

Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

И. В. БОЙКОВ, Н. П. КРИВУЛИН

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия, e-mail: krivulin@bk.ru

Предложен метод определения параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами. Метод основан на решении систем интегральных уравнений, ядрами которых является импульсная переходная функция системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, импульсная переходная функция.

Offered the method for determination of linear systems parameter which are described by differential equations which variable coefficients. The method is based on solution of system of integral equations which kernels are unit impulse response function of system.

Key words: differential equations, impulse response function.

Линейные системы с переменными параметрами, на входе которых действует сигнал $x(t)$, а на выходе — сигнал $y(t)$, моделируются обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$a_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t) y(t) = x(t), \quad (1)$$

где $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ — коэффициенты.

Большой класс задач идентификации связан с определением коэффициентов дифференциального уравнения (1). Этому посвящен ряд работ [1—3]. Особенно хорошо изучены методы определения постоянных и медленно меняющихся коэффициентов.

Общие методы определения переменных параметров $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ системы по известной импульсной переходной функции $h(t, \tau)$ авторам неизвестны. Ниже предложен достаточно общий метод определения параметров $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ измерительной системы (ИС), описываемой уравнением (1), по известной импульсной переходной функции.

Для систем, описываемых дифференциальными уравнениями вида (1) с переменными параметрами, импульсная переходная функция определяется как [3]:

$$\int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t), \quad (2)$$

а для систем с постоянными параметрами — как

$$\int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau = y(t). \quad (3)$$

Будем полагать, что уравнения (2), (3) однозначно разрешимы. Это условие выполнимо для широкого класса уравнений Вольтерры, в частности [4], если функции $h(t)$ и $h(t, \tau)$ дифференцируемы по переменной t .

Методы восстановления импульсной переходной функции для систем с переменными параметрами рассмотрены в [5, 6] и для систем (3) с постоянными параметрами в [2, 3, 7]. Напомним, следуя [5], метод определения импульсной переходной функции, который далее будем использовать.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую инте-

гральным уравнением $\int_0^\infty h(t, \tau) x(\tau) d\tau = y(t)$. Требуется вос-

становить функцию $h(t, \tau)$, которая удовлетворяет следующему условию: существуют такие аналитические в полуплоско-

сти $\text{Re } z \geq \sigma$ ($\sigma = \text{const}$) функции $q(p)$ и $u(p)$, что $\int_0^\infty e^{-pt} h(t, \tau) d\tau =$

$= e^{-\tau q(p)} u(p)$, $\text{Re } z \geq \sigma$. Это условие назовем (q, p) . Пусть $X(p)$, $Y(p)$ — преобразования Лапласа соответственно функций $x(t)$ и $y(t)$ и пусть они связаны соотношением $Y(p) = X(q(p))u(p)$. Тогда функция $h(t, \tau)$ определяется формулой $h(t, \tau) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{-\tau q(p)} u(p) e^{pt} dp. \text{ Вычисляя интеграл в правой час-}$$

ти формулы по квадратурным формулам, получаем приближенное значение импульсной переходной функции. В [5] приведены примеры, иллюстрирующие эффективность этого метода.

Постановка задачи. Дана импульсная переходная функция $h(t, \tau)$ измерительного преобразователя (1). Требуется найти параметры системы $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$.

Решение. Определим (аналитическим или численным методом) по заданной функции $h(t, \tau)$ измерительного преобразователя (1) входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n+1}(t)$ так, чтобы им соответствовали сигналы

$$y_1(t) = 1(t), y_2(t) = t, \dots, y_{n+1}(t) = t^n. \quad (4)$$

Используя (2), представим (4) в виде системы интегральных уравнений для определения искомых входных сигналов $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_{n+1}(t)$:

$$\int_0^t h(t, \tau) x_1(\tau) d\tau = 1(t), \dots, \int_0^t h(t, \tau) x_{k+1}(\tau) d\tau = t^k, \\ k = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Отметим, что каждое из уравнений в (5) есть интегральное уравнение Вольтерры 1-го рода. Для их решения разработано много численных и аналитических методов [4, 8]. Подробная библиография по методам решения интегральных уравнений и ряд программ различных численных методов содержится в [4].

