

5. Machin G. e. a. Concerted International Project to Establish High-Temperature Fixed Points for Primary Thermometry // Int. J. Thermophys. 2007. V. 28. N 6. P. 1976—1982.

6. Samoylov M. e. a. High accuracy radiation TSP-type thermometers for radiometric scale realization in the temperature range from 600 to 3200 °C // AIP Conf. Proc. 2003. V. 684. P. 583.

7. Khlevnoy B. B. e. a. Development of high-temperature blackbodies and furnaces for radiation thermometry // Int. J. Thermophys. 2011. V. 32. N 7—8. P. 1686—1696.

8. ГОСТ 9411—91. Стекло оптическое цветное. Технические условия.

Дата принятия 13.09.2012 г.

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

621.142.681

Шум квантования дельта-сигма аналого-цифрового преобразователя для различных законов изменения входного сигнала

В. И. ДИДЕНКО*, А. В. ИВАНОВ**, А. С. ВОРОНОВ**

* Национальный исследовательский университет «МЭИ», Москва, Россия, e-mail: didenkovi@mail.ru

** ОАО «Московское конструкторское бюро «Компас», Москва, Россия

Рассмотрены шумы квантования на выходах модулятора и цифрового фильтра дельта-сигма аналого-цифрового преобразователя. Аналитическое и имитационное моделирование использовано при различных законах изменения входного сигнала и для различной реализации цифрового фильтра.

Ключевые слова: дельта-сигма аналого-цифровой преобразователь, шум квантования.

Quantization noise is investigated at the outputs of a modulator and a digital filter for delta-sigma analog-to-digital converter (ADC). Modeling and simulation were used for different laws of input signal change and several realizations of the digital filter.

Key words: delta-sigma ADC, quantization noise.

Дельта-сигма аналого-цифровой преобразователь (ДСАЦП) состоит из дельта-сигма модулятора (ДСМ) и цифрового фильтра (ЦФ). Модулятор можно рассматривать как стохастический аналого-цифровой преобразователь (АЦП) [1]. Это означает, что для постоянного входного сигнала на его выходе образуется последовательность кодов, причем входной сигнал влияет на вероятность появления того или иного значения кода. Для многих модуляторов имеется только два выходных кода: 1 и -1 . Для ДСМ с единичным номинальным коэффициентом передачи код 1 соответствует опорному напряжению $V_{оп}$, а код -1 — тому же опорному напряжению с обратным знаком. Если ДСМ имеет коэффициент передачи K_m , то код 1 соответствует напряжению, в K_m раз меньше опорного. В дальнейшем полагаем $K_m = 1$.

По аналогии с детерминированными АЦП [2] шум квантования ДСМ ранее предполагали распределенным по закону равномерной плотности [3, 4] вне зависимости от входно-

го сигнала V_X . Среднее квадратическое отклонение (СКО) для ДСМ принимали, как и для АЦП с детерминированной функцией преобразования:

$$\sigma_q^2 = 1/3. \quad (1)$$

Ошибочность этого, к сожалению общепринятого, подхода была показана в [1, 5—7]. Истинное значение СКО шума квантования согласно аналитическому и имитационному моделированию для ДСМ при постоянном входном сигнале $X = V_X/V_{оп}$ находится как [1]:

$$\sigma_q^2 = 1 - X^2. \quad (2)$$

Нетрудно заметить, что при $-1 \leq X \leq 1$ отличия между (1) и (2) могут быть весьма значительными.

Задачей данной статьи является нахождение СКО шума квантования на выходе модулятора и цифрового фильтра (ЦФ) при различных видах входного сигнала ДСАЦП. Электронный шум компонентов при этом не учитывается, при $K_m = 1$ он обычно несущественен по сравнению с шумом квантования [8].

Шум квантования на выходе ДСМ. Как было показано в [1], погрешность шума квантования Δ является функцией входного сигнала X :

$$\Delta = \varphi(X).$$

Тогда для любого входного сигнала X с функцией распределения $f_1(X)$ погрешность Δ принимает два значения Δ_1 и Δ_2 с вероятностями P_1 и P_2 , соответственно [1]. Условная плотность вероятности погрешности Δ для фиксированного сигнала X_{ϕ} будет выражаться через δ -функцию (функцию Дирака) [9]:

$$f_2(\Delta | X_{\phi}) = \delta(\Delta - \varphi(X_{\phi})).$$

Плотность вероятности совместного распределения двух случайных величин X и $\Delta = \varphi(X)$ [9]:

$$f(X, \Delta) = f_1(X)\delta(\Delta - \varphi(X)),$$

при этом плотность вероятности

$$f_2(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(X)\delta(\Delta - \varphi(X))dX. \quad (3)$$

Если известны закон распределения входного сигнала и зависимость погрешности от входного сигнала, то в результате интегрирования можно найти закон распределения погрешности шума квантования. Далее будут приведены примеры расчетов для нескольких наиболее распространенных законов распределения входного сигнала.

