

Предлагаем вниманию читателей подборку статей по материалам шестого международного семинара «Математическая, статистическая и компьютерная поддержка качества измерений», который проходил в Санкт-Петербурге во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева в июне 2012 г. В работе семинара приняли участие специалисты национальных метрологических институтов России, Украины, Белоруссии, Германии, Италии, Болгарии, Словакии. Основная задача семинара — развитие подходов и методов оценивания результатов измерений как в метрологии, так и в прикладных областях. Рассматриваются методологические аспекты применения теоретико-вероятностных методов, использование байесовского подхода, методов регрессионного анализа, статистических методов планирования эксперимента и принятия решений. Объектами применения математического аппарата являются, прежде всего, задачи эталонных измерений (сличения и калибровка эталонов), межлабораторных сличений, измерений при контроле и принятии решений (идентификация, распознавание). Выработка согласованного подхода к решению перечисленных задач необходима для взаимного признания результатов измерений, что важно в условиях глобализации мировой экономики. Семинар проводится под эгидой КООМЕТ с участием членов Рабочей группы по теоретической метрологии НТКМетр стран—участниц СНГ.

621.753.38

Анализ результатов сличения двух эталонов

Э. И. ЦВЕТКОВ

С.-Петербургский государственный электротехнический университет (ЛЭТИ),
С.-Петербург, Россия, e-mail: er-cvetkov@mail.ru

Рассмотрены два подхода к интерпретации результатов сличений двух эталонов, отличающихся составом используемой априорной информации и методологией обоснования решений, принимаемых по итогам сличения.

Ключевые слова: эталон, сличения, ошибки 1-го и 2-го рода, метрологический анализ.

Two approaches to the interpretation of results of comparisons of two measurement standards different by composition of a priori information and methodology of decisions based on comparison results are considered.

Key words: measurement standard, comparison, type I and II errors, metrological analysis.

При сличении двух эталонов и невозможности проведения калибровки (поверки) соответствие характеристик их полных погрешностей (суммы случайной и неисключенной систематической составляющих) заявленным определяют разностью

$$\delta\lambda_{12} = \lambda_1 - \lambda_2,$$

где λ_1, λ_2 — результаты измерений, получаемые при использовании первого и второго эталонов, соответственно.

Из [1 и др.] следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_{1н} + \Delta_{\text{сист}}\lambda_1 + \Delta_{\text{сл}}\lambda_1;$$

$$\lambda_2 = \lambda_{2н} + \Delta_{\text{сист}}\lambda_2 + \Delta_{\text{сл}}\lambda_2,$$

где $\lambda_{1н}, \lambda_{2н}$ — номинальные значения результатов, формируемых эталонами; при сличении мер формирование заклю-

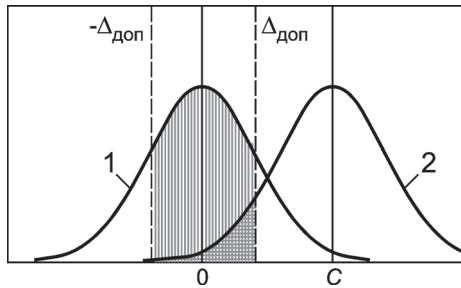
чается в воспроизведении значений, а при сличении эталонных средств измерений (СИ) — в измерении одного и того же значения величины, воспроизводимой тестовым генератором (средством сравнения); $\Delta_{\text{сл}}\lambda_1, \Delta_{\text{сл}}\lambda_2, \Delta_{\text{сист}}\lambda_1, \Delta_{\text{сист}}\lambda_2$ — случайные и неисключенные систематические погрешности результатов, формируемых эталонами, соответственно.