Решая систему (5), получаем для каждого выходного сигнала $y_i(t)$ соответствующий входной сигнал $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Подставляя $y_i(t)$ и $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ в (1), приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_n(t)\delta^{(n-1)}(t) + a_{n-1}(t)\delta^{(n-2)}(t) + \dots + a_1(t)\delta(t) + a_0(t) &= x_1(t); \\ a_n(t)\delta^{(n-2)}(t) + a_{n-1}(t)\delta^{(n-3)}(t) + \dots + a_1(t) + a_0(t)t &= x_2(t); \\ &\dots \\ n!a_n(t) + n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1a_{n-1}(t)t + \dots + na_1(t)t^{n-1} + \\ + a_0(t)t^n &= x_{n+1}(t), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Напомним [9], что

$$\frac{d}{dt} 1(t) = \delta(t), \quad \frac{d^2}{dt^2} 1(t) = \delta'(t), \dots, \quad \frac{d^n}{dt^n} 1(t) = \delta^{(n-1)}(t).$$

Рассматривая $\delta(t)$ и ее производные при $t > 0$, находим

$$\delta(t) = \delta'(t) = \dots = \delta^{(n-1)}(t) = 0, \quad t > 0.$$

Тогда при $t > 0$ система уравнений (6) примет вид

$$a_0(t) = x_1(t); \quad a_1(t) = x_2(t) - a_0(t)t; \dots;$$

$$a_n(t) = \frac{1}{n!} (x_{n+1}(t) - n(n-1) \cdot \dots \cdot 2a_{n-1}(t)t - \dots - a_0(t)t^n). \quad (7)$$

Таким образом, располагая функцией $h(t, \tau)$, вычисляем коэффициенты уравнения (1).

Достоинство данного метода состоит в том, что для определения $a_n(t)$, $a_{n-1}(t)$, ..., $a_0(t)$ не требуется подавать входные сигналы и фиксировать отклик системы на эти воздействия. Достаточно знать импульсную переходную функцию системы.

Проиллюстрируем метод несколькими примерами. Для весьма широкого класса задач идентификации ИС импульсную переходную функцию можно определить по одному или нескольким входным сигналам [5—7].

Пример 1. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами:

$$t \, dy/dt + (1 + 2t) y = x(t). \quad (8)$$

Импульсная переходная функция такого преобразователя, по которой требуется найти коэффициенты уравнения (8), имеет вид

$$h(t, \tau) = e^{-2(t-\tau)}/t, \quad \tau \leq t.$$

Выберем такие входные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, которым соответствуют выходные сигналы $y_1(t) = \begin{cases} 1(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$ $y_2(t) = \begin{cases} t, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$

Искомые $x_1(t)$, $x_2(t)$ получим из решения интегральных уравнений

$$y_1(t) = \int_0^t \frac{1}{t} e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau) d\tau, \quad y_2(t) = \int_0^t \frac{1}{t} e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau) d\tau,$$

которые в данном случае преобразуем в систему уравнений в свертках

$$t = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x_1(\tau) d\tau; \quad t^2 = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} x_2(\tau) d\tau.$$

Решая ее операционным методом, приходим к системе алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций $X_1(p)$, $X_2(p)$:

$$X_1(p)/(p+2) = p^{-2}; \quad X_2(p)/(p+2) = 2/p^3.$$

Решением данной системы являются функции $X_1(p) = 1/p + 2/p^2$, $X_2(p) = 2/p^2 + 4/p^3$, их оригиналы $x_1(t) = 1 + 2t$, $x_2(t) = 2t + 2t^2$. Искомые коэффициенты найдем по (7): $a_0(t) = 1 + 2t$, $a_1(t) = t$. Видно, что они в точности совпадают с коэффициентами уравнения (8).

