

№ 5. С. 5–8.

2. **Р 50.2.037–2004.** ГСИ. Измерения гидроакустические. Термины и определения.

3. **Гордиенко В. А.** Векторно-фазовые методы в акустике. М., ФИЗМАТЛИТ, 2007.

4. **Исаев А. Е., Матвеев А. Н., Некрич Г. С., Поликарпов А. М.** Комплексная градуировка приёмника градиента давления с использованием процедуры метода взаимности // Акустический журнал. 2014. № 60. С. 48–55.

5. **Исаев А. Е., Матвеев А. Н., Некрич Г. С., Поликарпов А. М.** Градуировка приёмника градиента давления по полю в отражающем бассейне с применением ЛЧМ сигнала // Акустический журнал. 2013. № 59. С. 773–781.

6. **Исаев А. Е., Матвеев А. Н., Некрич Г. С., Сильвестров С. В.** Эталонные установки для воспроизведения и

передачи единицы колебательной скорости водной среды в диапазоне частот от 5 до 10000 Гц // Вестник Метролога. 2017. № 1. С. 14–15.

7. **ГОСТ 8.381-2009.** ГСИ. Эталоны. Способы выражения точности.

8. **ГОСТ Р 8.736-2011.** ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.

9. **МИ 2083-90.** ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.

10. **ГОСТ Р 54500.3-2011/Руководство ИСО/МЭК 98-3:2008.** Неопределённость измерения. Ч. 3. Руководство по выражению неопределённости измерения.

Дата принятия: 23.05.2017.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

965.539.1.08

Обобщённые расширенные последовательности для интегрально-кодовых систем измерений

Г. А. ФЕДОРОВ¹, С. А. ТЕРЕЩЕНКО²

¹Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва, Россия, e-mail: GAFedorov@mephi.ru

²Национальный исследовательский университет «МИЭТ», Москва, Россия, e-mail: tsa@miee.ru

Предложен новый обширный класс двоичных (0, 1)-последовательностей, включающий бесконечное множество бесконечных множеств обобщённых расширенных последовательностей. Данные последовательности получены путём расширения инверсных расширенных псевдослучайных последовательностей и позволяют создать кодирующие коллиматоры интегрально-кодовых систем измерений пространственных распределений источников излучения с возможностью варьирования среднего пропускания и эффективной реализации радиационно-физического эксперимента при использовании мультиплексных измерений.

Ключевые слова: двоичная последовательность, расширенная последовательность, инверсная последовательность, интегрально-кодовая система измерений, кодирующий коллиматор.

It is offered the new extensive class of binary (0, 1)-sequences including the infinite set of infinite sets of generalized expanded sequences, which are obtained with an expansion of inverted expanded pseudorandom sequences. These sequences allow the construction of coding collimators of integral-code measuring systems for radiation sources space distributions with more considerable possibility for a variation of a coded collimator average transmission and a more effective realization of results of the radiation-physical experiment optimization for multiplexed measurements.

Key words: binary sequence, expanded sequence, inverted sequence, integral-code measuring system, coding collimator.

С начала 1960-х годов для формирования изображений пространственных распределений источников ионизирующего излучения стали применять кодированные апертуры или кодирующие коллиматоры. Такие системы принято называть мультиплексными или интегрально-кодовыми системами измерений (ИКСИ). Первоначально в ИКСИ использовали зонные пластины Френеля [1] и многопин-

хольные коллиматоры со случайным расположением узкодиафрагмированных отверстий (пинголов) [2]. Затем они уступили место более совершенным многопинхольным апертурам с заданным двумерной кодирующей таблицей расположения отверстий [3]. Поиск новых (0, 1)-последовательностей и таблиц для ИКСИ всегда привлекал исследователей [4–6]. Среди найденных апертур выделяют апертуры на

основе одномерных псевдослучайных последовательностей (ПСП) и двумерных кодирующих псевдослучайных таблиц (ПСТ), состоящих из 1 и 0 [7].

