

Доверительные границы погрешности сложного измерительного канала измерительной системы

В. А. ЗАХАРОВ¹, Ю. И. ДИДИК²

¹Институт естественных наук и математики Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия, e-mail: v.zakharov45@gmail.com

²Уральский научно-исследовательский институт метрологии, Екатеринбург, Россия, e-mail: lemma@uniim.ru

Определены законы распределения и доверительные границы относительной погрешности сложного измерительного канала, имеющего в составе несколько простых измерительных каналов. Расчёты выполнены в предположении, что погрешность каждого простого измерительного канала имеет равномерное распределение на заданном отрезке. Показано, что расхождения значений относительных погрешностей, рассчитанных для композиционного распределения погрешности сложного измерительного канала и для нормального распределения с тем же значением дисперсии, не превышают 3 % при доверительной вероятности $P=0,95$.

Ключевые слова: измерительный канал, относительная погрешность, равномерное распределение, композиция законов распределения.

Distribution laws and confidence limits are determined for a complex measurement channel (MC) with N simple MCs. Calculations are made assuming that the error of every simple MC has a uniform distribution in the section of $[-\delta, +\delta]$. It is shown that the values of $\pm \delta_{\Sigma}$ calculated for the composite distribution of the error of a complex MC and for the normal distribution with the same value of dispersion are close to each other. With a confidence probability of $P=0,95$ the difference in the calculated values does not exceed 3 %.

Key words: measuring channel, relative error, uniform distribution, composition of distribution laws.

В состав промышленной измерительной системы (например, системы учёта электрической энергии) могут входить простые и сложные измерительные каналы (ИК) [1]. Простой ИК реализует прямой метод измерений путём последовательных измерительных преобразований. Сложный ИК в первичной части представляет собой совокупность нескольких простых каналов. Выходные сигналы этих простых каналов используются для получения результатов косвенных, совокупных или совместных измерений или для формирования пропорционального ему сигнала на выходе сложного ИК.

В соответствии с рекомендациями [2] нормирование метрологических характеристик средств измерений, в том числе метрологических характеристик ИК, осуществляют, оперируя понятием «погрешность». В частности, в качестве метрологических характеристик простого ИК промышленной измерительной системы обычно устанавливают положительный и отрицательный пределы допускаемой погрешности канала в нормальных или рабочих условиях его эксплуатации. Эти пределы оговорены в нормативной или технической документации на измерительную систему [3]. Для нахождения пределов погрешности сложного ИК можно выполнить весовое суммирование модулей пределов погрешностей простых каналов, образующих сложный ИК. Такой способ нормирования характеристик погрешности сложного ИК приводит к чрезмерному завышению нормируемой погрешности, поскольку одновременное достижение пределов погрешностей простых ИК маловероятно. Поэтому при нормировании погрешности сложных ИК обычно указывают доверительные границы погрешности, т. е. границы интервала, внутри которого с задан-

ной вероятностью находится погрешность ИК в нормальных или рабочих условиях эксплуатации [4].

Согласно рекомендации [5] в описание типа системы учёта электрической энергии следует включать информацию о доверительных границах относительной погрешности каждого ИК системы в нормальных и рабочих условиях эксплуатации, соответствующих доверительной вероятности $P=0,95$. Доверительные границы ИК определяют как связь значения доверительной границы погрешности измерений $|\Delta_P|$ со средним квадратическим отклонением погрешности σ_{Σ} [6]:

$$|\Delta_P| = k_P \sigma_{\Sigma}, \quad (1)$$

где k_P – коэффициент, зависящий от вероятности P .

При оценивании характеристик точности ИК через понятие «неопределённость измерений» этот коэффициент называют коэффициентом охвата. Значения параметров k_P , σ_{Σ} в формуле (1) определяются явным видом функции распределения погрешности сложного ИК, которая зависит, очевидно, от распределения погрешностей простых ИК.

В настоящей работе представлены результаты расчётов доверительных границ погрешности сложного ИК, полученные на основе статистического суммирования погрешностей простых ИК. Будем полагать, что связь входных измеряемых величин X_n ($n = 1, 2, \dots, N$) с результатом измерения Y сложного ИК измерительной системы определяется функциональной зависимостью вида

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N). \quad (2)$$

Раскладывая представленную в (2) функцию в ряд Тейлора и ограничиваясь первыми производными, можно записать следующее соотношение, определяющее связь относительной погрешности результата измерения δ_Σ с относительными погрешностями измеряемых величин δ_n [7]:

$$\delta_\Sigma = \frac{dY}{Y} = \frac{\Delta_Y}{Y} = \sum_{n=1}^N a_n \delta_n; \quad (3)$$

$$a_n = \frac{dY}{dX_n} \frac{X_n}{Y};$$

$$\delta_n = \frac{dX_n}{X_n} = \frac{\Delta_n}{X_n},$$

где Δ_Y , Δ_n – абсолютные погрешности сложного и простого ИК, соответственно; a_n – безразмерные численные коэффициенты; δ_n – относительная погрешность измерения входной величины X_n , т. е. погрешность соответствующего простого ИК.