Пример 2. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$d^2y/dt^2 + 3dy/dt + 2y = x(t). \quad (9)$$

Предположим, что импульсная переходная функция $h(t, \tau)$ неизвестна, а также, что заранее неизвестно, является преобразователь стационарным или динамическим. Поэтому импульсную переходную функцию будем искать, рассматривая самый общий случай динамической системы с переменными параметрами, т. е. используя метод, описанный в [5].

В качестве входных сигналов примем

$$\hat{x}_1(t) = 6e^t - 2t - 5, \quad t \geq 0; \quad \hat{x}_2(t) = 12e^t - 4t - 8, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

тогда выходные сигналы измерительного преобразователя (9) будут иметь вид

$$\hat{y}_1(t) = e^t - t - 1; \quad \hat{y}_2(t) = e^{2t} - 2t - 1,$$

$$\text{причем } \hat{y}_1(0) = \hat{y}_1'(0) = 0; \quad \hat{y}_2(0) = \hat{y}_2'(0) = 0. \quad (11)$$

Изображение импульсной переходной функции будем искать в виде $H(p, \tau) = \hat{H}(p) e^{-\tau q(p)}$. Функции $\hat{H}(p)$, $q(p)$ найдем, следуя [5], из решения системы

$$\begin{cases} \hat{H}(p) \hat{X}_1(q(p)) = \hat{Y}_1(p); \\ \hat{H}(p) \hat{X}_2(q(p)) = \hat{Y}_2(p); \end{cases} \quad (12)$$

где $\hat{X}_1(p)$, $\hat{X}_2(p)$, $\hat{Y}_1(p)$, $\hat{Y}_2(p)$ — изображения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $\hat{y}_1(t)$, $\hat{y}_2(t)$.

Из (10) и (11) имеем

$$\begin{aligned} \hat{X}_1(p) &= \frac{6}{p-1} - \frac{2}{p^2} - \frac{5}{p} = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2(p-1)}, \\ \hat{X}_2(p) &= \frac{12}{p-1} - \frac{4}{p^2} - \frac{8}{p} = \frac{4(p^2 + 3p + 2)}{p^2(p-1)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1(p) &= \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2(p-1)}, \\ \hat{Y}_2(p) &= \frac{1}{p-2} - \frac{2}{p^2} - \frac{2}{p} = \frac{4}{p^2(p-2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (13), (14) в (12), приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \hat{H}(p) \frac{q^2(p) + 3q(p) + 2}{q^2(p)(q(p) - 1)} = \frac{1}{p^2(p-1)}; \\ \hat{H}(p) \frac{4(q^2(p) + 3q(p) + 2)}{q^2(p)(q(p) - 2)} = \frac{4}{p^2(p-2)}, \end{cases}$$

откуда $[q(p) - 1]/[q(p) - 2] = (p - 1)/(p - 2)$. Таким образом, $q(p) = p$ и $\hat{H}(p) = (p^2 + 3p + 2)^{-1}$. Изображение импульсной переходной функции будет $H(p, \tau) = (p^2 + 3p + 2)^{-1} e^{-\tau p} = ((p + 1)^{-1} - (p + 2)^{-1}) e^{-\tau p}$, ее оригинал $h(t, \tau) = e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}$, по которому вычислим коэффициенты уравнения (11).