Псевдослучайную последовательность удобно определять как строку (v, k, λ) -матрицы-циркулянта, являющейся квадратной $(0, 1)$ -матрицей $\hat{A}$ порядка v и удовлетворяющей условию [8–10]:

$$\hat{A}\hat{A}^T = (k - \lambda)\hat{I} + \lambda\hat{J}, \quad (1)$$

где $\hat{I}$ – знак транспонирования матрицы; $\hat{I}$ – единичная диагональная матрица порядка v ; $\hat{J}$ – квадратная матрица порядка v , все элементы которой равны единице; k, λ – целые числа. При этом k равно количеству единиц, а $(v - k)$ – количеству нулей в каждой строке и каждом столбце (v, k, λ) -матрицы.

Соответственно, матрицу $\hat{A}$, из которой получена ПСП, можно назвать образующей или матрицей плана (планом) эксперимента. На языке теории разностных множеств (v, k, λ) -матрица-циркулянт есть матрица инцидентности циклического совершенного разностного множества, а на языке теории комбинаторных блок-схем – матрица инцидентности симметричной уравновешенной неполной блок-схемы [8, 10]. Необходимым условием существования (v, k, λ) -матрицы является выполнение соотношения

$$\lambda = k(k-1)/(v-1). \quad (2)$$

Заметим, что $(0, 1)$ -матрицы-циркулянты с одной единицей и $(v-1)$ единицами в каждой строке можно отнести к вырожденным (v, k, λ) -матрицам, как формально удовлетворяющим соотношениям (1), (2).

Инверсная матрица, в которой единицы заменены нулями, а нули – единицами, является ассоциированной с любой (v, k, λ) -матрицей. Получившаяся после такого инвертирования матрица является (v', k', λ') -матрицей с параметрами $v' = v$, $k' = v - k$ и $\lambda' = (v - k)(v - k - 1)/(v - 1)$. Поэтому, зная ПСП с $k < v/2$, можно найти ПСП с $k' > v/2$.

Параметры (v, k, λ) -матриц обобщены в табл. 1. Большинство известных псевдослучайных последовательностей объединены в семейства и типы, классификация которых дана в [3, 8, 11–14]. Поэтому повсеместное использование термина *uniformly redundant arrays* (URA), введенного в работе [15] для обозначения апертур, которые построены на основе всего лишь одного из семейств ПСП, не

Т а б л и ц а 1

Параметры (v, k, λ) -матриц

Параметры	Значения параметров
Число +1 в любой строке	k
Число нулей в любой строке	$(v - k)$
$\hat{A}^{-1}$	$[k(k - \lambda)]^{-1}(k\hat{A}^T - \lambda\hat{J})$
$\hat{A}\hat{A}^T$	$(k - \lambda)\hat{I} + \lambda\hat{J}$
$(\hat{A}\hat{A}^T)^{-1}$	$[k^2(k - \lambda)]^{-1}(k^2\hat{I} - \lambda\hat{J})$
$\det(\hat{A}\hat{A}^T)$	$k^2(k - \lambda)^{v-1}$
Собственные значения матрицы $\hat{A}\hat{A}^T$ (кратность)	$k^2, (1)$ $(k - \lambda), (v - 1)$

оправдано.

Для изготовления двумерного кодирующего коллиматора необходима кодирующая ПСТ. Известны следующие способы построения двумерных ПСТ из одномерных ПСП: строочный, диагональный и самоподдерживающийся [11–13]. При этом первые два способа образуют ПСТ размерности $m \times n$ из одной ПСП длины $v = m \times n$, а третий способ образует ПСТ размерности $m \times n$ из двух ПСП с длинами $v_1 = m$, $v_2 = n$.

Первоначально кодирующие коллиматоры использовали для помехоподавления. Затем были изучены их шумоподавляющие свойства, и решена общая задача оптимизации среднего пропускания (k/v) таких приборов для минимизации погрешности, обусловленной квантовой статистикой полезного сигнала и неcodируемым фоном [3, 11].

Дисперсии оценок и критерии оптимальности на классе ПСП. С точки зрения теории планирования эксперимента рассмотренные выше (v, k, λ) -матрицы-циркулянты $\hat{A}$, описывающие функционирование ИКСИ, тоже являются матрицами плана (планами) эксперимента. В соответствии с этой теорией оптимальной матрицей плана $\hat{A}$ будет матрица, в которой достигается минимум выражения для критерия оптимальности на выбранном классе матриц. При этом критерий оптимальности зависит от характеристик ковариационной матрицы оценок.

