

Эффективная оценка резонансной частоты интерферометра Фабри—Перо в схеме Паунда—Дривера

А. В. ГУСЕВ, И. С. ЮДИН

Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, Москва, Россия,
e-mail: avg@sai.msu.ru

Рассмотрено влияние дробовых шумов на точность измерения резонансной частоты интерферометра Фабри—Перо в схеме Паунда—Дривера. В качестве модели периодически нестационарного дробового шума использован пуассоновский случайный процесс с независимыми моментами возникновения отдельных импульсов (электронов).

Ключевые слова: лазерно-интерферометрические гравитационные антенны, схема Паунда—Дривера, периодически нестационарные и пуассоновские случайные процессы.

The influence of shot noises on the accuracy of measurement of resonant frequency of Fabry—Perot interferometer in Paund—Drever scheme is considered. As a model of periodically non-stationary shot noise the Poisson random process with independent moments of particular pulses (electrons) origin is used.

Key words: laser gravitational antennas, Paund—Drever scheme, periodically non-stationary Poisson random processes.

Основным элементом большебазовых лазерно-интерферометрических гравитационных антенн LIGO (США) и VIRGO (Франция — Италия) [1, 2] является интерферометр Майкельсона, в качестве его зеркал используют многоходовые резонаторы Фабри—Перо с базой $L \approx 3$ км (VIRGO) и $L \approx 4$ км (LIGO). Динамическую устойчивость работы таких установок обеспечивает система контроля, в состав которой входит схема Паунда—Дривера [3] (аналогичная схема используется на резонансной оптоакустической гравитационной антенне ОГАН [4]). Применение схемы Паунда—Дривера позволяет минимизировать сигнал

$$\nu = \omega_0 - \Omega_M,$$

где ω_0 — частота накачки; $\Omega_M = M\Delta\Omega$ — резонансная частота M -й моды интерферометра Фабри—Перо; $\Delta\Omega = \pi c/L$ — межмодовый интервал; c — скорость света.

Принцип действия схемы Паунда—Дривера (рисунок) состоит в следующем. Частотно-модулированная волна $E(t) =$

$= \text{Re}[\tilde{E}(t)\exp\{j\omega_0 t\}]$, где $\tilde{E}(t) = E_0 \exp\{j\beta \cos \Omega t\}$ — комплексная огибающая; β , Ω — индекс и частота модуляции, от генератора накачки 1 через светоделительную пластинку поступает на резонатор Фабри—Перо с импульсной характеристикой на отражение

$$\begin{cases} g(t, \nu) = \text{Re}[\tilde{g}(t, \nu)\exp\{j\omega_0 t\}] \leftrightarrow G(\omega, \nu); \\ g(t, \nu) \leftrightarrow \tilde{G}(\omega, \nu) = 2G(\omega_0 + \omega), |\omega| \ll \omega_0, \end{cases}$$

где $G(\omega, \nu)$ — передаточная функция.

Отраженная волна

$$E_r(t) = \text{Re}[\tilde{E}_r(t)\exp\{j\omega_0 t\}]; \tilde{E}_r(t, \nu) = \tilde{E}(t) * \tilde{g}(t, \nu)$$

поступает на фотодетектор 2. К его выходу подключен двухканальный синхронный детектор 3 с опорными сигналами $\cos \Omega t$, $\sin \Omega t$, где $\Omega \approx 2\pi \cdot 10^7$ рад/с — частота модуляции. В блоке 4 формируется оценка $\hat{\nu}$ неизвестного параметра ν , которая через систему обратной связи (показана пунктиром) служит для управления частотой генератора накачки 1.

Данная статья посвящена расчету дисперсии эффективной оценки резонансной частоты интерферометра Фабри—Перо в схеме Паунда—Дривера на фоне дробовых (вакуумных) шумов. С учетом того, что управление не сказывается на погрешности фильтрации [5], расчет проводится при разомкнутой цепи обратной связи. Для описания дробового шума $i(t)$ используется класс нестационарных пуассоновских процессов с независимыми моментами возникновения отдельных импульсов.

Структура отраженной волны. Используя выражение для передаточной функции $G(\omega, \nu)$ интерферометра Фабри—Перо «на отражение» [1—3], имеем

$$\tilde{G}(\omega, \nu) = r \frac{1 - q(\omega, \nu)}{1 - r^2 q(\omega, \nu)}; q(\omega, \nu) = \exp\left\{-2\pi j \frac{(\omega + \nu)}{\Delta\Omega}\right\},$$

где $r \approx 1$ — коэффициент отражения входного зеркала, и, следовательно,

$$\tilde{E}_r(t, \nu) = E_0 \left[J_0(\beta) \tilde{G}(0, \nu) + \sum_{k \neq 0} j^k \tilde{G}(k\Omega) J_k(\beta) \exp\{jk\Omega t\} \right],$$

где $J_0(\beta)$, $J_k(\beta)$ — функции Бесселя нулевого и k -го порядков.