Выберем $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ так, чтобы выходные сигналы имели вид

$$y_1(t) = \begin{cases} 1(t), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad y_2(t) = \begin{cases} t, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad y_3(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ найдем из системы интегральных уравнений в свертках

$$\begin{cases} \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) x_1(\tau) d\tau = 1(t); \\ \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) x_2(\tau) d\tau = t; \\ \int_0^t (e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}) x_3(\tau) d\tau = t^2, \end{cases}$$

решив ее операционным методом, получим систему алгебраических уравнений относительно изображений $X_1(p)$, $X_2(p)$, $X_3(p)$ искомых функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, причем

$$X_1(p) = p + 3 + \frac{2}{p}; \quad X_2(p) = 1 + \frac{3}{p} + \frac{2}{p^2}; \quad X_3(p) = \frac{2}{p} + \frac{6}{p^2} + \frac{4}{p^3}.$$

Тогда $x_1(t) = \delta'(t) + \delta(t) + 2$, $x_2(t) = \delta(t) + 3 + 2t$, $x_3(t) = 2 + 6t + 2t^2$.

Рассматривая полученные сигналы $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ при $t > 0$ и учитывая что $\delta(t) = \delta'(t) = \dots = \delta^{(n-1)}(t) = 0$, $t > 0$, получаем $x_1(t) = 2$, $x_2(t) = 3 + 2t$, $x_3(t) = 2 + 6t + 2t^2$. Из решения (7) найдем искомые коэффициенты $a_0(t) = 2$, $a_1(t) = 3$, $a_2(t) = 1$; они в точности совпадают с исходными в уравнении (9).

З а м е ч а н и е. Если известно, что рассматривается измерительный преобразователь (1) с постоянными коэффициентами, то метод можно модифицировать. Найдем входной сигнал $x(t)$ из решения интегрального уравнения

$$\int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau = y(t), \quad (15)$$

в котором $y(t) = t^n$, решением его будет многочлен степени не выше n : $x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n$.

Из уравнения вида (1) с постоянными коэффициентами следует, что если $y(t)$ — полином степени n , то $x(t)$ также полином степени не выше n . Тогда (1) примет вид

$$\begin{aligned} n! a_n + n(n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 a_{n-1} t + \dots + n a_1 t^{n-1} + a_0 t^n = \\ = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_n t^n, \end{aligned}$$

отсюда, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t , получим

$$a_0 = b_n, \quad a_1 = b_{n-1}/n, \quad \dots, \quad a_{n-1} = b_1/[n(n-1) \cdot \dots \cdot 2], \quad a_n = b_0/n!.$$

Продemonстрируем использование метода на примере 2. Выше было показано, что входной сигнал измерительного преобразователя (9) при $y(t) = t^2$ и $h(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ будет $x(t) = 2 + 6t + 2t^2$. Следовательно, (9) примет вид $2a_2 + 2a_1 t + a_0 t^2 = 2 + 6t + 2t^2$. В результате получим $a_0(t) = 2$, $a_1(t) = 3$, $a_2(t) = 1$. Таким образом, для нахождения параметров измерительного преобразователя с постоянными коэффициентами достаточно определить только один входной сигнал из решения интегрального уравнения (15) с полиномиальной правой частью.

Рассмотрим ситуацию, когда импульсная переходная функция задана с погрешностью. Интерес представляют два случая, когда ИС определена уравнениями (2) и (3). При достаточно широких предположениях о функции $h(t)$ уравнение (3) однозначно разрешимо при любой правой части. В частности, так будет, если функция $h(t)$ дифференцируема.

В общем случае импульсная переходная функция $h(t)$ реальной ИС определяется с некоторой погрешностью ε . Пред-

положим, что $\varepsilon = \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{h}(t) - h(t)|$, где $h(t)$, $\tilde{h}(t)$ — импуль-

сные переходные функции реальной ИС и полученной экспериментально или теоретически при использовании сигналов с погрешностями. Получим приближенные значения коэффициентов $\tilde{a}_n(t)$, $\tilde{a}_{n-1}(t)$, ..., $\tilde{a}_0(t)$ уравнения (1) и оценим их погрешность, для чего потребуется найти погрешность определения входных сигналов ИС. С этой целью рассмотрим интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau = y(t); \quad \int_0^t \tilde{h}(t - \tau) \tilde{x}(\tau) d\tau = y(t), \quad (16)$$

где $h(t)$, $\tilde{h}(t)$ — импульсные переходные функции, соответственно точная и известная с погрешностью ε , $x(t)$, $\tilde{x}(t)$ — их

входные сигналы, причем $\max_{0 \leq t \leq T} |h(t) - \tilde{h}(t)| = \varepsilon$; $y(t)$ — выходной сигнал, значения которого точно известны.