В теории планирования эксперимента наиболее часто используют критерии D -, A - и E -оптимальности, представляющие соответственно определитель P_D , след P_A и максимальное собственное значение P_E ковариационной матрицы оценок результатов измерений [3, 11–13].

Дисперсии оценок и результаты их возможной оптимизации (минимизации) зависят от схемы измерений и класса матриц, описывающих пропускание кодирующего коллиматора ИКСИ. Эксперимент легко реализуем на классе $(0, 1)$ -матриц.

Рассмотрим критерий P_A планирования эксперимента и дисперсию d_j оценки j -й компоненты пространственного распределения источников излучения. Данные параметры позволяют оптимизировать среднее пропускание кодирующих коллиматоров, построенных на базе (v, k, λ) -матриц [11–13]. Для произвольной матрицы плана эксперимента $\hat{A}$ порядка v запишем уравнения:

$$P_A = \sum_{j=1}^v d_j = \sum_{j=1}^v \left[\left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \left| (\hat{A})_{jn} \right| \sigma_n^2 \right) \sum_{j=1}^v \left((\hat{A}^{-1})_{jj} \right)^2 \right]; \quad (3)$$

$$d_j = \sum_{i=1}^v \left(\sigma_0^2 + \sum_{n=1}^v \left| (\hat{A})_{in} \right| \sigma_n^2 \right) \left((\hat{A}^{-1})_{ji} \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, v, \quad (4)$$

где σ_j^2 , σ_0^2 – дисперсии полезного кодируемого сигнала ($j = 1, 2, \dots, v$) и неcodируемой помехи, соответственно; $(\hat{A})_{jj}$ – ji -й элемент матрицы $\hat{A}$; $(\hat{A}^{-1})_{ji}$ – ji -й элемент обратной матрицы $\hat{A}^{-1}$, $i, j = 1, 2, \dots, v$.

Для (v, k, λ) -матрицы формулы (3), (4) примут соответственно вид

$$P_A = \frac{k^2 - \lambda}{k^2(k - \lambda)} \left(v\sigma_0^2 + k \sum_{j=1}^v \sigma_j^2 \right); \quad (5)$$

$$d_j = \frac{1}{k^2(k - \lambda)} \left[(k^2 - \lambda) \sigma_0^2 + k(k - 2\lambda) \sigma_j^2 + \lambda k \sum_{n=1}^v \sigma_n^2 \right], \quad j = 1, 2, \dots, v. \quad (6)$$

Т а б л и ц а 2

Параметры (0, 1)-матрицы $\hat{A}_V$

Параметры	Значения параметров
Количество вставляемых нулей	b
Порядок V матрицы $\hat{A}_V$	$V = v(b+1)$
Число +1 в любой строке матрицы $\hat{A}_V$	k
Число нулей в любой строке матрицы $\hat{A}_V$	$V - k = v(b+1) - k$
$\hat{A}_V$	$\hat{A}_V = \hat{A} \otimes \hat{I}_{b+1}$
$\hat{A}_V^{-1}$	$\hat{A}_V^{-1} = \hat{A}_V^{-1} \otimes \hat{I}_{b+1} = (k \hat{A}^{-1} \otimes \hat{I}_{b+1} - \lambda \hat{J}_v \otimes \hat{I}_{b+1}) / (k(k-\lambda))$
$\hat{A}_V \hat{A}_V^T$	$\hat{A}_V \hat{A}_V^T = [(k-\lambda) \hat{I}_v + \lambda \hat{J}_v] \otimes \hat{I}_{b+1} = (k-\lambda) \hat{I}_v + \lambda \hat{J}_v \otimes \hat{I}_{b+1}$
$(\hat{A}_V \hat{A}_V^T)^{-1}$	$(\hat{A}_V \hat{A}_V^T)^{-1} = [(k-\lambda) \hat{I}_v + \lambda \hat{J}_v]^{-1} \otimes \hat{I}_{b+1} = (k^2 \hat{I}_v - \lambda \hat{J}_v \otimes \hat{I}_{b+1}) / k^2 (k-\lambda)$
$\det(\hat{A}_V \hat{A}_V^T)$	$[k^2 (k-\lambda)^{v-1}]^{b+1}$
Собственные значения матрицы $\hat{A}_V \hat{A}_V^T$ (кратность)	$k^2, (b+1)$ $(k-\lambda), ((v-1)(b+1))$

Примечание: $\hat{A} \otimes \hat{B}$ – прямое произведение матриц $\hat{A}, \hat{B}$; $\hat{I}_n$ – единичная диагональная матрица порядка n .