Так как $\tilde{G}(\pm k\Omega, \nu) \approx 1$ при $k \neq 0$ и $\tilde{G}(0, \nu) \approx 2\pi j \times (\nu / \Delta\Omega) / (1 - r)$, получаем

$$\tilde{E}_r(t, \nu) = E_0 [J_0(\beta) \tilde{G}(0, \nu) + \exp(j\beta \cos \Omega t) - J_0(\beta)]. \quad (1)$$

Фотодетектирование отраженной волны. В схеме Паунда—Дривера отраженная волна $E_r(t, \nu)$ поступает на фотодетектор 2 (см. рисунок). Падение напряжения $V(t) = RI(t) \propto |\tilde{E}_r(t, \nu)|$, где R — сопротивление нагрузки; $I(t) = e \sum_k \delta(t - t_k) = \langle I(t) \rangle + i(t)$ — фототок; e — заряд электрона;

$\delta(\cdot)$ — дельта-функция; $\langle \cdot \rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения; $i(t)$ — дробовый шум. Отраженная волна $E_r(t, \nu)$ модулирована по интенсивности (мощности), поэтому фототок $I(t)$ представляет асимптотически гауссов периодически нестационарный случайный процесс.

В теории оптической связи [6] статистический анализ нестационарных вакуумных шумов на выходе фотоприемника при детектировании амплитудно-модулированных сигналов осуществляется на основе энергетического спектра (спектральной плотности). Аналогичная методика используется в [3] при анализе вакуумных шумов в схеме Паунда—Дривера. Энергетический спектр $N_i(\omega)$ дробового шума $i(t)$ определяется выражением [6]:

$$N_i(\omega) \leftrightarrow B_i^*(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} B_i^{(\tau)}(t, t + \tau) dt;$$

$$B_i^{(\tau)}(t, t + \tau) = B_i(t, \tau), |t, t + \tau| \leq T/2,$$

где T — продолжительность наблюдения; $B_i(t, \tau) = \langle i(t)i(t + \tau) \rangle$.

В общем случае периодически нестационарный случайный процесс с функцией корреляции $B_i(t, t + \tau)$ и стационарный случайный процесс с функцией корреляции $B^*(\tau)$ статистически неэквивалентны. Сохранить тонкую структуру дробового шума удастся, предположив, что $I(t)$ — случайный нестационарный процесс пуассоновского типа с независимыми моментами возникновения отдельных электронов [7]. В такой постановке имеем

$$\left. \begin{aligned} \langle I(t) \rangle &= \bar{n} e \int_{-\infty}^{\infty} W_t(t - \vartheta) \delta(\vartheta) d\vartheta = e \bar{n}_1(t); \\ B_i(t, \tau) &= e^2 \bar{n} \int_{-\infty}^{\infty} W_t(t - \vartheta) \delta(\vartheta) \delta(\tau - \vartheta) d\vartheta = e^2 \bar{n}_1(t) \delta(\tau), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $\bar{n} = \int_0^T \bar{n}_1(t) dt$ — среднее число электронов на интервале $(0, T)$; $W_t(t)$ — плотность вероятности случайных независимых событий в момент времени t_k на том же интервале; $\bar{n}_1(t) = \bar{n} W_t(t)$ — среднее число импульсов в единицу времени. В квазиклассическом приближении [6]:

$$\bar{n}_1(t) \equiv \bar{n}_1(t, \nu) \approx |\tilde{E}_r(t, \nu)|^2 S / (2(\hbar \omega_0 z_0)), \quad (3)$$

где S — площадь поперечного сечения падающей волны; $z_0 = 120\pi$ Ом — сопротивление свободного пространства.

Из (1)—(3), ограничиваясь мощной накачкой, находим

$$V(t) \propto x(t), 0 \leq t \leq T.$$

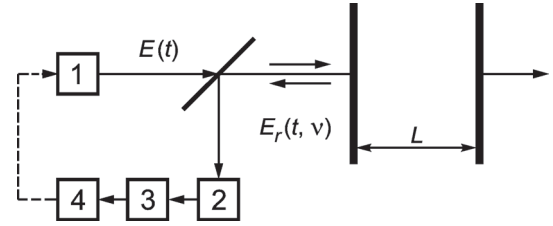


Схема Паунда—Дривера измерения резонансной частоты интерферометра Фабри—Перо:

1 — генератор накачки; 2 — фотоприемник; 3 — синхронный детектор; 4 — блок формирования оценки

Здесь

$$x(t) \approx E_0^2 [\chi(t) - \delta(\nu, t)] + E_0 \mu(t), \mu(t) = \sqrt{|\chi(t)|} \xi(t);$$

$$\delta(\nu, t) = 2J_0(\beta) \Delta(\nu) \operatorname{Im}[\exp(j\beta \cos \Omega t)]; \quad (4)$$

$$\chi(t) = 1 + J_0(\beta)^2 - 2J_0(\beta) \operatorname{Re}[\exp(j\beta \cos \Omega t)];$$

$\Delta(\nu) = \operatorname{Im} \tilde{G}(0, \nu)$; $\xi(t)$ — стационарный гауссов дельта-коррелированный случайный процесс (белый шум) с функцией корреляции

$$B_\xi(\tau) = \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle = N_\xi \delta(\tau), N_\xi = 2\hbar \omega_0 z_0 / S. \quad (5)$$

Тонкая структура дробового шума на выходе синхронного детектора. Реализация случайного процесса $x(t)$ в соответствии с (4) поступает на вход синхронного двухканального детектора 3 (см. рисунок), выделяющего квадратурные составляющие. При дальнейшем анализе ограничимся квазигармоническим приближением

$$x(t) = x_c(t) \cos \Omega t - x_s(t) \sin \Omega t + \text{неинформативные члены},$$

где $x_c(t)$, $x_s(t)$ — квадратурные компоненты основной гармоники.

Для расчета спектральной плотности аддитивной помехи на выходе синхронного детектора воспользуемся известным в теории колебаний методом гармонического баланса. Сущность подобной методики состоит в следующем. Прини-

мая во внимание, что $\mu(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \exp\{j\Omega k t\}$, имеем

$$\mu(t) \xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi(t) \exp\{j\Omega k t\} = \operatorname{Re}[\tilde{\mu}(t) \exp\{j\Omega t\}] + \dots \quad (6)$$

При вычислении комплексной огибающей $\tilde{\mu}(t)$ гауссов белый шум $\xi(t)$ представим в виде суперпозиции отдельных гармоник

$$\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m(t); \xi_m(t) = \operatorname{Re}[\tilde{\xi}_m(t) \exp\{jm\Omega t\}], \quad (7)$$

где $\tilde{\xi}_m(t)$ — комплексная огибающая.

Из (6), (7) находим

$$\mu(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{m=0}^{\infty} c_{1-m} \tilde{\xi}_m(t) \exp\{j\Omega t\} + c_{1-m}^* \tilde{\xi}_m^*(t) \exp\{-j\Omega t\} \right] + \dots;$$

$$\tilde{\mu}(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left[c_{1-l} \tilde{\xi}_l(t) + c_{1-l}^* \tilde{\xi}_l^*(t) \right].$$

Отсюда, принимая во внимание (5), получаем

$$\left. \begin{aligned} B_{\mu_c}(\tau) &= \langle \mu_c(t) \mu_c(t+\tau) \rangle = 2N_{\xi} F_c \delta(\tau); \\ B_{\mu_s}(\tau) &= \langle \mu_s(t) \mu_s(t+\tau) \rangle = 2N_{\xi} F_s \delta(\tau); \\ B_{\mu_c \mu_s}(\tau) &= \langle \mu_c(t) \mu_s(t+\tau) \rangle = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $\mu_c(t) = \operatorname{Re} \tilde{\mu}(t)$; $\mu_s(t) = \operatorname{Im} \tilde{\mu}(t)$; $F_{c,s} = \sum_{l=0}^{\infty} |c_{1-l} \pm c_{-1-l}|^2$ —

коэффициент шума.