Пусть $h(t)$ — непрерывная функция. Введем обозначение $\varepsilon_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{x}(t) - x(t)|$. Из (16) следует уравнение

$$\int_0^t h(t - \tau)(x(\tau) - \tilde{x}(\tau))d\tau = \int_0^t (\tilde{h}(t - \tau) - h(t - \tau))\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (17)$$

которое будем исследовать в промежутке $[0, T]$.

Выше было сделано предположение о том, что уравнение

$$Kx \equiv \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (18)$$

однозначно разрешимо при любой правой части. Будем рассматривать (18) в пространстве $C[0, T]$ непрерывных функций, определенных на сегменте $[0, T]$. Известно, что пространство $C[0, T]$ полное [10]. Из указанного предположения следует, что оператор K отображает пространство $C[0, T]$ на пространство $[0, T]$. По теореме Банаха [8] оператор K непрерывно обратим, т. е. существует непрерывный ограниченный оператор K^{-1} с нормой $\|K^{-1}\| = C = \text{const}$. Тогда из (17) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \|x(t) - \tilde{x}(t)\|_{C[0, T]} \leq \\ &\leq \|K^{-1}\| T \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |\tilde{h}(t - \tau) - h(t - \tau)| \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{x}(t)| \leq C_0 \varepsilon, \\ C_0 &= \|K^{-1}\| \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |\tilde{x}(t)|. \end{aligned} \quad (19)$$

Использование неравенства $\varepsilon_0 \leq C_0 \varepsilon$ вызывает затруднения, так как в оценку константы C_0 входит $\|\tilde{x}(t)\| = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |\tilde{x}(t)|$ функции $\tilde{x}(t)$, которая реально не определяется. Поэтому усилим неравенство (19). Будем полагать значение ε достаточно малым: таким, что $T \|K^{-1}\| \varepsilon < 0,5$ и запишем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &\leq \|K^{-1}\| T \max_{0 \leq \tau \leq t} |\tilde{x}(t)| \varepsilon \leq \\ &\leq \|K^{-1}\| T \left(\varepsilon \max_{0 \leq \tau \leq t} |\tilde{x}(t) - x(t)| + \varepsilon \max_{0 \leq \tau \leq t} |x(t)| \right) \leq \\ &\leq \|K^{-1}\| T \left(\varepsilon_0 \varepsilon + \|K^{-1}\| \varepsilon \max_{0 \leq \tau \leq t} |y(t)| \right). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует:

$$\varepsilon_0 \leq \left(2 \|K^{-1}\| \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |y(t)| \right) \varepsilon = C \varepsilon, \quad (20)$$

где $C = 2 \|K^{-1}\| \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |y(t)|$, т. е. константа C выражается через параметры ИС и выходного сигнала $y(t)$, который опре-

деляется заранее и является конкретной аналитической функцией.

Таким образом, установлена связь между погрешностями ε и $\varepsilon_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{x}(t) - x(t)|$. Последнюю, используя неравенство Гельдера [8], также можно выразить в метрике пространства L_2 :

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} |x(t) - \tilde{x}(t)| &\leq \|K^{-1}\|_{C[0, T]} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t |\tilde{h}(t - \tau) - h(t - \tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\int_0^t |\tilde{x}(\tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (21)$$

причем эта оценка иногда может оказаться удобнее.

Теперь рассмотрим случай, когда ИС определена уравнением (2). В общем случае импульсная переходная функция $h(t, \tau)$ реальной ИС определяется с некоторой погрешностью. Предположим, что

$$\varepsilon_1 = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |\tilde{h}(t, \tau) - h(t, \tau)|, \quad \varepsilon_2 = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} \left| \frac{\partial \tilde{h}(t, \tau)}{\partial t} - \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} \right|,$$

где $h(t, \tau)$, $\tilde{h}(t, \tau)$ — импульсные переходные функции ИС, соответственно реальной и полученной экспериментально или теоретически при использовании сигналов с погрешностями.

Найдем приближенные значения коэффициентов $\tilde{a}_n(t)$, $\tilde{a}_{n-1}(t), \dots, \tilde{a}_0(t)$ уравнения (1) и оценим возникающую при этом погрешность. Для ее оценки потребуется погрешность определения входных сигналов, когда импульсная переходная функция известна с погрешностями ε_1 и ε_2 . С этой целью рассмотрим интегральные уравнения

$$\int_0^t h(t, \tau)x(\tau)d\tau = y(t); \quad \int_0^t \tilde{h}(t, \tau)\tilde{x}(\tau)d\tau = y(t), \quad (22)$$

где $h(t, \tau)$, $\tilde{h}(t, \tau)$ — импульсные переходные функции, значения которых и их производные $\partial h(t, \tau)/\partial t$, $\partial \tilde{h}(t, \tau)/\partial t$ известны соответственно точно и с погрешностями $\varepsilon_1 =$

$$= \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |h(t, \tau) - \tilde{h}(t, \tau)|, \quad \varepsilon_2 = \max_{0 \leq \tau \leq t \leq T} |\partial h(t, \tau)/\partial t - \partial \tilde{h}(t, \tau)/\partial t|;$$

$x(t)$, $\tilde{x}(t)$ — входные сигналы ИС с импульсными переходными функциями, соответственно точной и заданной с погрешностями ε_1 и ε_2 ; $y(t)$ — выходной сигнал с точно известными значениями.

Погрешность определения входных сигналов оценим как

$$\varepsilon_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{x}(t) - x(t)|. \quad \text{Из (22) следует уравнение}$$

$$\int_0^t h(t, \tau)(x(\tau) - \tilde{x}(\tau))d\tau = \int_0^t (\tilde{h}(t, \tau) - h(t, \tau))\tilde{x}(\tau)d\tau, \quad (23)$$

которое будем рассматривать в промежутке $[0, T]$. Выше было сделано предположение о том, что уравнение

$$Kx \equiv \int_0^t h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t)$$

разрешимо. Известно [4], что если функция $f(t)$ дифференцируема и $h(t, \tau) > 0$, то оператор K , принадлежащий пространству $C[0, T]$ непрерывных функций и действующий в пространстве $C_1[0, T]$ непрерывно дифференцируемых функций, имеет ограниченный обратный оператор K^{-1} . Тогда из (23) имеем

$$\|x(t) - \tilde{x}(t)\|_{C[0, T]} \leq C_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = C_0 \varepsilon, \quad (24)$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$;

$$C_0 = \|K^{-1}\| (T+1) \left(\varepsilon_0 + \|K^{-1}\| \left(\max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)| \right) \right).$$

Таким образом, из (24) находим

$$\varepsilon_0 \leq \|K^{-1}\| (T+1) \left(\varepsilon_0 + \|K^{-1}\| \left(\max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)| \right) \right) \varepsilon$$

и, следовательно, при $\varepsilon \|K^{-1}\| (T+1) \leq 0,5$ получаем

$$\varepsilon_0 \leq 2 \|K^{-1}\|^2 (T+1) \left(\max_{0 \leq t \leq T} |y(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)| \right) \varepsilon = C\varepsilon, \quad (25)$$

т. е. погрешность ε_0 выражается через нормы выходного сигнала $\|y(t)\| = \max_{0 \leq t \leq T} |y(t)|$ и его производной $\|y'(t)\| = \max_{0 \leq t \leq T} |y'(t)|$.