Постоянный входной сигнал. Для этого сигнала погрешность при случайном выборе момента времени описывается дискретным двузначным законом [1].

Равномерно распределенный входной сигнал на интервале $[a, b]$. Его плотность вероятности имеет вид

$$f_1(X) = (b - a)^{-1}. \quad (4)$$

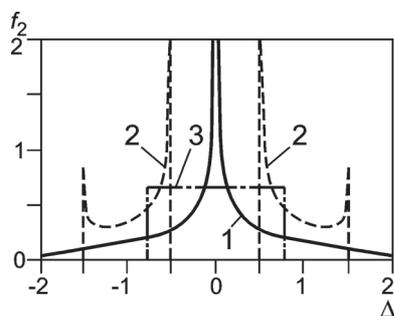


Рис. 1. Плотности вероятности погрешности шума квантования на выходе дельта-сигма модулятора:

1, 2 — при синусоидальном входном сигнале для двух амплитуд $A = 1$ и $0,5$; 3 — по теории [3, 4]

Закон распределения погрешности шума квантования [9]:

$$f_2(\Delta) = P(\Delta) / (b - a),$$

где $P(\Delta)$ — функция распределения вероятности погрешности шума квантования для постоянного входного сигнала

Используя выражения из [1], находим

$$f(\Delta) = \begin{cases} (1 + 0,5|\Delta|) / (b - a) & \text{для } -1 - b \leq \Delta \leq -1 - a \\ \text{и } 1 - b < \Delta \leq 1 - a; \\ 0 & \text{для } -\infty < \Delta < -1 - b, -1 - a < \Delta < 1 - b, \\ 1 - a < \Delta < \infty. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно (5) СКО погрешности шума квантования выражается как

$$\sigma^2 = 1 - (a^2 + ab + b^2) / 3. \quad (6)$$

При $a = -1$ и $b = 1$ зависимость (6) имеет вид треугольного

закона распределения (закон Симпсона) с СКО $\sigma = \sqrt{2/3}$.

Синусоидальный входной сигнал $X = A \sin \Omega$, где амплитуда A выбирается в диапазоне $0 - 1$. Если погрешность ДСМ реализуется в случайные моменты времени, то Ω становится случайной величиной, распределенной по закону равномерной плотности. Плотность вероятности для Ω будет равна $1/(2\pi)$ в диапазоне $0 - 2\pi$. Чтобы найти плотность вероятности $f_1(X)$, сначала требуется определить кумулятивную функцию распределения

$$F_1(X) = \begin{cases} 0 & \text{для } X < -A; \\ 0,5 + \pi^{-1} \arcsin(X/A) & \text{для } -A \leq X \leq A; \\ 1 & \text{для } X > A. \end{cases}$$

Плотность вероятности $f_1(X)$ можно получить, взяв производную от $F_1(X)$. Тогда

$$f_1(X) = \begin{cases} 0 & \text{для } |X| > A; \\ \left(\pi \sqrt{A^2 - X^2} \right)^{-1} & \text{для } -A \leq X \leq A. \end{cases}$$

С учетом (3) и выражений из [1] плотность вероятности на выходе ДСМ представим в виде

$$f_2(\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{для } |\Delta| > 1 + A \text{ и } |\Delta| < 1 - A; \\ \frac{1 - 0,5|\Delta|}{\pi \sqrt{A^2 - (1 - |\Delta|)^2}} & \text{для } 1 - A < |\Delta| < 1 + A. \end{cases} \quad (7)$$

Кривые 1 и 2 на рис. 1 иллюстрируют аналитическую зависимость (7) для двух значений амплитуды $A = 1$ и $0,5$. На рис. 1 также представлен равномерный закон распределения (кривая 3), соответствующий теории [3, 4]; нетрудно заметить, что он дает значительные отклонения от истинных законов.

