

M1, M1–2, M2, M2–3 and M3 Pt. 1: Metrological and technical requirements.

10. **EA-4/02 M:2013.** Evaluation of the Uncertainty of Measurement In Calibration.

11. **OIML R 76-1:2006.** Non-automatic weighing instruments.

Pt. 1: Metrological and technical requirements. Tests.

12. **Guidelines** on the Calibration of Non-Automatic Weighing Instruments, EURAMET Calibration Guide No. 18, version 4.0.

Дата принятия: 11.01.2018.

006.91:053.088

Оценивание расширенной неопределённости измерений при реализации байесовского подхода

И. П. ЗАХАРОВ, О. А. БОЦЮРА

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина, e-mail: newzip@ukr.net

Рассмотрены проблемы оценивания расширенной неопределённости в первой версии пересмотренного Руководства по выражению неопределённости измерения (GUM), основанного на байесовском подходе. Выполнен сравнительный анализ известных и предлагаемых авторами методик оценивания расширенной неопределённости, основанных на действующей версии GUM, стандарте ГОСТ Р 8.736–2011 и законе распространения расширенной неопределённости. Показано, что авторская методика позволяет добиться хорошего совпадения оценок расширенной неопределённости с оценками, полученными методом Монте–Карло.

Ключевые слова: неопределённость измерений, коэффициент охвата, байесовский подход, закон распространения расширенной неопределённости.

The problems of the expanded uncertainty evaluation in the first Committee Draft of the revised Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM) based on the Bayesian approach are considered. In the article compares the well-known and proposed approaches to the expanded uncertainty evaluation based on the: current version of GUM, GOST R 8.736-2011 and the law of expanded uncertainty propagation. It is shown that a proposed method makes it possible to achieve good agreement between the estimates of the expanded uncertainty and the estimates obtained by the Monte Carlo method.

Key words: measurement uncertainty, coverage factor, Bayesian approach, law of expanded uncertainty propagation.

В настоящее время Рабочая группа 1 Объединённого комитета по руководствам в метрологии (JCGM) осуществляет ревизию Руководства по выражению неопределённости измерения (GUM) [1]. Причиной ревизии является несоответствие оценок неопределённости, получаемых в соответствии с методикой GUM [2] и методом Монте–Карло (ММК) согласно Дополнению 1 [3] к GUM. Поскольку в основу [3] положен байесовский подход к оцениванию неопределённости измерений, то в обновленной версии [1] (NewGUM) должен быть также использован этот подход [4]. К концу 2014 г. первый проект NewGUM был распространён среди организаций – членов JCGM, национальных метрологических институтов и других получателей, от которых поступило более 1000, в основном негативных, комментариев и отзывов [4]. Одна из основных претензий к этому документу заключалась в том, что предложенный способ вычисления расширенной неопределённости не зависит от законов распределения входных величин и приводит к чрезмерно завышенным оценкам этой величины. В связи с этим необходимо разработать методику оценивания расширенной неопределённости измерений, в рамках которой оценки расширенной неопределённости будут согласованы с оценками, получаемыми ММК.

Проанализируем различные методики оценивания рас-

ширенной неопределённости. Для этого сравним значения расширенной неопределённости, получаемые с помощью ММК $U_{\text{ММК}}$ и исследуемых методик (ИМ) $U_{\text{ИМ}}$ при одинаковых исходных условиях. Относительное отклонение значений искомой величины в случае применения ИМ определим по формуле

$$\delta_{\text{ИМ}} = (U_{\text{ИМ}}/U_{\text{ММК}} - 1) \cdot 100. \quad (1)$$

Для упрощения анализа (уменьшения числа задаваемых переменных) поделим $U_{\text{ИМ}}$ и $U_{\text{ММК}}$ на суммарную стандартную неопределённость $u_{\text{ММК}}$, найденную с помощью ММК. В этом случае выражение (1) запишем в виде

$$\delta_{\text{ИМ}} = (k_{\text{ИМ}}^*/k_{\text{ММК}} - 1) \cdot 100, \quad (2)$$

где $k_{\text{ММК}} = U_{\text{ММК}}/u_{\text{ММК}}$ – коэффициент охвата для ММК; $k_{\text{ИМ}}^* = U_{\text{ИМ}}/u_{\text{ММК}}$ – «байесовский» коэффициент охвата, который в ряде случаев отличается от коэффициента охвата $k_{\text{ИМ}} = U_{\text{ИМ}}/u_{\text{ИМ}}$ для ИМ.

Таким образом, чтобы оценить $\delta_{\text{ИМ}}$, необходимо получить значения $k_{\text{ИМ}}^*$, $k_{\text{ММК}}$ при одинаковых исходных условиях.