Выражение для $\delta\lambda_{12}$ представим в следующем виде:

$$\delta\lambda_{12} = \lambda_{1н} + \Delta_{\text{сист}}\lambda_1 + \Delta_{\text{сл}}\lambda_1 - \lambda_{2н} - \Delta_{\text{сист}}\lambda_2 - \Delta_{\text{сл}}\lambda_2 + \Delta_{\text{комп}}\lambda_{12}.$$

Здесь $\Delta_{\text{комп}}\lambda_{12}$ — погрешность, вносимая компаратором.

Поскольку $\lambda_{1н}$ и $\lambda_{2н}$ известны, разность $\lambda_{1н} - \lambda_{2н}$ можно исключить. Предположив также известными плотности распределений вероятности $w(\Delta_{\text{сл}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сл}}\lambda_2)$, определим условную плотность распределения вероятности $w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12})$ $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = \Delta_{\text{сист}}\lambda_1 - \Delta_{\text{сист}}\lambda_2$ для фиксированного



Гауссовы распределения плотности вероятности:

1 — с нулевым математическим ожиданием; 2 — с математическим ожиданием, равным C

значения разности неисключенных систематических погрешностей $\Delta_{\text{сист}}\lambda_1$ и $\Delta_{\text{сист}}\lambda_2$. Приняв значение $\Delta_{\text{компл}}\lambda_{12}$ пренебрежимо малым, получим

$$w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12}) = w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1 - \Delta_{\text{сп}}\lambda_2|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12}),$$

где $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1 - \Delta_{\text{сп}}\lambda_2) = w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1) w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2)$ — композиция распределений $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2)$.

На рисунке представлены два гауссовых распределения — с нулевым математическим ожиданием $w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = 0)$ (кривая 1) и с математическим ожиданием, равным C , $w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C)$ (кривая 2).

Вероятность того, что при $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C$ и установленной области $[-\Delta_{\text{доп}}, \Delta_{\text{доп}}]$ принимается решение о том, что погрешности не превышают допустимых пределов, определим как

$$P[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta_{\text{доп}}, \Delta_{\text{доп}}]|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C] = \int_{-\Delta_{\text{доп}}}^{\Delta_{\text{доп}}} w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C) d\delta\lambda_{12}. \quad (1)$$

Это вероятность ошибки 1-го рода P_I (пропуск значимых погрешностей). Значение $\Delta_{\text{доп}}$ устанавливаем в соответствии с допустимой вероятностью ошибки 1-го рода $P_{\text{допI}}$. В этом случае

$$\Delta_{\text{доп}} = \text{rad} \left(\int_{-\Delta_{\text{доп}}}^{\Delta_{\text{доп}}} w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C) d\delta\lambda_{12} = P_{\text{допI}} \right).$$

Значения $P_{\text{допI}}$ и C находим эвристически.

Так как кроме ошибки 1-го рода необходимо учитывать и возможность ошибок 2-го рода (решение о том, что $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C$, когда систематические ошибки отсутствуют), вероятность которых

$$P[\delta\lambda_{12} \notin [-\Delta_{\text{доп}}, \Delta_{\text{доп}}]|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = 0] = 1 - \int_{-\Delta_{\text{доп}}}^{\Delta_{\text{доп}}} w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = 0) d\delta\lambda_{12}, \quad (2)$$

$\Delta_{\text{доп}}$ можно определить и в соответствии с допустимой вероятностью ошибок 2-го рода $P_{\text{допII}}$, устанавливаемой также на эвристической основе. В этом случае

$$\Delta_{\text{доп}} = \text{rad} \left(1 - \int_{-\Delta_{\text{доп}}}^{\Delta_{\text{доп}}} w(\delta\lambda_{12}|\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = 0) d\delta\lambda_{12} \right).$$

Вероятности ошибок (1) и (2) зависят от соотношения значений характеристик флуктуаций $\delta\lambda_{12}$ и $\Delta_{\text{доп}}$. При использовании многократных сличений эталонов с усреднением формируемых $\delta\lambda_{12}$:

$$\delta_{\Sigma}\lambda_{12} = \sum_{i=1}^N \delta_i\lambda_{12} / N,$$

интенсивность флуктуаций получаемого результата соответствующим образом уменьшается (дисперсия $\delta_{\Sigma}\lambda_{12}$ меньше дисперсии $\delta\lambda_{12}$ в N раз). Соответственно уменьшаются и вероятности ошибок 1-го и 2-го рода при фиксированных $\Delta_{\text{доп}}$.

Несомненным достоинством рассмотренного подхода является то, что с ростом $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12}$ ($\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} \geq C$) вероятность ошибки 1-го рода уменьшается.

Однако следует, иметь в виду, что принятие решения о соответствии неисключенных систематических погрешностей условию $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = \Delta_{\text{сист}}\lambda_1 - \Delta_{\text{сист}}\lambda_2 \leq C$ показывает, что подобный результат может достигаться при недопустимо больших значениях $\Delta_{\text{сист}}\lambda_1$ и $\Delta_{\text{сист}}\lambda_2$. Желательно по определенному значению $\delta\lambda_{12}$ иметь возможность судить о вероятности того, что обе неисключенные систематические погрешности меньше допустимого уровня. Иначе говоря, необходимо принять условную вероятность

$$P[|\Delta_{\text{сист}}\lambda_1| \leq \delta_{\text{доп}}, |\Delta_{\text{сист}}\lambda_2| \leq \delta_{\text{доп}}/|\delta\lambda_{12}| \leq \Delta_{\text{доп}}], \quad (3)$$

для которой справедливо соотношение

$$P[|\Delta_{\text{сист}}\lambda_1| \leq \delta_{\text{доп}}, |\Delta_{\text{сист}}\lambda_2| \leq \delta_{\text{доп}}/|\delta\lambda_{12}| \leq \Delta_{\text{доп}}] = \int_{-\delta_{\text{доп}}}^{\delta_{\text{доп}}} \int_{-\delta_{\text{доп}}}^{\delta_{\text{доп}}} w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1, \Delta_{\text{сист}}\lambda_2 / |\delta\lambda_{12}| \leq \Delta_{\text{доп}}) \times d(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1) d(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2). \quad (4)$$

В силу специфики систематических погрешностей невозможно априори установить вид распределений $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$ при помощи исследований физически реализованных сличаемых эталонов (в отличие от распределений $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2)$, определение которых не вызывает принципиальных трудностей). Поэтому принимаем вероятность (3) в условном варианте применительно к конкретным распределениям $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$. Состав априорных знаний АЗ, используемых для установления вероятности (3), представим следующим рядом:

$$A3 = (\lambda_{1н}, \lambda_{2н}, w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1), w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2), w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1), w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2), \Delta_{\text{доп}}, \delta_{\text{доп}}). \quad (5)$$

Получить аналитическое выражение для искомой условной вероятности не удастся. Поэтому приходится обращаться к машинному эксперименту — имитационному моделированию (ИМ). В данном случае он заключается в воспроизведении массива $\{\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}, \Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{2j}, \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{1j}, \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{2j}\}_{j=1}^N$ и выполнении всех последующих операций по формированию оценки вероятности (3). Последовательность отображений, представляющая процедуру получения данной оценки, имеет вид

$$\begin{aligned} & \{\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}, \Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{2j}, \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{1j}, \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{2j} \rightarrow \delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12} = \\ & = \Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j} - \Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{2j} + \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{1j} - \Delta_{\text{спИМ}}\lambda_{2j} \rightarrow \\ & \rightarrow \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12j}|) \rightarrow \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12j}|) \psi_2 \times \\ & \times (\psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}|), \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}|)) \}_{j=1}^N \rightarrow \\ & \rightarrow P^* [|\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}| \leq \delta_{\text{доп}}, |\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{2j}| \leq \delta_{\text{доп}} / (|\delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12}| \leq \Delta_{\text{доп}}] = \\ & = \sum_{j=1}^N \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12j}|) \psi_2 \left(\psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}|), \right. \\ & \left. \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\Delta_{\text{систИМ}}\lambda_{1j}|) \right) / \sum_{j=1}^N \psi_1(\Delta_{\text{доп}} - |\delta_{\text{ИМ}}\lambda_{12j}|). \end{aligned}$$

Здесь $\psi_1(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\psi_1(x) = 0$ при $x < 0$, $\psi_2(x_1, x_2) = 1$ при $x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$, $\psi_2(x_1, x_2) = 0$ при $L(x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0) L(\cdot)$, где L — отрицание НЕ ($\cdot$).

Отличие данной процедуры от классического метода Монте-Карло [2] в том, что она включает в себя формирование массива результатов сличений $\{\delta\lambda_{12j}\}_{j=1}^N$ с последующей оценкой вероятности (3).

Помимо вида определяемой характеристики принципиальное отличие подхода к определению для принятых распределений $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$ от подхода к определению условной вероятности

$$P[\delta\lambda_{12} \in [-\Delta_{\text{доп}}, \Delta_{\text{доп}}] | \delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C] \quad (6)$$

для принятого значения $\delta_{\text{сист}}\lambda_{12} = C$ состоит в том, что в случае (3) оценка вероятности получается с использованием

гипотетического ансамбля (бесконечного множества) эталонов, к которому принадлежит сличаемая пара, а в случае (6) оценка вероятности устанавливается для конкретной пары сличаемых эталонов с участием ансамбля результатов сличений.

Из (4) и (5) следует, что значение вероятности (6) определяется видом распределений $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$, а также $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2)$. Кроме того, эта вероятность зависит от сочетания значений $\Delta_{\text{доп}}$ и $\delta_{\text{доп}}$.

Поскольку знание распределений $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$ дает возможность определить вид распределения $w(\delta_{\text{сист}}\lambda_{12})$, но его недостаточно для установления вида $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$, реализация рассмотренной последовательности отображений, позволяющей установить вид, требует дополнительных АЗ по сравнению с формированием оценки (2). Это и обуславливает отмеченную выше необходимость определить вероятность (3) в условном варианте применительно к конкретным распределениям $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$. Выбор этих распределений осуществляется на эвристической основе.

Проведенные при помощи машинного эксперимента исследования зависимости условных и безусловных $P[|\Delta_{\text{сист}}\lambda_1| \leq \delta_{\text{доп}}, |\Delta_{\text{сист}}\lambda_2| \leq \delta_{\text{доп}}] = P[|\Delta_{\text{сист}}\lambda_1| \leq \delta_{\text{доп}}] P[|\Delta_{\text{сист}}\lambda_2| \leq \delta_{\text{доп}}]$ вероятностей от пороговых уровней $\delta_{\text{доп}}$ и $\Delta_{\text{доп}}$ при различных распределениях $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$, $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$, $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сп}}\lambda_2)$ позволяют утверждать, что использование сведений о распределениях $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$ повышает условную вероятность относительно безусловной на 10—15 %. Оценки формировались для различных видов распределений $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_1)$ и $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_2)$ (нормальное, равномерное и симпсоновское) и соотношений $\delta_{\text{доп}}/\Delta_{\text{доп}} = 0,2...1,8$.

По результатам специального машинного эксперимента было оценено влияние соотношения интенсивностей систематических и случайных погрешностей на вероятность. Именно при повышении отношения дисперсии случайной погрешности к дисперсии систематической погрешности $(D[\Delta_{\text{сист}}]/D[\Delta_{\text{сп}}])$ в два раза данная вероятность возрастает приблизительно на 10 % в том же диапазоне $\delta_{\text{доп}}/\Delta_{\text{доп}} = 0,2...1,8$.

Л и т е р а т у р а

1. **Чуновкина А. Г.** Оценка данных ключевых сличений национальных эталонов. СПб.: НПО «Профессионал», 2009.
2. **Математический** энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1988.

Дата принятия 09.01.2013 г.