621.396.98

Интегрированная инерциально-спутниковая навигационная система, корректируемая по наблюдениям одной звезды

А. С. ДЕВЯТИСИЛЬНЫЙ, К. А. ЧИСЛОВ

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток, Россия
e-mail: devyatis@iacp.dvo.ru

В рамках концепции задачи коррекции инерциальной навигационной системы предложены и исследованы модели комплексирования инерциальной, спутниковой и астроинформации. Приведены результаты вычислительных экспериментов, характеризующие численную устойчивость и эффективность решения задачи в условиях конечной точности измерений.

Ключевые слова: *инерциальная навигация, навигационная спутниковая и астросистемы, обратная задача.*

Within the framework of inertial navigation system correction problem the models of inertial, satellite and astroinformation studied are offered and studied. The results of computational experiments characterizing numerical stability and efficiency of the problem solution in conditions of the measurements ultimate accuracy are presented.

Key words: *inertial navigation, navigation satellite system, astrosystem, inverse problem.*

Как известно [1], автономные инерциальные навигационные системы (ИНС) предназначены для определения параметров местоположения и пространственной ориентации подвижных объектов, но неустойчивость таких систем заметно препятствует их широкому применению. Получившие в настоящее время распространение навигационные спутниковые системы (НСС), например ГЛОНАСС, способны решать те же задачи, что и ИНС, но для решения задачи ориентации на борту объекта необходимо создать сеть пространственно разнесенных приемников сигналов НСС [2]. Вместе с тем требования к сети, связанные с обеспечением точности и надежности решения задачи, далеко не всегда совместимы с возможностями их удовлетворения на подвижном объекте.

Объединение (интеграция) обеих систем типа ИНС—НСС в рамках концепции задачи коррекции ИНС при одном приемнике НСС на борту объекта, в принципе, позволяет, как показано ниже, устойчиво решать обе упомянутые навигационные задачи. Наряду с такой интегрированной системой исследуется навигационная система более высокой степени интеграции (типа ИНС—НСС—АС), включающая астросистему (АС), к которой предъявляется в определенном смысле минимальное требование — обеспечение угломерной информацией при наблюдении одной звезды. Такое дополнительное комплексирование навигационной информации в рассматриваемом случае, когда задача определения места объекта, по существу, может быть качественно решена НСС, направлено не только на улучшение разрешимости задачи навигации в целом, но прежде всего той ее части, которая относится к качественной и надежной ориентации, что особенно важно, если подвижный объект является носителем информационных и силовых платформ.

Основные модельные представления. Переходя к формальным описаниям, отметим, что базовую модель метода инерциальной навигации (ИНМ) представляют двумя группами дифференциальных уравнений — динамической (ДГУ) и кинематической (КГУ) [1], где первая описывает траекторию, а вторая — эволюцию системы отсчета, в которой рассматривается траектория. Тогда идеализированную модель обратной задачи, решаемой в рамках метода, можно записать в общем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{Dq} &= \mathbf{p}, \quad \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0; \\ \mathbf{Dp} &= \mathbf{G} + \mathbf{F}, \quad \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0; \\ \mathbf{DA} &= 0, \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0; \\ \mathbf{z} &= \mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{A}), \end{aligned} \tag{1}$$

где векторные переменные — $\mathbf{q}$ (радиус-вектор места носителя), $\mathbf{p}$ (удельный импульс, абсолютная линейная скорость носителя), $\mathbf{G}$ (напряженность *GE*-поля), $\mathbf{F}$ (удельная сила негравитационной природы) — записываются в проекциях на оси вращающейся с абсолютной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^{\mathrm{T}}$ правой ортогональной системы отсчета $0\mathbf{q} = 0q_1q_2q_3$ с началом в центре масс Земли, осью $0q_3$, направленной по радиусу-вектору местоположения носителя, и осями $0q_1$, $0q_2$, направленными соответственно на географические Восток и Север; $\mathbf{A} = (A_{ij})$ — матрица ориентации приборной системы отсчета относительно выбранной инерциальной, $i, j = \overline{1, 3}$; $\mathbf{z}$ — вектор измерений (дополнительных к инерциальным), результаты которых доставляют НСС и астросистема; $\mathbf{J}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{A})$ — функция связи «состояние—измерение»; $\mathbf{D} = d/dt + \hat{\boldsymbol{\omega}}$ — оператор абсолютной производной; $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ — кососимметрическая матрица, составленная из

компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$ так, что $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ij} = e_{ikj}\boldsymbol{\omega}_k$, $i, k, j = \overline{1, 3}$; e_{ikj} — псевдотензор Леви—Чивита; инерциальные измерения значений компонентов векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{F}$ выполняются в приборной системе отсчета с осями, параллельными соответствующим осям системы $0\mathbf{q}$.

