассеяния вперёд. Вторая стадия обработки заключается в получении информации о ширине функции распределения частиц по сечениям с использованием логнормального распределения в качестве пробного. Показано, что использование ненормализованных моментов до четвертого порядка позволяет восстановить параметры среднего S_M , совпадающие с соответствующими параметрами, найденными статистическими методами.

Л и т е р а т у р а

1. **Межерис Р.** Лазерное дистанционное зондирование. М.: Мир, 1987.
2. **Heintzenberg, J., Welch R. M.** Retrieval of aerosol size distribution from angular scattering functions: effects of particle composition and shape // Appl. Opt. 1982. V. 21. No. 5. P. 822–830.
3. **Veselovskii I., Kolgotin A., Griaznov V., Muller D., Wandinger U., Whiteman D. N.** Inversion with regularization for the retrieval of tropospheric aerosol parameters from multiwavelength lidar sounding // Appl. Opt. 2002. V. 41. No. 18. P. 3685–3699.
4. **Mishchenko M. I.** Lidar aerosol backscatter measurements: systematic, modeling, and calibration error considerations // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. 2009. V. 110. No. 11. P. 808–832.
5. **Бухарин А. В.** Методологические программы в задаче определения микроструктуры рассеивающих объектов дистанционными методами // Нелинейный мир. 2011. Т. 9. № 6. С. 342–351.
6. **Арумов Г. П., Бухарин А. В., Тюрин А. В.** Использование статистически неоднородных экранов в задаче калибровки лидара по параметрам изображений частиц для приземного слоя атмосферы // Измерительная техника. 2014. № 3. С. 36–40.
7. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. М.: Наука, 1973.

Дата принятия: 06.09.2017.