Формулы (5), (6) позволяют с учётом (2) найти оптимальное количество пинхолов $k_{\text{опт}}$ в зависимости от v, σ_0^2 и σ_j^2 ($j=1, 2, \dots, v$). Заметим, что оптимальные значения лежат в диапазоне $1 \leq k_{\text{опт}} \leq (v+1)/2$ [3, 11–13].

Большой интерес представляют фокусирующие (томографические) свойства многопинхольных кодирующих коллиматоров [3, 11–13], позволяющие визуализировать пространственное распределение трёхмерных источников излучения без вращения массивной детектирующей системы вокруг объекта исследования, что технически не всегда возможно.

Выполненные исследования показали, что успешное практическое решение таких задач как планирование радиационно-физического эксперимента и планарная эмиссионная томография во многом ограничено небольшим набором существующих ПСП и ПСТ требуемой размерности с коэффициентом пропускания, необходимым для построения выбранного кодирующего коллиматора.

Расширенные псевдослучайные последовательности. В [16] был предложен класс (0, 1)-последовательностей, названных расширенными псевдослучайными последовательностями (РПСП), а также класс построенных на их основе расширенных псевдослучайных таблиц (РПСТ), определяющих свойства новых кодирующих коллиматоров. Алгоритм построения РПСП заключается в добавлении после каждого элемента ПСП одинакового числа нулей b ($b=1, 2, \dots$).

Таким образом, с каждой исходной ПСП можно сопоставить бесконечное семейство расширенных последовательностей длины $V=v(b+1)$ $b=1, 2, 3, \dots$, причём количество единиц в полученных последовательностях каждого семейства будет постоянным и равным количеству единиц в исходной ПСП. Расширенную последовательность, образованную вставлением b нулей, называют РПСП порядка b . Применение РПСП во многом решает отмеченную проблему ограниченного числа пригодных для построения кодирующих коллиматоров ПСТ.

Следует отметить, что РПСП можно образовывать как из классических ПСП с количеством единиц k в диапазоне $1 \leq k \leq (v-1)/2$, так и из инверсных ПСП, соответствующих ассоциированным (v, k', λ') -матрицам-циркулянтам с $(v-1)/2 < k' \leq v-1$. При этом популярны ПСП с $k=(v+1)/2$. Количество РПСП значительно увеличивается за счёт вырожденных ПСП с $k=v-1$. При этом исходная вырожденная ПСП превращается в невырожденную РПСП с $k < V/2$.

Параметры образующей (0,1)-матрицы $\hat{A}_V$ ($V=v(b+1)$, $(b=1, 2, 3, \dots)$, соответствующей РПСП, которая построена из любой ПСП (с количеством единиц k в диапазоне $1 \leq k \leq v-1$) с образующей (v, k, λ) -матрицей-циркулянтам $\hat{A}_v$, обобщены в табл. 2.

Расширенные ПСП увеличивают количество возможных двумерных кодирующих таблиц построчного и диагонального типов, а также соответствующих им кодирующих коллиматоров с размерностью в диапазоне от 7×7 до 99×99 более чем в 500 раз.

Для статистического критерия P_A и дисперсии d_j оценки j -й компоненты пространственного распре-

деления источников излучения при использовании ИКСИ с кодирующим коллиматором на основе РПСП справедливы следующие выражения:

$$P_A = \frac{k^2 - \lambda}{k^2(k-\lambda)} \left(V \sigma_0^2 + k \sum_{j=1}^V \sigma_j^2 \right);$$

$$d_j = \frac{1}{k^2(k-\lambda)} \left[(k^2 - \lambda) \sigma_0^2 + k(k-2\lambda) \sigma_j^2 + \lambda k \sum_{n=1}^V \sigma_n^2 \right], j=1, 2, \dots, V.$$

Инверсные РПСП. Можно рассмотреть новый класс инверсных последовательностей, образованных из РПСП. Преобразование заключается в замене нулей единицами, а единиц нулями, что приводит к увеличению количества единиц, или в применении к кодирующим коллиматорам, к увеличению количества открытых пинхолов. Аналогичная процедура имеет место при переходе от классических ПСП к ассоциированным.