Далее с учетом физических реальностей, т. е. при наличии погрешностей измерений, определения начальных значений $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{p}_0$, а также неполноты представлений о *GE*-поле (о векторе $\mathbf{G}(\mathbf{q}, \mathbf{r})$, $\mathbf{r} = |\mathbf{q}|$), осуществим переход от уравнений (1) к линейным уравнениям в вариациях. В итоге получим

$$\mathbf{D}\delta\mathbf{q} = \delta\mathbf{p} - \hat{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{q}, \quad \delta\mathbf{q}(0) = \delta\mathbf{q}_0;$$

$$\mathbf{D}\delta\mathbf{p} = \mathbf{G}'_q\,\delta\mathbf{q} + \mathbf{g} + \mathbf{f} - \hat{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{p} + \mathbf{G}'_q\,\varepsilon_3, \quad \delta\mathbf{p}(0) = \delta\mathbf{p}_0;$$

$$\mathbf{D}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\beta}_0;$$

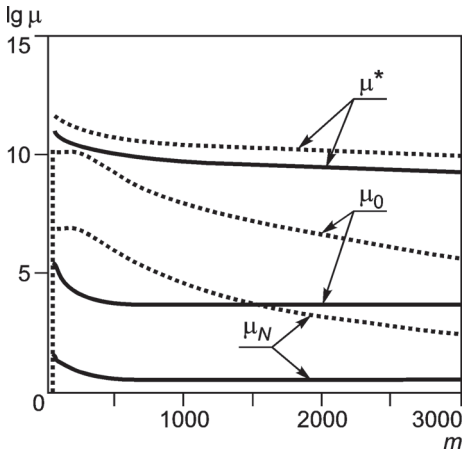
$$\delta z_1 = \varphi_{\text{ИНС}} - \varphi_{\text{НСС}} = \delta q_2/r - \beta_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1; \qquad (2)$$

$$\delta z_2 = (\lambda_{\text{ИНС}} - \lambda_{\text{НСС}})\cos\varphi = -\delta q_1/r - \beta_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2;$$

$$\delta z_3 = r_{\text{ИНС}} - r_{\text{НСС}} = \delta q_3 + \boldsymbol{\varepsilon}_3;$$

$$\delta z_s = e_{skj}\, l_k\beta_j + \boldsymbol{\varepsilon}_s,\ s = 4, 5,$$

где $\boldsymbol{\nu}$, $\mathbf{f}$ — векторы инструментальных погрешностей гироскопов и ньютонометров; φ, λ, r — соответственно геоцентрические широта, долгота и радиус места объекта-носителя, вычисляемые ИНС ($\varphi_{\text{ИНС}}$, $\lambda_{\text{ИНС}}$, $r_{\text{ИНС}}$) и доставляемые НСС ($\varphi_{\text{НСС}}$, $\lambda_{\text{НСС}}$, $r_{\text{НСС}}$); $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, $i = \overline{1,3}$ — вектор инструментальных погрешностей НСС-определений; $\boldsymbol{\beta} = (\beta_i)$, $i = \overline{1,3}$ — вектор погрешностей интегрирования КГУ; $\mathbf{I} = (l_1, l_2, l_3)^{\mathrm{T}}$ — орт визирования звезды в проекциях на оси приборного координатного трехгранника; ε_s, $s = 4, 5$ — инструментальные погрешности визирования звезды; $\delta\mathbf{z} = (\delta z_i)_{i=1}^{\chi}$ — вектор невязок измерений, причем $\boldsymbol{\chi} = 3$ для системы ИНС—СНС и $\boldsymbol{\chi} = 5$ для системы ИНС—НСС—АС; $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}$ — погрешности интегрирования ДГУ; $\mathbf{g} = \mathbf{G} - \mathbf{G}_m$; $\mathbf{G}_m$ — модель напряженности *GE*-поля, учитываемая при интегрировании ДГУ с замещением величины r измеренным значением $z_3 = r_{\text{НСС}} = r + \boldsymbol{\varepsilon}_3$; $\mathbf{G}'_q = \partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{q}$, $\mathbf{G}'_r = \partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{r}$, в частности, при центральности *GE*-поля (именно для этого случая ниже будут представлены результаты вычислительного эксперимента) $\mathbf{G}'_q = -\mu/\mathbf{r}^3$, $\mathbf{G}'_q = 3\mu\mathbf{q}/\mathbf{r}^4$.



Графики значений чисел обусловленности

Цель решения задачи (2) — это оценки $\delta\mathbf{q}^*$, $\delta\mathbf{p}^*$, $\boldsymbol{\beta}^*$ векторов $\delta\mathbf{q}$, $\delta\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\beta}$ и в конечном итоге оценки векторов $\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и матрицы $\mathbf{A}$, образуемых следующим образом: $\mathbf{q}^* = \tilde{\mathbf{q}} + \delta\mathbf{q}^*$, $\mathbf{p}^* = \tilde{\mathbf{p}} + \delta\mathbf{p}^*$, $\mathbf{A} = \hat{\boldsymbol{\beta}}\tilde{\mathbf{A}}$, где $\tilde{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathbf{p}}$ и $\tilde{\mathbf{A}}$ — результаты интегрирования ДГУ и КГУ, или модельные значения.