Соотношение (3) показывает связь относительной погрешности косвенного измерения с относительными погрешностями результатов соответствующих прямых измерений. В качестве примера нахождения относительной погрешности сложного ИК можно привести измерение мощности W постоянного тока, для которого функциональная зависимость (2) принимает вид $W = UI$. В этом случае согласно формуле (3) относительная погрешность результата измерения δ_W определяется суммой относительных погрешностей измерения напряжения δ_U и тока δ_I : $\delta_W = \delta_U + \delta_I$.

Каждая из погрешностей простого ИК в соотношении (3) представляет собой случайную величину на множестве аналогичных каналов. Погрешность сложного ИК также является случайной величиной, закон распределения которой можно найти, применив аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Т а б л и ц а 1

Композиционные распределения для разных значений N независимых случайных величин вида (6) при $\delta=1$

N	Плотность композиционного распределения $f_Y(Y)$	Условия
2	$(2+Y)/4$ $(2-Y)/4$ 0	$-2 \leq Y \leq 0$ $0 \leq Y \leq 2$ $ Y > 2$
3	$(3+Y)^2/16$ $(3-Y)^2/8$ $(3-Y)^2/16$ 0	$-3 \leq Y \leq -1$ $-1 \leq Y \leq 1$ $1 \leq Y \leq 3$ $ Y > 3$
4	$(4+Y)^3/96$ $[1/3 - Y^2(4+Y)/32]$ $[1/3 - Y^2(4-Y)/32]$ $(4-Y)^3/96$ 0	$-4 \leq Y \leq -2$ $-2 \leq Y \leq 0$ $0 \leq Y \leq 2$ $2 \leq Y \leq 4$ $ Y > 4$

Пусть имеются, например, две независимые случайные величины δ_1 , δ_2 и их сумма

$$Y = \delta_1 + \delta_2. \quad (4)$$

Если плотности вероятности случайных величин δ_1 , δ_2 в формуле (4) имеют вид $f_1(\delta_1)$, $f_2(\delta_2)$, то плотность вероятности суммы этих величин Y представляет собой композицию законов распределений $f_1(\delta_1)$, $f_2(\delta_2)$, которую вычисляют с помощью интеграла свертки [8]:

$$f_Y(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\delta_1) f_2(Y - \delta_1) d\delta_1, \quad (5)$$

где $f_Y(Y)$ – плотность композиционного распределения.

Дисперсия полученного распределения будет равна сумме дисперсий распределений $f_1(\delta_1)$, $f_2(\delta_2)$, в том числе и для рассмотренного выше примера нахождения мощности постоянного тока [9]. Из соотношения (5) следует, что при вычислении композиции распределений суммируются не только дисперсии, но и границы исходных распределений. Это приводит к возрастанию плотности результирующего распределения вблизи его центра и, соответственно, к её убыванию по краям. Поэтому оценка доверительной погрешности результата измерений, представленного в виде суммы границ составляющих, будет завышенной уже при $n > 2$, что известно из метрологической практики.

При оценке плотности распределения погрешности $f_Y(Y)$ сложного ИК для простоты будем полагать, что плотность распределения относительной погрешности δ_n каждого простого ИК в формуле (3) определяется симметричным равномерным распределением вида

$$f_n(\delta_n) = 1/2\delta \text{ при } |\delta_n| \leq \delta; \quad f_n(\delta_n) = 0 \text{ при } |\delta_n| > \delta. \quad (6)$$

В общем случае пределы погрешностей δ_n простых ИК различаются. При существенном преобладании одной из погрешностей остальные погрешности в формуле (3) можно не учитывать. В настоящей работе авторы рассматривают случай, когда пределы погрешностей простых ИК δ_n совпадают, и все они учитываются при расчёте плотности распределения $f_Y(Y)$.

В табл. 1 представлены результаты вычисления свёрток распределений независимых случайных величин вида (5), найденные для $N=2$; 3 или 4. Для $N=2$ в соотношении (5) использовались функции $f_1(\delta_1)$, $f_2(\delta_2)$, представленные в (6). При расчёте свёрток с $N=3$; 4 в качестве распределения $f_1(\delta_1)$ применялась функция (6), а в качестве распределения $f_2(\delta_2)$ – полученное на предыдущем этапе распределение.