Параметры (0,1)-матрицы, описывающих инверсные РПСП, обобщены в табл. 3.

Количество инверсных РПСП достаточно велико и равно количеству РПСП.

Для статистического критерия P_A и дисперсии d_j оценки j -й компоненты пространственного распределения источников излучения при использовании ИКСИ с кодирующим коллиматором на основе инверсной РПСП справедливы следующие выражения:

$$P_A = \left[\sigma_0^2 V_1 + (V_1 - k) \sum_{m=1}^{V_1} \sigma_m^2 \right] \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k-\lambda)} - \frac{V_1 - 2k}{k^2(V_1 - k)^2} \right];$$

$$d_j = \sigma_0^2 \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k-\lambda)} - \frac{V_1 - 2k}{k^2(V_1 - k)^2} \right] - \left[\frac{(k-2\lambda)}{k(k-\lambda)} - 2 \frac{1}{k(V_1 - k)} \right] \sigma_j^2 +$$

$$+ \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k-\lambda)} - \frac{1}{k^2(V_1 - k)} \right] \sum_{m=1}^{V_1} \sigma_{\eta_1(m, j)}^2 - \frac{\lambda}{k(k-\lambda)} \sum_{m_3=1}^V \sigma_{\eta_2(m_3, j)}^2,$$

где $\eta_1(m, j) = (m_1 - 1) + j - [(j-1)/(b_2 + 1)]$;
 $\eta_2(m_3, j) = (m_3 - 1)(b_1 + 1) - (b_1 + 1)[(j-1)/(b_1 + 1)] + j$; $[a]$ – целая часть числа a , в формулах функций для η_1, η_2 .

Инверсные РПСР допускают дальнейшее обобщение с помощью операции расширения, которая аналогична приведённой для ПСП.

Обобщение инверсных РПСР. Для построения РПСР в качестве исходной можно взять как классическую ПСП с $1 \leq k \leq (v+1)/2$, так и инверсную с $(v+1)/2 < k' \leq v-1$. Так как

операцию инвертирования можно применить не только к исходной ПСП, но и к любой РПСР, то для дальнейшего расширения в качестве исходной можно использовать инвертированную РПСР. Уже после первого расширения полученная обобщённая расширенная последовательность (ОРП) имеет $k' < (2V+1)/2$. Затем полученные ОРП снова можно инвертировать и расширить, чтобы получить последовательности следующего уровня, и т. д.

Т а б л и ц а 3

Параметры (0, 1)-матриц $\hat{C}_i$, описывающих инверсные РПСР

Параметры	Значения параметров
Исходная матрица для РПСР	$\hat{A}_V$
Число +1 в любой строке	$V-k$
Число нулей в любой строке	k
$\hat{C}_1$	$\hat{C}_1 = \hat{J}_V - \hat{A}_V = \hat{J}_V - \hat{A}_V \otimes \hat{I}_{b_1+1}$
$\hat{C}_1^{-1}$	$\hat{C}_1^{-1} = [k(V-k)]^{-1} \hat{J}_V - \hat{A}_V^{-1}$
$\hat{C}_1 \hat{C}_1^T$	$\hat{C}_1 \hat{C}_1^T = \hat{A}_V \hat{A}_V^T + (V-2k) \hat{J}_V =$ $= (k-\lambda) I_{V(b_1+1)} + [v(b_1+1)-2k] J_{V(b_1+1)} + \lambda J_V \otimes I_{b_1+1} =$ $= [(k-\lambda) I_V + \lambda J_V] \otimes I_{b_1+1} + [v(b_1+1)-2k] J_V \otimes I_{b_1+1}$
$(\hat{C}_1 \hat{C}_1^T)^{-1}$	$(\hat{C}_1 \hat{C}_1^T)^{-1} = (\hat{A}_V \hat{A}_V^T)^{-1} - [k(V-k)]^{-2} (V-2k) \hat{J}_V$
$\det(\hat{C}_1 \hat{C}_1^T)$	$\det(\hat{C}_1 \hat{C}_1^T) = (k-\lambda)^{(V-1)(b_1+1)} \times$ $\times [k + (\lambda-2k)(v-1) + v(v-1)(b_1+1)]^{b_1} \times$ $\times [k + (\lambda-2k)(v-1) + v(v-1)(b_1+1) + vb_1(b_1+1) - 2kb_1]$
Собственные значения матрицы $\hat{C}_1 \hat{C}_1^T$ (кратность)	$k + (\lambda-2k)(v-1) + v(b_1+1)[v-1+b_1] - 2kb_1$ $k + (\lambda-2k)(v-1) + v(v-1)(b_1+1), (b_1), (1)$ $(k-\lambda), ((v-1)(b_1+1))$