Дисперсия эффективной оценки резонансной частоты. Поскольку квадратурные компоненты $\mu_c(t)$, $\mu_s(t)$ статистически независимы, дальнейшей обработке будет подвергаться реализация скалярного случайного процесса

$$x_c(t) = \operatorname{Re} \tilde{x}(t) = 4J_0(\beta) J_1(\beta) E_0^2 \Delta(\nu) + E_0 \mu_c(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

представляющего суперпозицию (смесь) полезного сигнала

$4J_0(\beta) J_1(\beta) E_0^2 \Delta(\nu)$, зависящего от неизвестного параметра

ν , и гауссова белого шума $\mu_c(t)$ с функцией корреляции $B_{\mu_c}(\tau)$ (8). Это позволяет использовать при вычислении разрешающей способности схемы Паунда—Дривера известные методы оптимального оценивания параметров сигналов на фоне гауссовых помех [8]. В частности, при больших отношениях сигнал — шум максимально правдоподобная оценка $\hat{\nu}$ является несмещенной, а ее дисперсия определяется выражением

$$D(\hat{\nu}|\nu) = \left[\frac{\partial^2 S(\nu_1, \nu_2)}{\partial \nu_1 \partial \nu_2} \right]_{\nu_1=\nu_2=\nu}^{-1} = \frac{E_0^2 N_{\xi} F_c}{(4J_0(\beta) J_1(\beta) E_0^2)^2 T \left[\frac{2\pi}{\Delta\Omega(1-r)} \right]^2}, \quad (9)$$

$$\text{где } S(\nu_1, \nu_2) = \frac{(4J_0(\beta) J_1(\beta) E_0^2)^2}{E_0^2 N_{\xi} F_c} \int_0^T \Delta(\nu_1) \Delta(\nu_2) dt =$$

$$= \frac{(4J_0(\beta) J_1(\beta) E_0^2)^2 T}{E_0^2 N_{\xi} F_c} \Delta(\nu_1) \Delta(\nu_2) \text{ — сигнальная функция.}$$

Обсуждение полученных результатов. При некогерентном (прямом) фотодетектировании модулированной по интенсивности отраженной волны в схеме Паунда—Дривера дробовый шум $i(t)$ необходимо рассматривать как нестационарный асимптотически гауссов дельта-коррелированный процесс. В подобной ситуации применение спектрального описания дробовых шумов [6] оказывается недостаточным.

Для преодоления подобных ограничений в работе использована нестационарная модель дробового шума в клас-

се пуассоновских случайных процессов с независимыми моментами возникновения отдельных электронов. Нестационарность такого процесса проявляется в том, что плотность вероятности $W_i(t)$ (см. выше) зависит от времени (для стационарной пуассоновской помехи $W_i(t) = 1/T$). Аналогичный результат можно получить, если рассматривать процесс фотодетектирования как следствие вакуумных шумов на входе [9]. При таком подходе в предположении, что квантовый выход $\eta = 1$, представим фототок в виде

$$I(t) = dQ(t)/dt = en(t),$$

где $Q(t) = e \int_0^t n(t) dt$ — переносимый заряд; $n(t) = |\tilde{E}_t(t)|^2 / N_{\xi}$

— число фотонов в момент времени t в падающей волне

$$E_t(t) = \operatorname{Re} [\tilde{E}_t(t) \exp\{j\omega_0 t\}] = E_r(t, \nu) + E_v(t),$$

$E_v(t)$ — нулевые флуктуации вакуума с функцией корреляции

$$\langle E_v(t) E_v(t+\tau) \rangle = N_{\xi} \delta(\tau) / 2.$$

Нестационарность дробового шума $i(t)$ приводит к нестационарности ($N_c \neq N_s$) комплексного случайного процесса $\tilde{\mu}(t)$, который используется при вычислении дисперсии (9) эффективной оценки $\hat{\nu}$ методом гармонического баланса.

Из теории оценивания параметров сигнала на фоне гауссовых шумов [8] известно, что оценка максимального правдоподобия является асимптотически эффективной. Поэтому нижняя граница дисперсии оценки неизвестного параметра $\nu = \omega_0 - \Omega_M$ определяется выражением (9), которое можно представить в эквивалентной форме

$$D(\hat{\nu}|\nu) = \frac{\hbar\omega_0}{(8J_0(\beta) J_1(\beta))^2 P_0 T} \left[\frac{(1-r)\Delta\Omega}{\pi} \right]^2 \sum_{l=0}^{\infty} |c_{1-l} + c_{-1-l}|^2,$$

где P_0 — мощность накачки.