В (2) дополнительного разъяснения требуют два последних уравнения, характеризующих астроинформацию. Пусть $\mathbf{L}$ — орт направления на звезду в инерциальной системе отсчета, тогда $\mathbf{I} = \mathbf{AL}$ — орт этой же звезды в приборном трехграннике, а его числовым образом является вектор $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{AL} = (1 + \hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{I}$. Отсюда следует, что методическая погрешность визирования звезды в этом трехграннике будет $\Delta\mathbf{I} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\beta}$. Перейдем к модели инструментальной погрешности. Обозначим γ_1, γ_2 «азимутальный» и «высотный» углы положения звезды в приборном трехграннике, а Δ_1, Δ_2 — соответственно инструментальные погрешности измерений этих углов при наблюдении звезды. Тогда в (2) $\varepsilon_s = g_{sj}\Delta_j$, $g_{sj} = \partial l_i/\partial\gamma_j$, где с учетом индексации инструментальных погрешностей НСС можно было бы принять $s = \overline{4, 6}$, $j = 1, 2$. Вместе с тем с учетом линейной зависимости строк матрицы $\hat{\mathbf{I}}$ можно ограничиться значениями $s = 4, 5$ и представить вектор невязок астроизмерений в виде $\Delta z_s = \Delta l_s + \varepsilon_s$, $s = 4, 5$, что и отражено в (2). В общем случае $\mathbf{I} = \mathbf{I}(t)$, в частном — при движении объекта вдоль параллели (в северном полушарии Земли), когда доступна наблюдению Полярная звезда, $\mathbf{I} = (0, \cos\varphi, \sin\varphi)^{\mathrm{T}}$ (именно для этого случая были проведены вычислительные эксперименты).

Модель (2) представляет собой систему уравнений «состояние—измерение» [3], и задачу можно решить непосредственно методом динамического обращения, реализовав его, например, при помощи алгоритма калмановского типа [4]. Наряду с этим и при учете линейности уравнений модель задачи весьма стандартным способом можно привести к системе линейных алгебраических уравнений с некоторым конечномерным оператором (матрицей) $\mathbf{L}$ размерности $\chi m \times n$ ($\dim\mathbf{L} = \chi m \times n$), динамически расширяемым по m по мере накопления результатов измерений и $n = \dim(\delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \delta\mathbf{p}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})$; в этом случае решение задачи интерпретируется в рамках представлений метода наименьших квадратов (МНК).

Вычислительные эксперименты. Основная цель выполненных экспериментов — верификация корректности математической постановки задачи в условиях конечной точности вычислений и измерений. Она достигается при исследовании на невырождение матрицы $\mathbf{L}$ (ее можно отождеств-

лять с матрицей наблюдаемости [4]) и при непосредственном построении решения с использованием алгоритма динамического обращения Калмана [3, 4].

Упомянутая матрица имеет вид $\mathbf{L} = (\mathbf{H\Phi}(t_0, t_i))_{i=0}^{m}$, где m — целое число, причем $m \geq n$; $t_i = mh$; h — шаг дискретизации задачи по времени t; $\mathbf{H}$ — матрица связи «состояние—измерение», так что $\boldsymbol{\delta z} = \mathbf{Hx} + \boldsymbol{\varepsilon}$, $\dim \mathbf{H} = \chi \times n$; $\mathbf{\Phi}(t_0, t_i)$ — фундаментальная матрица решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению в (2), $\dim \mathbf{\Phi}(t_0, t_i) = n \times n$.

На рисунке приведены графики (сплошные линии — для систем типа ИНС—НСС—АС, пунктирные — для ИНС—НСС) значений сингулярных чисел обусловленности μ_0, μ_N и μ^*, где μ_0, μ_N — вычисленные при относительной машинной (компьютерной) погрешности вычислений $e_1 = 2{,}2 \cdot 10^{-16}$ числа обусловленности соответственно исходной $\mathbf{L}$ и нормированной по столбцам $\mathbf{N} = \mathbf{LD}^{-1}$ матриц; $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\|\mathbf{L}_1\|, \|\mathbf{L}_2\|, ..., \|\mathbf{L}_n\|)$, $\|\mathbf{L}_i\|$ — евклидова норма i-го столбца матрицы $\mathbf{L}$; $\mu^* = \left[\left(\sqrt{n}\,(2n-3)(4\chi m + 27) + 4\chi m + 30\right)e_1\right]^{-1}$ — критическое число обусловленности [5].