Напомним, что выходной сигнал в предлагаемом методе является виртуальным и используется только в вычислениях. В связи с этим в качестве выходных сигналов заранее берутся функции $1, t, \dots, t^n$, производные которых находят аналитически. Таким образом, установлена связь между погрешностью определения импульсной переходной функции $h(t, \tau)$ и

$$\text{погрешностью } \varepsilon_0 = \max_{0 \leq t \leq T} |\tilde{x}(t) - x(t)|.$$

Неравенства (20), (21), (25) выражают оценки погрешностей функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, используя которые, можно оценить погрешность коэффициентов $\tilde{a}_n(t), \tilde{a}_{n-1}(t), \dots, \tilde{a}_0(t)$, определяемых по формулам

$$\tilde{a}_0(t) = \tilde{x}_1(t); \tilde{a}_1(t) = \tilde{x}_2(t) - \tilde{a}_0(t)t; \dots;$$

$$\tilde{a}_n(t) = \frac{1}{n!} (\tilde{x}_{n+1}(t) - n(n-1) \dots \cdot 2\tilde{a}_{n-1}(t)t - \dots - \tilde{a}_0(t)t^n),$$

откуда, а также из (7) имеем

$$|a_k(t) - \tilde{a}_k(t)| = \frac{1}{k!} |(x_{k+1}(t) - \tilde{x}_{k+1}(t)) -$$

$$- k(k-1) \dots \cdot 2(a_{k-1}(t) - \tilde{a}_{k-1}(t))t - \dots - (a_0(t) - \tilde{a}_0(t))t^k| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{k!} (C(y_{k+1}) + k!C(y_k)T + \dots + C(y_1)T^k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Отметим, что в неравенствах (20), (25) константа C зависит от конкретной функции $y(t)$. Здесь под $C(y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$ понимаются константы C , определяемые неравенством (20) для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и неравенством (25) для систем, описываемых дифференциальными уравнениями с коэффициентами, зависящими от времени, в предположении, что вместо функции $y(t)$, фигурирующей в оценках констант C в указанных формулах, взяты функции $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$.

Выводы. Предложен численный метод определения параметров измерительных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с коэффициентами, зависящими от времени. Для идентификации коэффициентов уравнения требуется знание импульсной переходной функции. Оценена погрешность восстановления коэффициентов дифференциального уравнения при неточно заданной импульсной переходной функции.

Л и т е р а т у р а

1. **Виглин С. И.** Переходные процессы в системах с переменными параметрами. М.: Сов. радио, 1971.
2. **Дейч А. М.** Методы идентификации динамических объектов. М.: Энергия, 1979.
3. **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учеб. пособие. Т. 1—5 / Под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
4. **Верлань А. Ф., Сизиков В. С.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986.
5. **Бойков И. В., Кривулин Н. П.** Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами // Метрология. 2012. № 8. С. 3—14.
6. **Бойков И. В., Кривулин Н. П.** Определение динамических характеристик измерительных преобразователей с распределенными параметрами // Измерительная техника. 2000. № 9. С. 3—7; **Boikov I. V., Krivulin N. P.** Determination of the Dynamic Characteristics of Measuring Transducers with Distributed Parameters // Measurement Techniques. 2000. V. 43. N 9. P. 752—756.
7. **Бойков И. В.** Аналитические методы идентификации динамических систем: Учеб. пособие. Пенза: Изд-во Пензенского политехн. ин-та, 1992.
8. **Трикоми Ф.** Интегральные уравнения. М.: ИИЛ, 1986.
9. **Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е.** Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. Вып. 1.
10. **Люстерник Л. А., Соболев В. И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука. 1965.

Дата принятия 14.01.2013 г.