На рисунке приведены кривая распределения композиции четырёх независимых погрешностей $f_Y(Y)$ и кривая распределения симметричного нормального распределения $f_0(Y)$. Кривая распределения симметричного нормального распределения определяется следующим образом:

$$f_0(Y) = 1/(\sigma\sqrt{2\pi}) \exp[-Y^2/(2\sigma^2)]. \quad (7)$$

Обе кривые рассчитаны для $\delta=1$ при совпадающих значениях дисперсии этих распределений:

$$\sigma^2 = \sigma_\Sigma^2 = 4\delta^2/3.$$

На рисунке представлена зависимость разности значений функций $f_Y(Y)$, $f_0(Y)$, вычисленных при тех же значениях параметров, от Y . Из рисунка следует, что в интервале значений $|Y| \leq 4\delta$, для которого отлична от нуля плотность вероятности $f_Y(Y)$, показанные кривые практически совпадают. Вне указанного интервала при $|Y| > 4\delta$ показатель экспоненты нормального распределения (7) достаточно велик и составляет

$$Y^2/(2\sigma^2) = 3Y^2/(8\delta^2) > 6.$$

Поэтому при $|Y| > 4\delta$ значения функции $f_0(Y)$ пренебрежимо малы. Более того, мала также и вероятность попадания погрешности Y в указанный интервал. Действительно, при нормальном распределении погрешности Y сложного ИК вероятность $P(|Y| > N\delta)$ того, что погрешность Y выйдет за границы диапазона значений $\pm N\delta$, в котором определены представленные в табл. 1 композиционные распределения, определяется соотношением

$$P(|Y| > N\delta) = \left[1 - \int_{-N\delta}^{N\delta} f_0(Y) dY \right] \cdot 100.$$

Вычисления указанной вероятности с помощью таблиц математической статистики [10] приводят к следующим результатам: для $N=2, 3, 4$ вероятность $P(|Y| > N\delta) = 1,43; 0,27; 0,05 \%$, соответственно. Иначе говоря, плотность вероятности каждого из рассмотренных выше композиционных распределений описывается нормальным распределением.

Для оценки значимости отличия представленных в табл. 1 распределений от нормального ниже рассчитаны значения коэффициента k_P , определяющего доверительные границы $\pm \delta_P$ погрешности сложного ИК. Значения k_P определяли для трёх значений доверительной вероятности P (табл. 2) с использованием формулы

$$\delta_P = \pm k_P \sigma_{\Sigma}. \quad (8)$$

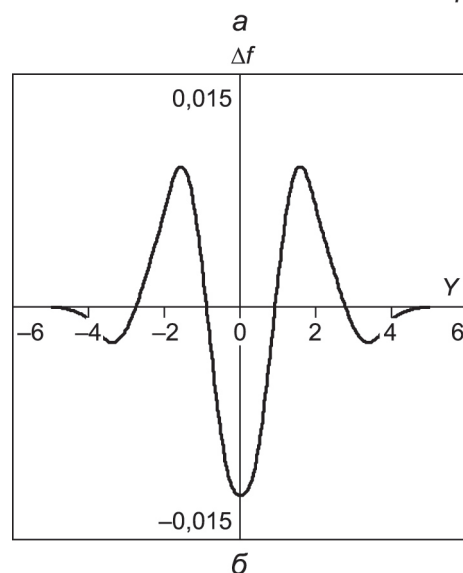
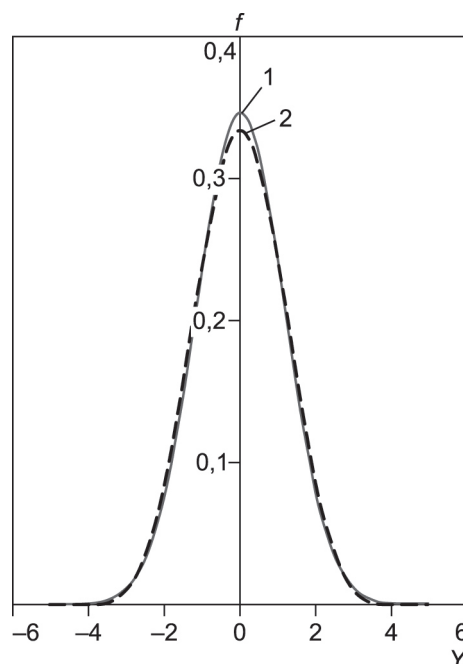
Значения доверительной границы δ_P относительной погрешности сложного ИК для заданной доверительной вероятности P вычисляли из соотношения

$$\int_{-\delta_P}^{\delta_P} f_Y(Y) dY = P,$$

где $f_Y(Y)$ – плотность композиционного распределения для $N=2, 3$ или 4 , представленная в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения k_P , рассчитанные для рассмотренных выше распределений. Для сравнения также представлены значения k_P , рассчитанные для плотности распределения погрешности простого ИК, представленной формулой (6). Для всех распределений значения коэффициента k_P близки к значениям, полученным для нормального распределения. Для широко используемого значения доверительной вероятности $P=0,95$ и композиции N равномерных распределений при $N=2; 3; 4$ отличие рассчитанных значений коэффициентов k_P от значения k_P , соответствующего нормальному распределению, не превышает 3 %.