Из (7) можно найти СКО погрешности шума квантования

$$\sigma^2 = 1 - 0,5A^2.$$

Ранее в [1] уже было получено такое выражение для синусоидального входного сигнала, но другим путем — из частотного анализа ДСМ.

Нормально распределенный входной сигнал (закон Гаусса). Его плотность вероятности описывается выражением

$$f_1(X) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (8)$$

где σ_X , M_X — СКО и математическое ожидание входного сигнала.

Чтобы ДСМ остался в линейной области $-1 \leq X \leq 1$, входной нормально распределенный сигнал должен быть усеченным: $-a \leq X - M_X \leq a$, $0 \leq a \leq 1$. В этом случае плотность вероятности

$$f_1(X) = \frac{\lambda}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-M_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (9)$$

где $|M_X| \leq 1 - a$.

Значения коэффициента λ для некоторых наиболее распространенных диапазонов усечения a представлены в табл. 1.

Таблица 1

Вероятности P попадания коэффициента λ в интервал $M_X \pm a$ для распределений по (8) и (9)

| a | 1σ | 2σ | 3σ | 4σ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| P | 0,683 | 0,954 | 0,997 | 1,00 |
| λ | 1,465 | 1,048 | 1,003 | 1,000 |

С учетом (3) и выражений из [1] получаем

$$f_2(\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{для } 1+a \leq |\Delta| \leq \infty \text{ и } -1+a \leq \Delta \leq 1-a; \\ \frac{\lambda(1-0,5|\Delta|)}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-|\Delta|+1-M_X)^2}{2\sigma_X^2}} & \text{для } 1-a < |\Delta| < 1+a. \end{cases} \quad (10)$$

В качестве примера на рис. 2 показаны плотности вероятности выходного сигнала ДСМ, рассчитанные по (10) для входных сигналов с $M_X = 0$, $\sigma_X = 0,2$ и $0,3$, $\lambda = 1$, $a = 0,9$. Как следует из рис. 2, плотность вероятности очень сильно отличается от равномерного закона распределения [3, 4].

Результаты имитационного моделирования (ИМ). Для проверки полученных аналитических зависимостей (5), (6) использовали ИМ в прикладном пакете программ MatLab со стандартной моделью ДСАЦП. На вход ДСМ подавался равномерно распределенный на интервале $[-1; 1]$ случайный сигнал, как это было сделано в [1]. Абсолютная погрешность Δ_Δ между результатами ИМ и расчетов по (5) не превышает 0,041; ее СКО σ_Δ является показателем близости этих результатов и в идеальном случае $\sigma_\Delta = 0$. Также вычисляли $\sigma_{ИМ}$ — СКО сигнала на выходе ДСМ, найденного путем ИМ, и разность $\sigma_{ИМ} - \sigma$, где $\sigma = \sqrt{2/3} = 0,817$ по (6). Результаты в виде функции от числа N точек входного сигнала представ-

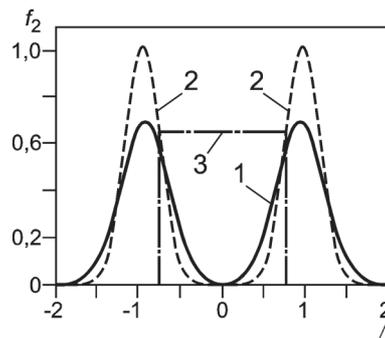


Рис. 2. Плотности вероятности погрешности шума квантования на выходе дельта-сигма модулятора:

1, 2 — при входном сигнале, распределенном по нормальному усеченному закону для двух значений СКО $\sigma_X = 0,3$ и $0,2$; 3 — по теории [3, 4]

лены в табл. 2, откуда следует, что при увеличении N различие между результатами ИМ и аналитических расчетов стабильно снижается и может быть сведено к сколь угодно малой величине.

Таблица 2

Сравнение результатов аналитических расчетов с результатами ИМ при изменении числа точек входного равномерно распределенного сигнала на интервале $[-1; 1]$

| СКО | Число точек входного сигнала | | | | |
|----------------------------|------------------------------|--------|--------|--------|--------|
| | 10 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 |
| σ_Δ | 0,985 | 0,329 | 0,106 | 0,035 | 0,0118 |
| $\sigma_{ИМ}$ | 0,467 | 0,775 | 0,832 | 0,820 | 0,818 |
| $\sigma_{ИМ} - \sigma$, % | -42,8 | -5,14 | 1,84 | 0,367 | 0,122 |

Аналогичным образом проверяли полученные аналитические зависимости для синусоидального и нормального входных сигналов с учетом требований [10]. Как и в случае с равномерно распределенным входным сигналом, расхождения между результатами ИМ и аналитическими расчетами непрерывно уменьшаются при увеличении числа точек эксперимента и могут быть сведены к сколь угодно малой величине.

Шум квантования на выходе ЦФ. В известных авторам работах закон распределения шума квантования на выходе ЦФ принимают нормальным и для аналитического расчета его СКО полагают, что полоса частот ЦФ равна половине частоты выдачи данных на выходе этого фильтра. Последняя обычно (хотя и не всегда) совпадает с частотой первой режекции фильтра, на которой его коэффициент передачи впервые обращается в ноль. Отношение частоты стробирования компаратора к частоте выдачи данных называется коэффициентом перевыборки. Несмотря на это для ЦФ принято указывать полосу пропускания на уровне спада амплитудно-частотной характеристики на 3 или 6 дБ.

Рассмотрим фактические законы распределения шума квантования на выходе ЦФ (выходе ДСАЦП). Реальный ЦФ начинает подавлять шум, например, на уровне 3 дБ, уже на частотах около 1/4 частоты выдачи данных, но при этом пропускает шум на частотах выше частоты первой режекции. Для устранения этих неоднозначных эффектов было введено по-

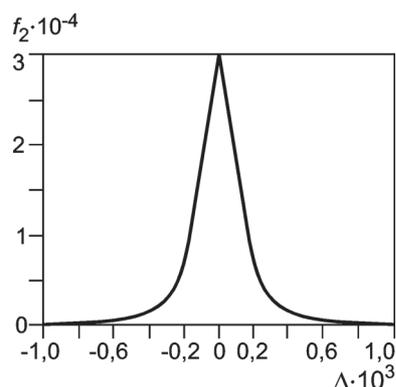


Рис. 3. Плотность вероятности погрешности шума квантования на выходе ДСАЦП для равномерно распределенного на интервале [-1; 1] входного сигнала

нятие эквивалентной полосы пропускания ЦФ, которая позволяет найти его реальную полосу пропускания с учетом оценки шума квантования.

Под эквивалентной полосой пропускания фильтра $f_{ЭФ}$ будем понимать такую полосу частот $0 - f_{ЭФ}$, в которой шум квантования на выходе ДСМ равен шуму квантования во всей полосе частот на выходе ЦФ. Для определения эквивалентной полосы необходимо подать на вход ДСАЦП тестовый сигнал (например, синусоидальный) и построить зависимость СКО шума на выходе ДСМ в функции частоты (как это было сделано для постоянных сигналов [1, формула (12), рис. 3]). Далее необходимо найти значение шума на выходе ЦФ и по имеющейся зависимости для выхода ДСМ определить частоту, при которой СКО шума на входе и выходе ЦФ равны.

Теперь, когда точно определена полоса пропускания фильтра, можно сравнить результаты аналитических выражений с данными ИМ. Если на вход ДСАЦП подать сигнал, подчиняющийся закону равномерного распределения в диапазоне [-1; 1], то согласно (5) закон распределения на выходе ДСМ будет треугольным. Для такого закона СКО $\sigma = 0,817$ в соответствии с (6) и распределено по частоте согласно [1, формула (6)]. После прохождения такого сигнала через стандартный каскад ЦФ с эквивалентной полосой пропускания 2,11 кГц (при частоте выборки 512 кГц и коэффициенте перевыборки $R = 64$) СКО погрешности шума квантования по [1, формула (6)] должно быть равно $0,89 \cdot 10^{-3}$. Сравним результаты аналитического расчета с результатами ИМ.

Для этого при ИМ на вход ДСАЦП (со стандартным весовым КИХ-фильтром 32-го порядка, формируемым функцией FIR1 из пакета MatLab, имеющим эквивалентную полосу пропускания 2,11 кГц) подавался случайный сигнал, равномерно распределенный на интервале [-1; 1]. На рис. 3 показан закон распределения выходного сигнала ДСАЦП, его СКО составляет $0,85 \cdot 10^{-3}$, т. е. отличается от полученного аналитическим методом менее чем на 5 %. Как следует из рис. 3, закон распределения качественно похож на нормальный. Используя данные ИМ, гипотезу о нормальном законе проверяли при помощи тестов Колмогорова—Смирнова [11] и Жака—Бера [12]. Согласно результатам тестов это распределение не является нормальным ни при каком уровне значимости. Таким образом, расхожее предположение о нормальном законе распределения погрешности шума квантования на выходе ДСАЦП неверно.