Для резонатора (дискриминатора) Фабри—Перо с базой $L = 0,2$ м и оптической резкостью $F = \pi/(1-r) \approx 10^4$ при использовании в качестве генератора накачки лазера длина волны которого $\lambda = 1064$ нм и мощность $P = 0,5$ Вт, при глубине частотной модуляции $\beta = 1,08$ и времени наблюдения 1 с получаем

$$D(\hat{\nu}|\nu) = 3 \cdot 10^{-10} \text{ Гц.}$$

При традиционном анализе разрешающей способности схемы Паунда—Дривера [2, 3, 10] дробовый шум $i(t)$ рассматривается как стационарный дельта-коррелированный процесс. В такой постановке дисперсия резонансной частоты резонатора Фабри—Перо определяется выражением

$$D_0(\hat{\nu}|\nu) = \frac{\hbar\omega_0}{16J_0^2(\beta) P_0 T} \left[\frac{(1-r)\Delta\Omega}{\pi} \right]^2.$$

Для указанных выше параметров

$$D_0(\hat{\nu}|\nu) = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ Гц} < D(\hat{\nu}|\nu).$$

Таким образом, традиционный подход не учитывает появление избыточных флуктуаций, обусловленных параметрическим механизмом преобразования шумов с субгармоник на основную частоту при периодически нестационарном дробовом шуме $i(t)$.

Л и т е р а т у р а

1. **Acernese F. e. a.** Status of Virgo // Class. Quantum. Grav. 2008. V. 25. 114045.
2. **Abbott B. P. e. a.** LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory // Rep. Prog. Phys. 2009. V. 72. 076901.
3. **Drever R. W. P. e. a.** Laser Phase and Frequency Stabilization Using an Optical Resonator // Appl. Phys. 1983. V. B 31. P. 97—105.

4. **Безруков Л. Б. и др.** Прецизионный измерительный комплекс слабых оптоакустических возмущений // ПТЭ. 2010. № 3. С. 111—118.
5. **Остром К. Ю.** Введение в статистическую теорию управления. М.: Мир, 1973.
6. **Гильярди Р. М., Карп Ш.** Оптическая связь. М.: Связь, 1978.
7. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1976. Т. 1.
8. **Куликов Е. И., Трифонов А. П.** Оценка параметров сигналов на фоне помех. М.: Сов. радио, 1978.
9. **Клышко Д. Н.** Фотонный шум: наблюдение, подавление, интерпретация // УФН. 1995. Т. 165. № 11. С. 1249—1278.
10. **Black E. D.** An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization // Am. J. Phys. 2001. V. 69. N 1. P. 79—87.

Дата принятия 19.03.2013 г.

ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

621.317.08

Алгоритм формирования выходного сигнала группового эталона частоты

К. Г. МИШАГИН, С. Д. ПОДОГОВА, И. Н. ЧЕРНЫШЕВ, С. Ю. МЕДВЕДЕВ

ЗАО «Время-Ч», Н. Новгород, Россия, e-mail: mishagin@vremya-ch.com

Предложен алгоритм формирования выходного сигнала группового эталона частоты, использующий управление частотой вспомогательного кварцевого генератора на двух временных масштабах. Алгоритм можно применять в системах резервирования выходного сигнала эталона, основанных на синхронизации вспомогательного генератора относительно нескольких стандартов частоты и времени.

Ключевые слова: групповой эталон частоты и времени, нестабильность частоты, вариация Аллана.

The automatic frequency control of auxiliary crystal oscillator algorithm based on two time-scales frequency measurements is proposed for formation of output signal of an atomic clock ensemble. The algorithm can be realized in atomic clock combining systems based on the synchronization of auxiliary oscillator by several atomic clocks of the ensemble.

Key words: ensemble of atomic clocks, frequency instability, Allan variation.

В последние годы существенно повысилась точность хранения и воспроизведения эталонных единиц времени и частоты, что, в первую очередь, обусловлено появлением новых квантовых стандартов частоты, основанных на использовании охлажденных атомов или ионов (цезиевые и рубидиевые фонтаны, оптические стандарты на атомах стронция и др.). При этом сигналы эталона, как правило, формируются при помощи небольшого ансамбля активных водородных стандартов (эффективность такого подхода продемонстрирована в [1, 2]). Отметим, что в нашей стране ансамбли водородных стандартов являются также основой для вторичных

и рабочих эталонов частоты и времени. За рубежом часто применяют ансамбли цезиевых стандартов частоты (на цезиевой атомно-лучевой трубке) или и цезиевые, и водородные стандарты вместе [3].

Кроме повышения точности современных эталонов времени и частоты наблюдается тенденция к формированию реальных сигналов (высокочастотных и частотой 1 Гц), обладающих характеристиками точности группового эталона. Для решения данной задачи необходима реализация алгоритма расчета групповой частоты и шкалы времени, а также алгоритма управления частотой и фазой источника выход-