Т а б л и ц а 4

Параметры (0, 1)-матриц $\hat{B}_n$, описывающих ОРП уровня n

Параметры	Значения параметров
Параметр расширения	b_n
Порядок матрицы	$V_n = V_{n-1}(b_n+1) = v \prod_{j=1}^n (b_j+1)$
Число +1 в любой строке	$K_1 = k, n=1;$ $K_n = V_{n-1} - K_{n-1} = (-1)^{n-1} \left[k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j V_j \right], n > 1$
Число нулей в любой строке	$v-k, n=1;$ $V_n - K_n = (-1)^n \left[k + \sum_{j=1}^n (-1)^j V_j \right], n > 1$
Инвертированная матрица предыдущего уровня $\hat{C}_{n-1}$	$\hat{C}_{n-1} = \hat{J}_{V_{n-1}} - \hat{B}_{n-1}$
Матрица $\hat{B}_n$	$\hat{B}_n = \hat{C}_{n-1} \otimes \hat{I}_{b_n+1}$
Обратная матрица $\hat{B}_n^{-1}$	$\hat{B}_n^{-1} = \hat{C}_{n-1}^{-1} \otimes \hat{I}_{b_n+1}$
Матрица $\hat{B}_n \hat{B}_n^T$	$\hat{B}_n \hat{B}_n^T = (\hat{C}_{n-1} \hat{C}_{n-1}^T) \otimes \hat{I}_{b_n+1}$
Обратная матрица $(\hat{B}_n \hat{B}_n^T)^{-1}$	$(\hat{B}_n \hat{B}_n^T)^{-1} = (\hat{C}_{n-1} \hat{C}_{n-1}^T)^{-1} \otimes \hat{I}_{b_n+1}$
$\det(\hat{B}_n \hat{B}_n^T)$	$\det(\hat{B}_n \hat{B}_n^T) = \det(\hat{C}_{n-1} \hat{C}_{n-1}^T)^{b_n+1}$

В предложенной иерархии РПСР, образованная из любой (с количеством единиц k в диапазоне $1 \leq k \leq v-1$) ПСП с параметрами $(v, k, \lambda = k(k-1)/(v-1))$ вставлением b_1 нулей, является ОРП 1-го уровня (ОРП-1) с параметрами (v, k, b_1) , причём она имеет длину $V_1 = v(b_1+1)$ и содержит $K_1 = k$ единиц и $V_1 - K_1 = v(b_1+1) - k$ нулей. Если взять любую ОРП-1, инвертировать её и применить операцию расширения, получим расширенную последовательность 2-го уровня (ОРП-2) с параметрами (v, k, b_1, b_2) , причём она имеет длину $V_2 = v(b_1+1)(b_2+1)$ и содержит $K_2 = V_1 - K_1 = v(b_1+1) - k$ единиц и $V_2 - K_2 = v(b_1+1)b_2 + k$ нулей. Для обобщённой последовательности n -го уровня (ОРП- n) с параметрами $(v, k, b_1, b_2, \dots, b_n)$ её длина V_n и количество единиц K_n будут определяться следующими выражениями:

$$V_n = v \prod_{j=1}^n (b_j+1);$$

$$K_1 = k;$$

$$K_n = (-1)^{n-1} \left[k + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j V_j \right], n > 1.$$

Параметры (0,1)-матриц $\hat{B}_n$, описывающих свойства ОРП- n , обобщены в табл. 4.