Имитационное моделирование также проводили для каскадного ЦФ скользящего среднего (СС) с эквивалентной полосой пропускания 1,06 кГц, что в 2,2 раза меньше, чем у фильтра FIR1. Частота выборки и коэффициент перевыборки остались без изменений. Согласно [1, формула (6)] СКО должно быть $0,32 \cdot 10^{-3}$. Полученная при ИМ зависимость близка к изображенной на рис. 3. Значение СКО составляет $0,28 \cdot 10^{-3}$, что отличается на 13 % от рассчитанного по [1, формула (6)].

В табл. 3 приведены неопределенности (доверительные интервалы) погрешности шума квантования на выходе ДСАЦП для заданных вероятностей двух разных ЦФ (FIR1 и СС) с равномерно распределенным входным сигналом на интервале [-1; 1] и дано сравнение с нормальным законом распределения.

Таблица 3

Неопределенности погрешности шума квантования для разных ЦФ и нормального закона распределения

| P | Значение неопределенности для | | |
|-------|----------------------------------|-------------------|------------------|
| | нормального закона распределения | FIR1 | СС |
| 0,68 | $\pm 1\sigma$ | $\pm 0,078\sigma$ | $\pm 0,18\sigma$ |
| 0,95 | $\pm 2\sigma$ | $\pm 0,52\sigma$ | $\pm 0,95\sigma$ |
| 0,997 | $\pm 3\sigma$ | $\pm 6,4\sigma$ | $\pm 5,8\sigma$ |

Из табл. 3 следует, что в случае фильтра FIR1 для весьма популярной в технических измерениях вероятности $P = 0,95$ неопределенность в 3,8 раза меньше, чем для нормального закона. Поэтому для достижения данной вероятности значения СКО шума на выходе ДСАЦП (они обычно нормируются в спецификациях) достаточно умножить на коэффициент 0,52, а не на 2, как принято в метрологии. Если все же используется множитель 2, то вероятность оказывается значительно выше (0,975). Однако неопределенность для вероятности $P = 0,997$, также используемой в метрологии для оценки максимальной погрешности, оказывается в 2,1 раза больше, чем у нормального закона. Поэтому для достижения этой вероятности значения СКО шума на выходе ДСАЦП (обычно их приводят в спецификациях) необходимо умножить на коэффициент 6,4, а не на 3, как принято в метрологии. Если все же используется множитель 3, то вероятность оказывается значительно ниже (0,985). Для каскадного соединения ЦФ СС полученные значения для вероятностей 0,68 и 0,95 несколько ближе к значениям нормального закона.

Для выбранных фильтров результаты ИМ для синусоидального и нормального входных сигналов дали схожий вид закона распределения и схожее расхождение с нормальным законом.

Таким образом, для нахождения неопределенности погрешности шума квантования (при заданной вероятности) необходимо полученное СКО умножать на коэффициент, зависящий от применяемого ЦФ. Этот коэффициент может отличаться в два и более раз от принятого для нормального закона.

Выводы. Предложенный аналитический метод позволяет найти закон распределения погрешности шума квантования на выходе ДСМ для любого известного закона изменения входного сигнала. Результаты аналитического и имитационного моделирования согласуются и существенно от-

личаются от приведенных в литературе. Закон распределения погрешности шума квантования на выходе ДСАЦП для разных входных сигналов имеет схожий вид, но при этом отличается как от закона распределения на выходе ДСМ, так и от нормального закона.

Тип применяемого ЦФ не оказывает существенного влияния на вид закона распределения погрешности шума квантования на выходе ДСАЦП, но влияет на параметры этого закона. Введенное понятие эквивалентной полосы ЦФ (в общем случае она отличается от принятых в литературе параметров) позволяет с приемлемой точностью оценивать СКО для ДСАЦП. Неопределенность погрешности шума квантования (неопределенность преобразования) получается путем умножения СКО на коэффициент, зависящий от доверительной вероятности, закона изменения входного сигнала и параметров ЦФ. Полученный диапазон может отличаться от нормального в два и более раз.

Л и т е р а т у р а

1. **Диденко В. И., Иванов А. В.** Метрологический подход к исследованию шума квантования // Измерительная техника. 2009. № 5. С. 51—55; **Didenko V. I., Ivanov A. V.** A metrological approach to the investigation of the quantization noise of delta-sigma ADCs // Measurements Techniques. 2009. V. 52. N 5. P. 521—527.
2. **Bennett W. R.** Spectra of Quantized Signals // Bell Systems Techn. J. 1948. V. 27. P. 446—472.
3. **Шахов Э. К.** $\Sigma\Delta$ -АЦП: процессы передискретизации, шейпинга шума квантования и децимации // Датчики и системы. 2006. № 11. С. 50—57.

4. **Sigma-Delta ADC's&DAC's** // Appl. Note AN-283. Analog Devices (USA), 1993 [Электрон. ресурс]. http://www.analog.com/static/imported-files/application_notes/292524291525717245054923680458171AN283.pdf (дата обращения: 16.12.2012 г.).

5. **Диденко В. И., Тепловодский А. В., Иванов А. В.** Точность моделирования измерительных устройств // Датчики и системы. 2009. № 7. С. 56—62.

6. **Didenko V. I., Ivanov A. V., Teplovodskiy A. V.** New approach to theory of sigma-delta analog-to-digital converters // Proc. 15th IMECO TC4 Symp. and 12th Workshop on ADC Modelling and Testing. Iasi (Romania), 2007. P. 3—8.

7. **Didenko V. I., Ivanov A. V.** Distribution Laws of Quantization Noise for Sigma-Delta Modulator // Proc. 16th IMECO TC4 Symp. and 13th Workshop on ADC Modelling and Testing. Florence (Italy), 2008. P. 995—1000.

8. **Didenko V. I., Movchan A. L.** Minimization of number of metrological parameters for data acquisition systems // IEEE Trans. Instrum. and Measur. 2002. V. 51. P. 88—91.

9. **Пугачев В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

10. **IEEE 1241:1996.** Standard of terminology and test methods for analog-to-digital converters.

11. **Massey F. J.** The Kolmogorov—Smirnov test for goodness of fit // J. American Statistical Association. 1951. V. 46. N 253. P. 68—78.

12. **Jarque C. M., Bera A. K.** A test for normality of observations and regression residuals // Int. Statistical Rev. 1987. V. 55. N 2. P. 163—172.

Дата принятия 14.01.2013 г.

621.317.421:621.317.445

Регистрация сверхслабого магнитного поля низкой частоты магнитомодуляционным датчиком

О. Л. СОКОЛ-КУТЫЛОВСКИЙ

Институт геофизики УрО РАН, Екатеринбург, Россия, e-mail: s-k52@mail.ru

Показано, что автопараметрический датчик магнитной индукции с сердечниками из аморфного ферромагнитного сплава с компенсированной продольной магнитострикцией в условиях малых внешних магнитных шумов на частотах выше 1 Гц может регистрировать магнитное поле амплитудой 0,3 пТл с максимальной плотностью шума на частотах выше 3 Гц, не превышающей $0,2 \text{ пТл} \cdot \text{Гц}^{-1/2}$.

Ключевые слова: слабое магнитное поле, магнитомодуляционный датчик, аморфный ферромагнетик.

It is shown that the magnetic modulation sensor with cores from amorphous ferromagnetic alloy with compensated longitudinal magnetostriction in conditions of small external magnetic noises at frequencies higher than 1 Hz is capable to register the magnetic field with amplitude 0,3 pT. The density of magnetic noise at frequencies above 3 Hz does not exceed $0,2 \text{ pT} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$.

Key words: weak magnetic field, magnetic modulation sensor, amorphous ferromagnetic.

Исследования физических свойств аморфных ферромагнитных сплавов, полученных из расплава методом быстрой закалки, выявили их уникальные магнитные и магнитоупругие характеристики. Это позволило на основе аморфных ферромагнетиков создать магнитомодуляционные датчики,

предназначенные для обнаружения и измерения переменного магнитного поля низких частот (от 0,01 Гц до 100 кГц) в динамическом диапазоне измерений $10^{-11} — 10^{-4}$ Тл [1]. При этом порог чувствительности, как правило, был ограничен уровнем внешнего магнитного шума и шумом, создаваемым