Условие разрешимости задачи (2) в вычислительной среде, а именно: $\mu^* > \mu_0$ и (или) $\mu^* > \mu_N$, что следует из рисунка, выполняется для систем обоих типов. Последнее означает сходимость (по m) алгоритмов МНК и асимптотическую устойчивость (по t) алгоритмов динамического обращения калмановского типа. Отметим, что графики построены для случая движения объекта по географической параллели $\varphi = 45°$ в восточном направлении с относительной по отношению к Земле скоростью $v = 100$ м/с, $h = 1$ с; однако вывод о разрешимости задачи сохраняется и для других значений φ и v.

В таблице приведены наибольшие абсолютные значения погрешностей оценивания соответствующих переменных (где $|\Delta\alpha_i| = |\Delta q_i|/r$, $i = 1, 2$) за пределами первых 1000 с решения задачи для обоих типов систем (верхние строки — для системы ИНС—НСС—АС, нижние — для ИНС—НСС) при среднеквадратических значениях составляющих погрешностей измерений $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}$, соответственно $\sigma_{\varepsilon_i} = 1$ м, $i = \overline{1, 3}$; $\sigma_{\varepsilon_i} = 10^{-6}$ рад, $i = 4, 5$; $\sigma_{f_i} = 10^{-3}$ м/с^2, $i = \overline{1, 3}$; $\sigma_{v_i} = 10^{-3}$ °/ч, $i = \overline{1, 3}$, и различных представлениях о модели напряженности GE-поля для случаев $g = |\mathbf{g}| = \mathrm{const}$. Результаты вычислительных экспериментов показывают несущественное качественное различие двух типов исследованных интегрированных систем.

Погрешность	Значения погрешности различных систем навигации и моделей гравитационного поля		
	$g = 10^{-5}$ м/с^2	$g = 10^{-4}$ м/с^2	$g = 10^{-3}$ м/с^2
$\lvert\Delta\beta_1\rvert$	$7{,}31 \cdot 10^{-8}$ $4{,}22 \cdot 10^{-7}$	$7{,}41 \cdot 10^{-8}$ $4{,}72 \cdot 10^{-7}$	$7{,}42 \cdot 10^{-8}$ $8{,}91 \cdot 10^{-7}$
$\lvert\Delta\beta_2\rvert$	$3{,}71 \cdot 10^{-7}$ $5{,}25 \cdot 10^{-7}$	$3{,}8 \cdot 10^{-7}$ $7{,}62 \cdot 10^{-7}$	$7{,}25 \cdot 10^{-7}$ $9{,}36 \cdot 10^{-7}$
$\lvert\Delta\beta_3\rvert$	$3{,}68 \cdot 10^{-7}$ $4{,}27 \cdot 10^{-7}$	$3{,}75 \cdot 10^{-7}$ $4{,}88 \cdot 10^{-7}$	$6{,}89 \cdot 10^{-7}$ $8{,}84 \cdot 10^{-7}$
$\lvert\Delta\alpha_1\rvert$	$1{,}16 \cdot 10^{-7}$ $4{,}12 \cdot 10^{-7}$	$1{,}16 \cdot 10^{-7}$ $4{,}69 \cdot 10^{-7}$	$1{,}19 \cdot 10^{-7}$ $8{,}89 \cdot 10^{-7}$
$\lvert\Delta\alpha_2\rvert$	$3{,}67 \cdot 10^{-7}$ $5{,}27 \cdot 10^{-7}$	$3{,}76 \cdot 10^{-7}$ $6{,}83 \cdot 10^{-7}$	$7{,}24 \cdot 10^{-7}$ $9{,}43 \cdot 10^{-7}$

Таким образом, выполненное исследование свидетельствует о достаточно высокой эффективности и перспективности интегрированных систем рассмотренных типов при решении задач построения информационных и силовых платформ для подвижных объектов широкого назначения.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ-ДВО (грант № 11-01-98501-р_восток_а) и ДВО РАН (грант № 12-1-0-03-005).

Литература

1. **Андреев В. Д.** Теория инерциальной навигации. Корректируемые системы. М.: Наука, 1967.

2. **Девятисильный А. С., Крыжко И. Б.** Исследование модели навигационных определений с помощью спутниковой системы типа «ГЛОНАСС» // Космические исследования. 1999. Т. 37. № 3. С. 261—266.

3. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.

4. **Осипов Ю. С., Кряжимский А. В.** Задачи динамического обращения // Вестник РАН. 2006. Т. 76. № 7. С. 615—624.

5. **Девятисильный А. С., Крыжко И. Б.** Исследование обусловленности задачи численного определения квазистационарной орбиты ИСЗ по наземным наблюдениям // Космические исследования. 1997. Т. 35. № 1. С. 99—101.

Дата принятия 01.11.2012 г.