Для статистического критерия P_A и дисперсии d_j оценки j -й компоненты пространственного распределения источников излучения при использовании ИКСИ с кодирующими коллиматорами на основе ОРП- n справедливы выражения:

$$P_A = \sum_{j=1}^{V_n} d_j = \sigma_0^2 (b+1) \sum_{i=1}^{V_{n-1}} \sum_{j=1}^{V_{n-1}} ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{ji})^2 +$$

$$+ (b+1) \sum_{m=1}^{V_n} \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{V_{n-1}} \sum_{j=1}^{V_{n-1}} |(\hat{C}_{n-1})_{i,\alpha(m)}| ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{ji})^2;$$

$$d_j = \sum_{i=1}^{V_n} \left(\sigma_0^2 + \sum_{m=1}^{V_n} |(\hat{B}_n)_{im}|^2 \sigma_m^2 \right) ((\hat{B}_n^{-1})_{ji})^2 = \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{V_n} ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{\alpha(j),\alpha(i)})^2 \delta_{\beta(j),\beta(i)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{V_n} \sigma_m^2 \left(\sum_{i=1}^{V_n} |(\hat{C}_{n-1})_{\alpha(i),\alpha(m)}| \delta_{\beta(i),\beta(m)} ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{\alpha(j),\alpha(i)})^2 \delta_{\beta(j),\beta(i)} \right) =$$

$$= \sigma_0^2 \sum_{i=1}^{V_{n-1}} ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{\alpha(j),i})^2 + \sum_{m=1}^{V_n} \sigma_m^2 \delta_{\beta(j),\beta(m)} \left(\sum_{i=1}^{V_{n-1}} |(\hat{C}_{n-1})_{i,\alpha(m)}| ((\hat{C}_{n-1}^{-1})_{\alpha(j),i})^2 \right)$$

$$j = 1, 2, \dots, V_n,$$

$\alpha(i) = [(i+b_n)/(b_n+1)]$, $\beta(i) = i - (b_n+1)[(i-1)/(b_n+1)]$, $[a]$ – целая часть числа a .

Для полноты описания приведём параметры (0, 1)-матриц $\hat{B}_2$, описывающих ОРП-2 (табл. 5).

Т а б л и ц а 5
Параметры (0, 1)-матриц $\hat{B}_2$, описывающих ОРП уровня 2

Параметры	Значения параметров
Параметр расширения	b_2
Порядок матрицы	$V_2 = V_1(b_2 + 1) = v(b_1 + 1)(b_2 + 1)$
Число +1 в любой строке	$K_2 = v(b_1 + 1) - k$
Число нулей в любой строке	$v(b_1 + 1)b_2 + k$
Инвертированная матрица предыдущего уровня $\hat{C}_1$	$\hat{C}_1 = J_{v(b_1+1)} - \hat{B}_1 = J_{v(b_1+1)} - \hat{A}_v \otimes I_{b_1+1}$
Матрица $\hat{B}_2$	$\hat{B}_2 = \hat{C}_1 \otimes \hat{I}_{b_2+1}$
Обратная матрица $\hat{B}_2^{-1}$	$\hat{B}_2^{-1} = \hat{C}_1^{-1} \otimes \hat{I}_{b_2+1}$
Матрица $\hat{B}_2 \hat{B}_2^T$	$\hat{B}_2 \hat{B}_2^T = (\hat{C}_1 \hat{C}_1^T) \otimes \hat{I}_{b_2+1}$
Обратная матрица $(\hat{B}_2 \hat{B}_2^T)^{-1}$	$(\hat{B}_2 \hat{B}_2^T)^{-1} = (\hat{C}_1 \hat{C}_1^T)^{-1} \otimes \hat{I}_{b_2+1}$
$\det(\hat{B}_2 \hat{B}_2^T)$	$\det(\hat{B}_2 \hat{B}_2^T) = \det(\hat{C}_1 \hat{C}_1^T)^{b_2+1}$
Собственные значения матрицы $\hat{B}_2 \hat{B}_2^T$ (кратность)	$k + (\lambda - 2k)(v - 1) + v(b_1 + 1)(v - 1 + b_1) - 2kb_p((b_2 + 1))$ $k + (\lambda - 2k)(v - 1) + v(v - 1)(b_1 + 1), (b_1(b_2 + 1))$ $(k - \lambda), ((v - 1)(b_1 + 1)(b_2 + 1))$

Для статистического критерия P_A и дисперсии d_j оценки j -й компоненты пространственного распределения источников излучения при использовании ИКСИ с кодирующим коллиматором на основе ОРП-2 справедливы следующие выражения:

$$P_A = \left[\sigma_0^2 V_2 + (V_1 - k) \sum_{m=1}^{V_2} \sigma_m^2 \right] \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k - \lambda)} - \frac{V_1 - 2k}{k^2(V_1 - k)^2} \right];$$

$$d_j = \sigma_0^2 \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k - \lambda)} - \frac{V_1 - 2k}{k^2(V_1 - k)^2} \right] + \left[2 \frac{1}{k(V_1 - k)} - \frac{(k - 2\lambda)}{k(k - \lambda)} \right] \sigma_j^2 +$$

$$+ \left[\frac{k^2 - \lambda}{k^2(k - \lambda)} - \frac{1}{k^2(V_1 - k)} \right] \sum_{m=1}^{V_1} \sigma_{\gamma_1(m, j)}^2 - \frac{\lambda}{k(k - \lambda)} \sum_{m_0=1}^{V_1} \sigma_{\gamma_2(m_0, j)}^2,$$

где: $\gamma_1(m_1, j) = (m_1 - 1)(b_2 + 1) - (b_2 + 1)[(j - 1)/(b_2 + 1)] + j$;

$$\gamma_2(m_0, j) = (m_0 - 1)(b_1 + 1)(b_2 + 1) - (b_1 + 1)(b_2 + 1) \left[\frac{[(j + b_2)/(b_2 + 1)] - 1}{b_1 + 1} \right] + j;$$

в формулах функций $\gamma_1, \gamma_2 [a]$ — целая часть числа a .

Заключение. Приведены основные свойства новых последовательностей. Предложенные обобщенные РПСП наряду с теоретическим интересом позволяют значительно увеличить количество двумерных кодирующих таблиц и соответствующих им кодирующих коллиматоров с различными размерностями и коэффициентами пропуска. Это

позволяет расширить выбор кодирующих устройств для реализации радиационно-физического эксперимента при использовании мультимплексных систем измерений.

Л и т е р а т у р а

1. Mertz L., Young N. O. Fresnel transformations of images. Proceedings of the International Conf. Optical Instruments and Techniques. K. J. Habell Chapman and Hall. 1961. P. 305–310.
2. Dicke R. H. Scatter-hole cameras for x-rays and gamma rays // J. Astrophysical, 1968. V. 153. P. L101–L106.
3. Федоров Г. А. Радиационная интроскопия. Кодирование информации и оптимизация эксперимента. М.: Энергоатомиздат, 1982.
4. Gourday A. R., Stephen J. B. Geometric coded aperture masks // Applied Optics. 1983. V. 22. No. 24. P. 4042–4047.
5. Gottesman S. R., Fenimore E. E. New family of binary arrays for coded aperture imaging // Applied Optics. 1989. V. 28. No. 20. P. 4344–4352.
6. Byard K. Index class apertures – a class of flexible coded aperture // Applied Optics. 2012. V. 51. No. 16. P. 3453–3460.
7. Макуильямс Ф. Дж., Слоан Н. Дж. А. Псевдослучайные последовательности и таблицы // ТИИЭР. 1976. Т. 64. № 12. С. 80–95.
8. Холл М. Комбинаторика: Пер. с англ. М.: Мир, 1970.
9. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
10. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.
11. Федоров Г. А., Терещенко С. А. Вычислительная эмиссионная томография. М.: Энергоатомиздат, 1990.
12. Терещенко С. А. Методы вычислительной томографии. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
13. Федоров Г. А. Интегрально-кодовые системы измерений в радиационной физике. М.: НИЯУ МИФИ, 2010.
14. Терещенко С. А., Федоров Г. А. Псевдослучайные последовательности: существование, построение, обобщение // Электронные информационные системы. 2015. № 3 (6). С. 63–75.
15. Fenimore E. E., Cannon T. M. Coded aperture imaging with uniformly redundant arrays // Applied Optics. 1978. V. 17. No. 3. P. 337–347.
16. Федоров Г. А., Терещенко С. А. Расширенные псевдослучайные последовательности и двумерные кодирующие коллиматоры на их основе // Измерительная техника. 2007. № 6. С. 66–71.

Дата поступления: 27.10.2016.