Из приведённых в табл. 2 результатов следует, что значения коэффициента k_P слабо зависят от явного вида



Кривые распределений $f_Y(Y)$, $f_0(Y)$ при $\delta=1$ (а) и разность $\Delta f = f_Y(Y) - f_0(Y)$ значений функций (б):

1 – плотность вероятности нормального распределения $f_0(Y)$;
2 – плотность вероятности $f_Y(Y)$ композиции четырёх распределений вида (6)

Таблица 2

Значения коэффициента k_P для разных значений N и P

P	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N \rightarrow \infty$
0,90	1,559	1,675	1,661	1,652	1,645*
0,95	1,645	1,902	1,937	1,940	1,960*
0,99	1,715	2,205	2,379	2,445	2,576*

Примечание. *Значения коэффициента k_P для нормального распределения [8].

функции распределения погрешности сложного ИК. Поэтому при оценке доверительных границ погрешности ИК в соответствии с формулой (8) можно рекомендовать применение значений k_p , полученных для нормального распределения.

Л и т е р а т у р а

1. ГОСТ Р 8.596–2002. ГСИ. Метрологическое обеспечение измерительных систем. Основные положения.
2. РМГ 91–2009. ГСИ. Совместное использование понятий «погрешность измерения» и «неопределённость измерения». Общие принципы.
3. МИ 2439–97. ГСИ. Метрологические характеристики измерительных систем. Номенклатура. Принципы регламентации, определения и контроля.
4. Кузнецов В. А., Ялунин Г. В. Общая метрология М.:

«ИПК Издательство стандартов», 2001.

5. МИ 2999–2011. ГСИ. Системы автоматизированные информационно-измерительные коммерческого учёта электрической энергии. Рекомендации по составлению описания типа.
6. МИ 1317–2004. ГСИ. Результаты и характеристики погрешности измерений. Формы представления. Способы использования при испытаниях образцов продукции и контроле их параметров.
7. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. Перевод с англ. М.: Мир, 1985.
8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. 5-е изд. стер. М.: Высшая школа, 1998.
9. Сергеев А. Г. Метрология: Учебник. М.: Логос, 2005.
10. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.

Дата принятия: 30.01.2018.

ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

52.08:004.62:681.518.3

Концептуальная модель информационно-измерительной системы на базе распределённых сетей интеллектуальных геосенсоров

А. А. МАЙОРОВ, А. В. МАТЕРУХИН

Московский государственный университет геодезии и картографии,
Москва, Россия, e-mail: maiorov@miigaik.ru, a_materuhin@miigaik.ru

Предложена концептуальная модель информационно-измерительной системы на базе распределённых сетей интеллектуальных геосенсоров. При разработке модели достигнуты легкая масштабируемость системы и производительность, достаточная для обработки потоков пространственно-временных данных, которые поступают от сети геосенсоров в режиме реального времени. Показано, что данная модель обеспечивает высокий уровень интероперабельности между выделенными логическими блоками системы (совместимость как на семантическом уровне, так и на уровне процессов), возможность реализации её логических блоков как отдельных компонентов и обработки потоков пространственно-временных данных высокой интенсивности.

Ключевые слова: сети геосенсоров, потоки пространственно-временных данных, информационно-измерительные системы.

The paper proposes a conceptual model of a data acquisition system based on distributed smart geosensor networks. The tasks that were to be accomplished through the development of a conceptual model: to provide easy scalability of the system; to provide a system performance sufficient for processing of the spatio-temporal data streams coming from the geosensor network in real time; to provide the possibility of component development of the system. The proposed conceptual model provides a high level of interoperability between the allocated logical blocks of the system (compatibility at both the semantic level and the process level), the possibility of implementing its logical blocks as separate components, and the ability to process spatio-temporal data streams of high intensity.

Key words: geosensor networks, spatio-temporal data streams, data acquisition systems.

Распределённые сети интеллектуальных геосенсоров можно определить как сенсорные сети, предназначенные для получения данных о событиях, пространственный аспект которых имеет су-

щественное значение. Важность пространственного аспекта собранных данных может проявляться по крайней мере на одном из следующих уровней: