плей. Такое устройство позволяет внести коррекцию в показания инкрементного преобразователя, исключив систематические ошибки. Это делают на стадии калибровки по ступенчатой мере длины и отмечают в сертификате на прибор. Таким образом, современный высотомер является полноценной однокоординатной измерительной машиной (1D) с ручным управлением. Благодаря простоте и удобству в обращении он не требует высокой квалификации персонала или специального обучения.

Штангенрейсмасы и высотомеры широко рекламируют и выпускают ведущие зарубежные фирмы: Tesa (Швейцария), Mahr (Германия), MITUTOYO (Япония). В России производят только механические и электронные штангенрейсмасы. Каждая фирма предлагает несколько моделей с разными диапазонами измерений.

Общие характеристики высотомеров

Диапазон измерения высотомеров	0—350; 0—600; 0—1000 мм
Дискретность цифрового отсчета	0,0001; 0,001; 0,01 мм
Повторяемость (2σ)	1,5 мкм
Предел допускаемой погрешности измерения (L в метрах)	$(2 + 3L)$ мкм
Измерительное усилие	(1,6 ± 0,5) Н

Одним из недостатков высотомера является его невысокая точность измерений по сравнению, например, с точностью измерений с использованием координатно-измерительной машины. Это связано с нарушением принципа Аббе, отклонением от перпендикулярности основания и линии перемещения наконечника, одноконтактным измерением и погрешностями от тепловых деформаций. Другой недостаток — высокая стоимость. По указанным причинам на мелкосерийном и ручном производстве чаще применяют дешевые штангенрейсмасы, а на автоматическом — трехкоординатные измерительные машины, которые точнее высотомеров и позволяют измерять больше параметров деталей.

Литература

1. **ГОСТ 164—90.** Штангенрейсмасы. Технические условия.

2. **Этингоф М.И.** Современный штангенциркуль // Измерительная техника. 2012. № 8. С. 29—30; **Etingof M. I.** Modern vernier caliper // Measurement techniques. 2012. V. 55. N 8. P. 890—893.

Дата принятия 27.05.2013 г.

ОПТИКО-ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

681.2.082

Определение пространственно-энергетических характеристик лазерного излучения с учетом ограниченного динамического диапазона измерительного устройства

А. М. РАЙЦИН

Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия,
e-mail: arcadiyram@rambler.ru

На основе двумерного распределения Пирсона уточнены формулы для определения ширины и диаметра лазерного пучка существующего стандарта ГОСТ Р ИСО 11146—2008, учитывающие ограниченность динамического диапазона измерительного устройства.

Ключевые слова: *излучение, распределение плотности мощности, диаметр и ширина пучка, координаты энергетического центра.*

Based on two-dimensional Pearson distribution the formulas for determination of the width and diameter of laser beam of existing standard ISO 11146—2008, taking into account the limited dynamic range of measuring device are received.

Key words: *radiation, power density distribution, beam diameter and width, energy center coordinates.*

Во многих технических приложениях, связанных с применением лазеров (оптическая локация, лазерная оптика и т. д.) в качестве модели распределения интенсивности в поперечном сечении лазерного пучка, формируемого идеальным резонатором, используется гауссова кривая. Однако для реальных резонаторов более адекватным описанием являются асимметричные функции. В [1—2] предложено применять кривые Пирсона. Целесообразность такой модели подтверждена тем, что кривые Гаусса — частный случай семейства функций Пирсона. Преимущество данных кривых состоит в том, что параметры распределения Пирсона однозначно можно выразить через начальные моменты распределения интенсивности, служащие основой для нахождения пространственно-энергетических характеристик лазерного излучения (ПЭХЛИ). В [3] для определения основных ПЭХЛИ использованы первые и вторые моменты распределения интенсивности. Распределение интенсивности излучения лазера измеряют в ограниченной области пространства многоэлементным измерительным преобразователем (МИП). При этом в соответствии с [3] распределение заменяют на гауссово-эллиптическое с измеренными моментами реального распределения. Также предполагают, что измерение моментов проводится интегрированием распределения по площади, имеющей поперечные размеры в направлениях осей X, Y, в 3—5 раз превышающие ширину пучка. Данная приближенная рекомендация превышения содержит неопределенность, которая является источником неучтенной погрешности измерения. Кроме того, считают, что в предлагаемых формулах определения моментов, диаметра и ширины пучков динамический диапазон интенсивности излучения, измеряемой МИП, бесконечен, что также приводит к погрешности определения ПЭХЛИ.

Данная статья посвящена решению двух задач. Во-первых, показано, что формулы для определения ширины и диаметра лазерного пучка, приведенные в [3], могут быть получены исходя из двумерного распределения Пирсона. Во-вторых, в расчетных соотношениях учтена ограниченность динамического диапазона МИП, благодаря чему устраняется произвольный выбор упомянутого превышения.

Двумерное распределение Пирсона может быть представлено системой дифференциальных уравнений в частных производных [2]:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial s(x,y)}{\partial x}&=\frac{\left(A_{01}+A_{11}y+A_{21}y^2\right)+x}{\left(A_{02}+A_{12}y+A_{22}y^2\right)+x\left(A_{03}+A_{13}y\right)+A_{04}x^2}\,s(x,y);\\ \frac{\partial s(x,y)}{\partial y}&=\frac{\left(B_{01}+B_{11}x+B_{21}x^2\right)+y}{\left(B_{02}+B_{12}x+B_{22}x^2\right)+y\left(B_{03}+B_{13}x\right)+B_{04}y^2}\,s(x,y),\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

где $s(x, y)$ — распределение интенсивности в поперечном сечении пучка лазерного излучения.

Рассмотрим частный случай, в котором (1) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}\partial s(x,y)/dx&=s(x,y)\left(A_{01}+A_{11}y+x\right)\big/A_{02};\\ \partial s(x,y)/dy&=s(x,y)\left(B_{01}+B_{11}x+y\right)\big/B_{02}.\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

В выбранной модели (2) предполагается, что интенсивность имеет максимум в точке (x_m, y_m), соответствующей нулям производных и определяемой из системы уравнений

$$\begin{cases}A_{01}+A_{11}y+x=0;\\ B_{01}+B_{11}x+y=0,\end{cases}$$

и распределение имеет гладкое соприкосновение с плоскостью XOY на концах промежутков, где оно сосредоточено, т. е. $\partial s(x, y)/\partial x = 0$, $\partial s(x, y)/\partial y = 0$, когда $s(x, y) = 0$.

Покажем, что решением (2) является эллиптический гауссов пучок. Проинтегрировав первое уравнение системы (2) по переменной x, получим

$$\ln s(x, y) = (A_{01}/A_{02})x + (A_{11}/A_{02})xy + x^2/(2A_{02}) + \varphi(y). \quad (3)$$

Далее продифференцируем (3) по y, учтем второе уравнение из (2) и запишем

$$(\partial s(x, y)/\partial y)/s(x, y) = (A_{11}/A_{02})x + \varphi'(y) = (B_{01} + B_{11}x + y)/B_{02}.$$

Из последнего соотношения найдем

$$\varphi'(y) = (B_{01} + y)/B_{02} + (B_{11}/B_{02})x - (A_{11}/A_{02})x.$$

Предположим, что смешанные производные второго порядка распределения $s(x, y)$ непрерывны, и из известного условия, в этом случае равенства $\partial^2 s(x, y)/\partial x\partial y = \partial^2 s(x, y)/\partial y\partial x$, получим $B_{11}/B_{02} = A_{11}/A_{02}$. Из чего следует, что $\varphi'(y) = (B_{01} + y)/B_{02}$. Тогда $\varphi(y) = (B_{01}/B_{02})y + y^2/(2B_{02}) + C$, где C — постоянная интегрирования. С учетом (3) решение (2) имеет вид

$$s(x,y)=\exp\left(\frac{x^2}{2A_{02}}+\frac{y^2}{2B_{02}}+\frac{A_{01}}{A_{02}}x+\frac{B_{01}}{B_{02}}y+\frac{A_{11}}{A_{02}}xy+C\right)$$

и представляет эллиптический гауссов пучок. Постоянную интегрирования C выберем из условия $s(x_m, y_m) = 1$: $C =$ $= -\left[a_2b_1^2+a_1^2b_2-2a_1b_1c\right]\Big/\left[2\left(c^2-a_2b_2\right)\right]$. Данное распределение характеризуется шестью параметрами, которые обозначим как $a_1 = A_{01}/A_{02}$; $b_1 = B_{01}/B_{02}$; $a_2 = 1/A_{02}$; $b_2 = 1/B_{02}$; $a_3 =$ $= A_{11}/A_{02}$; $b_3 = B_{11}/B_{02}$, причем $a_3 = b_3 = c$. Полученное при этом распределение и систему (2) запишем соответственно в виде

$$s(x, y) = \exp\left[(a_2x^2 + b_2y^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2cxy)/2 + C\right]; \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\partial s(x,y)/\partial x&=\left(a_1+a_2x+a_3y\right)s(x,y);\\ \partial s(x,y)/\partial y&=\left(b_1+b_2y+b_3x\right)s(x,y).\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Покажем, что относительное распределение $0 \le s(x, y) \le 1$ однозначно характеризуется шестью начальными моментами распределения интенсивности. Для установления связи между моментами и параметрами распределения введем понятие *моментов распределения, измеренных по заданному относительному уровню R интенсивности.* Определим динамический диапазон измерения интенсивности МИП как $D_и = -\lg R$, где R — нижняя граница. Таким образом, $R \le s(x, y) \le 1$. На рисунке приведена линия уровня относительного распределения интенсивности $s(x, y)$, определяемая из соотношения $s(x, y) = R$. Считая область определения интенсивности Ω правильной и замкнутой, ограниченной функциями $y = \varphi(x, R)$, состоящей из двух ветвей: *1* — $y = \varphi_2(x, R)$, *2* — $y = \varphi_1(x, R)$, разделенных точками a, b на промежутке $T1$, $T2$, и $x = \psi(y, R)$, состоящей из ветвей: *3* — $x = \psi_1(y, R)$, *4* — $x = \psi_2(y, R)$, разделенных точками d, c на промежутке $T3$, $T4$, запишем выражения для моментов распределения, измеренных по уровню R:

$$m_{pxqy} = \iint_{\Omega} x^p y^q s(x, y)dxdy =$$

$$= \int_{T1}^{T2} x^p\, dx \int_{\varphi_1(x,R)}^{\varphi_2(x,R)} y^q s(x, y)dy = \int_{T3}^{T4} y^q\, dy \int_{\psi_1(y,R)}^{\psi_2(y,R)} x^p s(x, y)dx.$$

Умножим обе части (5) на произведение $x^p y^q$ и проинтегрируем по области Ω для значений $p = 0$, $q = 0$; $p = 0$, $q = 1$; $p = 1$, $q = 0$:

$$\left.\begin{aligned} &\iint_{\Omega} x^p y^q \frac{\partial s(x, y)}{\partial x} dxdy = a_1 m_{pxqy} + a_2 m_{(p+1)xqy} + a_3 m_{px(q+1)y};\\ &\iint_{\Omega} x^p y^q \frac{\partial s(x, y)}{\partial y} dxdy = b_1 m_{pxqy} + b_2 m_{px(q+1)y} + b_3 m_{(p+1)xqy}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Интегрирование левой части первого уравнения системы (6) приводит к результату

$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{T3}^{T4} dy \int_{\psi_1(y,R)}^{\psi_2(y,R)} (\partial s(x, y)/\partial x)dx =$$

$$= \int_{T3}^{T4} \Big(s\big(\psi_2(y, R), y\big) - s\big(\psi_1(y, R)\big), y\Big)dy = 0;$$

$$\begin{cases} p=1 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{T3}^{T4} dy \int_{\psi_1(y,R)}^{\psi_2(y,R)} x(\partial s(x, y)/\partial x)dx =$$

$$= \int_{T3}^{T4} \Big[\psi_2(y, R)s\big(\psi_2(y, R), y\big) - \psi_1(y, R)s\big(\psi_1(y, R), y\big)\Big]dy -$$

$$- m_{0x0y} = RS - m_{0x0y};$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=1 \end{cases} \Rightarrow \int_{T3}^{T4} y dy \int_{\psi_1(y,R)}^{\psi_2(y,R)} (\partial s(x, y)/\partial x)dx =$$

$$= \int_{T3}^{T4} y\Big(s\big(\psi_2(y, R), y\big) - \big(\psi_1(y, R), y\big)\Big)dy = 0,$$

где S — площадь области Ω.

Аналогично, проинтегрировав левую часть второго уравнения, получим

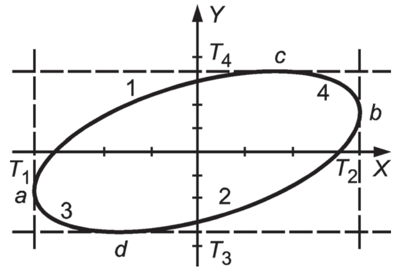
$$\begin{cases} p=0 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{T1}^{T2} dx \int_{\varphi_1(x,R)}^{\varphi_2(x,R)} (\partial s(x, y)/\partial y)dy =$$

$$= \int_{T1}^{T2} \Big(s\big(\varphi_2(x, R), x\big) - s\big(\varphi_1(x, R)\big), x\Big)dx = 0;$$

$$\begin{cases} p=1 \\ q=0 \end{cases} \Rightarrow \int_{T1}^{T2} x dx \int_{\varphi_1(y,R)}^{\varphi_2(y,R)} (\partial s(x, y)/\partial y)dy = 0;$$

$$\begin{cases} p=0 \\ q=1 \end{cases} \Rightarrow \int_{T1}^{T2} dx \int_{\varphi_1(x,R)}^{\varphi_2(x,R)} y(\partial s(x, y)/\partial y)dy = RS - m_{0x0y}.$$

Линия уровня относительного распределения интенсивности $s(x, y)$, определяемая из соотношения $s(x, y) = R$



Для определения шести неизвестных параметров распределения интенсивности составим шесть уравнений системы, предварительно разделив каждое из них на нулевой момент. В результате запишем систему следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 + a_2 m_{10} + a_3 m_{01} = 0;\\ &a_1 m_{10} + a_2 m_{20} + a_3 m_{11} = p;\\ &a_1 m_{01} + a_2 m_{11} + a_3 m_{02} = 0;\\ &b_1 + b_2 m_{01} + b_3 m_{10} = 0;\\ &b_1 m_{01} + b_2 m_{02} + b_3 m_{11} = p;\\ &b_1 m_{10} + b_2 m_{11} + b_3 m_{20} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

где $p = RS/m_{0x0y} - 1$; $m_{pq} = m_{pxqy}/m_{0x0y}$; $p = 0, 1$, $q = 0, 1$.

Введем новые обозначения $\sigma_{02}^2, \sigma_{20}^2$, r, связанные с имеющимися моментами: $\sigma_{02}^2 = m_{02} - m_{01}^2$; $\sigma_{20}^2 = m_{20} - m_{10}^2$; $\sigma_{11} = m_{11} - m_{01}m_{10}$; $r = \sigma_{11}/(\sigma_{02}\sigma_{20})$. Тогда решение (7) примет вид

$$a_1 = \Big[p\big(rm_{01}\sigma_{20} - m_{10}\sigma_{02}\big)\Big] \Big/ \Big[\sigma_{02}\sigma_{20}^2\big(1 - r^2\big)\Big];$$

$$a_2 = p \Big/ \Big[\sigma_{20}^2\big(1 - r^2\big)\Big];$$

$$a_3 = -pr \Big/ \Big[\sigma_{02}\sigma_{20}\big(1 - r^2\big)\Big];$$

$$b_1 = \Big[p\big(rm_{10}\sigma_{02} - m_{01}\sigma_{20}\big)\Big] \Big/ \Big[\sigma_{20}\sigma_{02}^2\big(1 - r^2\big)\Big]; \quad (8)$$

$$b_2 = p \Big/ \Big[\sigma_{02}^2\big(1 - r^2\big)\Big];$$

$$b_3 = -pr \Big/ \Big[\sigma_{20}\sigma_{02}\big(1 - r^2\big)\Big].$$

Как и следовало ожидать $a_3 = b_3$.

Определим некоторую линию уровня для функции $s(x, y)$, соответствующую условию измерения диаметра и ширины пучка на заданном уровне $\tilde{r}$ интенсивности $s(x, y) = \tilde{r}$, где $0 \le R < \tilde{r} \le 1$. Тогда в соответствии с (4) данная линия уровня, представляющая многочлен второй степени, имеет вид

$$a_2x^2 + b_2y^2 + 2a_1x + 2b_1y + 2cxy + 2C = 2h, \quad (9)$$

где $h = \ln\tilde{r}$, $h < 0$.

Приведем (9) к каноническому виду. Введем новые координаты $x = \tilde{x} + x_0$; $y = \tilde{y} + y_0$, подставим их в (9) и перенесем начало системы координат в точку (x_0, y_0). Выбрав значения (x_0, y_0), являющиеся решением системы

$$\begin{cases} a_1 + a_2 x_0 + c y_0 = 0; \\ b_1 + b_2 y_0 + c x_0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = (b_1 c - a_1 b_2)/(a_2 b_2 - c^2); \\ y_0 = (a_1 c - a_2 b_1)/(a_2 b_2 - c^2), \end{cases}$$

исключим линейные слагаемые выражения (9).

Использовав (8), получим $x_0 = m_{10}$, $y_0 = m_{01}$.

Алгоритм вычисления ПЭХЛИ, при котором распределение интенсивности рассматривается относительно координаты его энергетического центра $x_0 = m_{10}$, $y_0 = m_{01}$, изложен и стандартизован в [4—5]. В данном случае имеем математическое подтверждение такой целесообразности. Решение системы также соответствует максимуму функции распределения интенсивности, так как обращает в нуль ее частные производные (см. (5)) в точке (x_0, y_0), т. е. $x_m = x_0 = m_{10}$, $y_m = y_0 = m_{01}$. После преобразований с учетом (8) выражение (9) в новой системе координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ примет обычную квадратичную форму

$$\tilde{x}^2/\sigma_{20}^2 + \tilde{y}^2/\sigma_{02}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}r/(\sigma_{02}\sigma_{20}) = 2h(1-r^2)/p. \qquad (10)$$

Для исключения слагаемого, содержащего произведение координат, следует провести поворот системы координат на угол α, удовлетворяющий условию

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = 2c/(a_2 - b_2) = 2\sigma_{11}/(\sigma_{20}^2 - \sigma_{02}^2).$$

При этом (10) можно записать в виде канонического уравнения эллипса

$$\tilde{\tilde{x}}^2/\tilde{a}^2 + \tilde{\tilde{y}}^2/\tilde{b}^2 = 1,$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x}\cos\alpha + \tilde{y}\sin\alpha; \\ \tilde{\tilde{y}} = -\tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha, \end{cases}$$

$\tilde{x} = x - m_{10}$, $\tilde{y} = y - m_{01}$; главные оси $d_x = 2\tilde{a}$, $d_y = 2\tilde{b}$ соответственно

$$d_x = 2\left[(h/p)\left(\sigma_{20}^2 + \sigma_{02}^2 + \gamma\sqrt{\left(\sigma_{20}^2 - \sigma_{02}^2\right)^2 + 4\sigma_{11}^2}\right)\right]^{1/2};$$

$$d_y = 2\left[(h/p)\left(\sigma_{20}^2 + \sigma_{02}^2 - \gamma\sqrt{\left(\sigma_{20}^2 - \sigma_{02}^2\right)^2 + 4\sigma_{11}^2}\right)\right]^{1/2}, \qquad (11)$$

где $\gamma = \left|\sigma_{20}^2 - \sigma_{02}^2\right| / \left(\sigma_{20}^2 - \sigma_{02}^2\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sigma_{20}^2 \ge \sigma_{02}^2; \\ -1, \text{ если } \sigma_{20}^2 < \sigma_{02}^2, \end{cases}$

и распределение интенсивности (4) можно записать как

$$s\left(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}\right) = \exp\left[-\left(\tilde{\tilde{x}}^2/\tilde{a}^2 + \tilde{\tilde{y}}^2/\tilde{b}^2\right)\right].$$

В соответствии со стандартом [3] находят ширину пучка в направлениях главных осей по (11) при $p = -1$ (т. е. когда $R = 0$ и $D_и = -\lg R \Rightarrow \infty$) и $h = -2$, что соответствует определению характеристик пучка по уровню $\tilde{r} = e^{-2}$). Обратим внимание, что достичь значения $p = -1$ на практике невозможно. Любой МИП, измеряющий ПЭХЛИ, имеет нижнюю границу относительного диапазона измерений $R > 0$, а в приведенных в [3] формулах, предполагается, что моменты распределения определяются не по области Ω, а в бесконечных границах, т. е. при $R = 0$. На самом деле, ширина и диаметр лазерного пучка, определяемые по указанным формулам, принимают различные значения в зависимости от R. Для примера рассмотрим эллиптический гауссов пучок вида

$$s(x, y) = \exp\left[-\left(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2\right)\right],$$

тогда $\sigma_{11} = 0$;

$$\sigma_{20}^2 = \iint_\Omega x^2 \exp\left(-\left(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2\right)\right)dxdy \times \left[\iint_\Omega \exp\left(-\left(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2\right)\right)dxdy\right]^{-1};$$

$$\sigma_{02}^2 = \iint_\Omega y^2 \exp\left(-\left(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2\right)\right)dxdy \times \left[\iint_\Omega \exp\left(-\left(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2\right)\right)dxdy\right]^{-1}.$$

При использовании обобщенных полярных координат $x = \sigma_1\rho\cos\varphi$, $y = \sigma_2\rho\sin\varphi$, $dxdy \Rightarrow \sigma_1\sigma_2\rho d\rho d\varphi$ вычисление интегралов по области Ω в пределах $0 \le \rho \le \sqrt{-\ln R}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ приводит к результату

$$\sigma_{20}^2 = \sigma_1^2(1 - R + R\ln R)/(2 - 2R);$$

$$\sigma_{02}^2 = \sigma_2^2(1 - R + R\ln R)/(2 - 2R).$$

Следовательно, если считать, что $p = -1$, $h = -2$, то из (11) получим

$$d_{x|p=-1} = 2\sigma_1\left[2(1 - R + R\ln R)/(1 - R)\right]^{1/2};$$

$$d_{y|p=-1} = 2\sigma_2\left[2(1 - R + R\ln R)/(1 - R)\right]^{1/2}. \qquad (12)$$

В таблице приведены результаты расчетов относительных ширины $d_{x|p=-1}/\sigma_1$ пучка и погрешности $\delta = \left|d_x/\left(\sigma_1\sqrt{8}\right) - 1\right| \cdot 100$ по (12) в зависимости от R для случая, когда в (11) не учитывается ограниченность динамического диапазона, т. е. $p = -1$. Из таблицы следует, что ширина пучка зависит от R. Если $R < 0{,}001$, то погрешность измерения ширины будет менее 1 %. При $R > 0{,}005$ погреш-

Результаты расчетов

Ширина и диаметр пучка, погрешность	R								
	0	0,0005	0,001	0,005	0,010	0,050	0,100	0,500	0,900
$d_{x\|p=-1}/\sigma_1$	$\sqrt{8}\approx 2{,}828$	2,823	2,818	2,791	2,762	2,596	2,439	1,567	0,643
δ, %	0	0,190	0,346	1,340	2,350	8,220	13,740	44,600	77,200
$d_{\|p=-1}/\sigma$	$\sqrt{48}\approx 6{,}928$	6,748	6,647	6,190	5,850	4,590	3,790	1,300	0,200
δ, %	0	2,600	4,050	10,580	15,400	33,700	45,200	81,700	96,700
d/σ	$\sqrt{48}\approx 6{,}928$	6,798	6,729	6,271	6,219	5,415	4,885	2,830	1,121
δ, %	0	1,870	2,870	9,483	10,230	21,830	29,500	59,150	83,800

ность δ резко возрастает. Полученные формулы (11) учитывают и уменьшают эту погрешность при помощи введения поправки $p = RS/m_{0x0y} - 1$. Для определения p на практике необходимо дополнительно найти площадь S области Ω существования распределения на уровне R, что легко осуществимо наряду с вычислением моментов. Так как $m_{0x0y} = \iint_{\Omega} s(x, y)dxdy = Ss(x_c, y_c)$, где $x_c, y_c \in \Omega$, то можно записать $p = R/s(x_c, y_c) - 1$. Учитывая, что $0 \le R \le s(x_c, y_c) \le 1$, то всегда $-1 \le p \le 0$. Для рассматриваемого примера $p = -(1 - R + R\ln R)/(1 - R)$. Подставим p в (11) при $h = -2$ и получим, что $d_x = 2\sqrt{2}\sigma_1$ и $d_y = 2\sqrt{2}\sigma_2$ не зависят от R и $\delta = 0$. Таким образом, для эллиптического гауссова пучка погрешность, связанная с ограниченностью динамического диапазона, полностью исключена. Для других распределений, удовлетворяющих условию $\partial s(x, y)/\partial x = 0$, $\partial s(x, y)/\partial y = 0$, когда $s(x, y) = 0$, погрешность исключена не полностью, но будет меньше, чем без учета поправки p.

Для примера рассмотрим распределение экспоненциального вида

$$s(x, y) = \exp\left(-\sqrt{x^2 + y^2}/\sigma\right).$$

В этом случае $\sigma_{20}^2 = \sigma_{02}^2 = \tilde{\sigma}^2$, $\sigma_{11} = 0$ и $d_x = d_y = d = 2\tilde{\sigma}\sqrt{2h/p}$. Найдем d по формулам без учета ограниченности динамического диапазона и при $0 \le \rho \le -\sigma\ln R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$:

$$d_{|p=-1} = 2\sqrt{2}\,\sigma\left[\frac{3\left(2R\ln R - R\ln^2 R - 2R + 2\right) + R\ln^3 R}{1 - R + R\ln R}\right]^{1/2};$$

$$\delta = \left|\,d_{|p=-1}\Big/\left(\sigma\sqrt{48}\right) - 1\right| \cdot 100.$$

С учетом поправки

$$p = \left[-2R\ln R + R\ln^2 R + 2R - 2\right]\Big/\left[2(1 - R + R\ln R)\right],$$

$$d = 4\sigma\left[3 + \frac{R\ln^3 R}{2 - 2R + 2R\ln R - R\ln^2 R}\right]^{1/2};$$

$$\delta = \left|\,d\Big/\left(\sigma\sqrt{48}\right) - 1\right| \cdot 100.$$

Результаты расчетов относительного диаметра $d_{|p=-1}/\sigma$ пучка и погрешности δ без учета ограниченности динамического диапазона, т. е. при отсутствии поправки ($p = -1$) представлены в таблице. Там же приведены данные расчетов d/σ при наличии поправки. Таким образом, введение поправки уменьшает погрешность измерения диаметра пучка, что особенно существенно при $R > 0{,}001$.

Заключение. Распределение Пирсона является полезной моделью для измерения ПЭХЛИ, основанных на вычислении начальных моментов распределения. Полученные в работе формулы дают возможность уточнить алгоритм определения ПЭХЛИ, рассматривая моменты первого и второго порядков относительного распределения интенсивности, измеренные по заданному уровню, определяемому нижней границей R диапазона измерений МИП. Вводимая в расчеты поправка p позволяет уменьшить погрешность определения ПЭХЛИ, а в случае эллиптических гауссовых пучков ее полностью исключить. Представляется целесообразным учесть ее при разработке новой редакции соответствующего стандарта.

Литература

1. **Колбановская Н. А., Котюк А. Ф., Райцин А. М.** Анализ пространственного распределения энергии в поперечном сечении пучка лазерного излучения // Измерительная техника. 1983. № 2. С. 23—24; **Kolbanovskaya N. A., Kotyuk A. F., Raitsin A. M.** Analysis of the spatial energy distribution in the cross section of a laser radiation beam // Measurement Techniques. 1983. V. 26. N 2. P. 109—111.
2. **Котюк А. Ф., Райцин А. М., Рубинштейн В. М.** Метод представления распределений интенсивности в поперечном сечении пучка многомодового лазерного излучения // Фотометрия и ее метрологическое обеспечение: Тез. докл. IV Всесоюз. науч.-техн. конф. М.: ВНИИОФИ, 1982. С. 199—200.
3. **ГОСТ Р ИСО 11146—2008.** Лазеры и лазерные установки (системы). Методы измерений ширин, углов расходимости и коэффициентов распространения лазерных пучков. Ч. 1—3.
4. **ГОСТ 26086—84.** Лазеры. Методы измерения диаметра пучка и энергетической расходимости излучения.
5. **Духанина М. И. и др.** О Государственных стандартах «Лазеры. Методы измерений относительного распределения плотности энергии /мощности/ излучения» и «Лазеры. Методы измерения диаметра пучка и энергетической расходимости излучения» // Фотометрия и ее метрологическое обеспечение: Тез. докл. V Всесоюз. науч.-техн. конф. М.: ВНИИОФИ, 1984. С. 5.

Дата принятия 19.03.2013 г.