В процессе вычисления $\delta_{\text{ИМ}}$ анализируем ситуацию, когда есть два источника неопределённости: один определяется используемым средством измерений (СИ), информация об инструментальной неопределённости которого содержится в сертификате калибровки, а второй – разбросом показаний этого СИ при проводимых измерениях [5]. В этом случае суммарная стандартная неопределённость измерений с использованием ИМ выражается как

$$u_{\text{ИМ}} = \sqrt{s^2/n + u_B^2},$$

где s – среднее квадратическое отклонение (СКО) показаний СИ; n – количество измерений; u_B – стандартная инструментальная неопределённость по типу В по сертификату калибровки СИ.

Суммарная стандартная неопределённость, оцененная по методике NewGUM [4]:

$$u_{\text{NewGUM}} = \sqrt{\alpha^2 s^2/n + u_B^2},$$

где $\alpha = \sqrt{(n-1)/(n-3)}$.

Для рассматриваемой в [5] ситуации $u_{\text{NewGUM}} = u_{\text{ММК}}$, тогда

$$k_{\text{ИМ}}^* = \frac{u_{\text{ИМ}}}{\sqrt{\alpha^2 s^2/n + u_B^2}} = \frac{u_{\text{ИМ}} \sqrt{n}}{s \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}},$$

где $\gamma = u_B \sqrt{n}/s$.

Действующая версия GUM. Согласно [2] расширенная неопределённость с учётом неопределённости типа А рассчитывается по формуле

$$\begin{aligned} U_{\text{GUM}} &= k_{\text{GUM}} u_{\text{GUM}} = t_{0,95; \nu_{\text{эфф}}} \sqrt{s^2/n + u_B^2} = \\ &= t_{0,95; \nu_{\text{эфф}}} s \sqrt{1 + \gamma^2} / \sqrt{n}, \end{aligned}$$

где $t_{0,95; \nu_{\text{эфф}}}$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и эффективного числа степеней свободы $\nu_{\text{эфф}}$, вычисляемого по формуле Уэлча–Саттертуэйта.

Для рассматриваемой ситуации [5] эффективное число степеней свободы [6] и «байесовский» коэффициент охвата, соответственно, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \nu_{\text{эфф}} &= (n-1) \left[1 + u_B^2 n / s^2 \right]^2 = (n-1) \left[1 + \gamma^2 \right]^2; \\ k_{\text{GUM}}^* &= \frac{U_{\text{GUM}} \sqrt{n}}{s \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = t_{0,95; \nu_{\text{эфф}}} \sqrt{\frac{1 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Первый проект NewGUM. Коэффициент охвата k_{NewGUM} при расчете расширенной неопределённости для произвольных несимметричного и симметричного законов распределения рекомендовано вычислять по формулам [4]:

$$\begin{aligned} k_{\text{NewGUM}} &= 1/\sqrt{1-P}; \\ k_{\text{NewGUM}} &= 2/(3\sqrt{1-P}). \end{aligned} \quad (4)$$

Для рассматриваемой ситуации [5] необходимо использовать (4), тогда коэффициент охвата $k_{\text{NewGUM}} = 2,98$ при $P = 0,95$ независимо от числа проведённых повторных измерений и закона распределения неопределённости типа В. Далее будет показано, что это значение отличается от $k_{\text{ММК}}$ на 49–65 % при нормальном распределении и на 49–81 % при равномерном распределении.

ГОСТ Р 8.736–2011. Согласно [7] выражение для доверительных границ погрешности прямых многократных измерений, вычисленные через СКО s случайной погрешности и границы θ распределённой равномерно неисключённой систематической погрешности (НСП) имеет вид

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95; (n-1)} s / \sqrt{n} + \theta}{s / \sqrt{n} + \theta / \sqrt{3}} \sqrt{s^2/n + \theta^2/3},$$

где $t_{0,95; (n-1)}$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы $n-1$.

Аналогичное выражение запишем для распределения НСП по нормальному закону:

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95; (n-1)} s / \sqrt{n} + 1,96 s_0}{s / \sqrt{n} + s_0} \sqrt{s^2/n + s_0^2},$$

где s_0 – СКО НСП.

Приравняем доверительные границы погрешности $\Delta_{0,95}$ к оценкам расширенной неопределённости $U_{\text{ГОСТ}}$ [6], тогда выражение для «байесовского» коэффициента охвата с учётом равенства $s_0 = u_B$ и ранее введённых обозначений примет вид:

$$k_{\text{ГОСТ}}^* = \frac{U_{\text{ГОСТ}} \sqrt{n}}{s \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \frac{t_{0,95; (n-1)} + \gamma \beta}{1 + \gamma} \sqrt{\frac{1 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad (5)$$

где $\beta = \sqrt{3}$; 1,96 для равномерного и нормального законов распределения стандартной неопределённости типа В, соответственно.

Закон распространения расширенной неопределённости. В работе [8] приведена формула для оценивания расширенной неопределённости, названная законом распространения расширенной неопределённости:

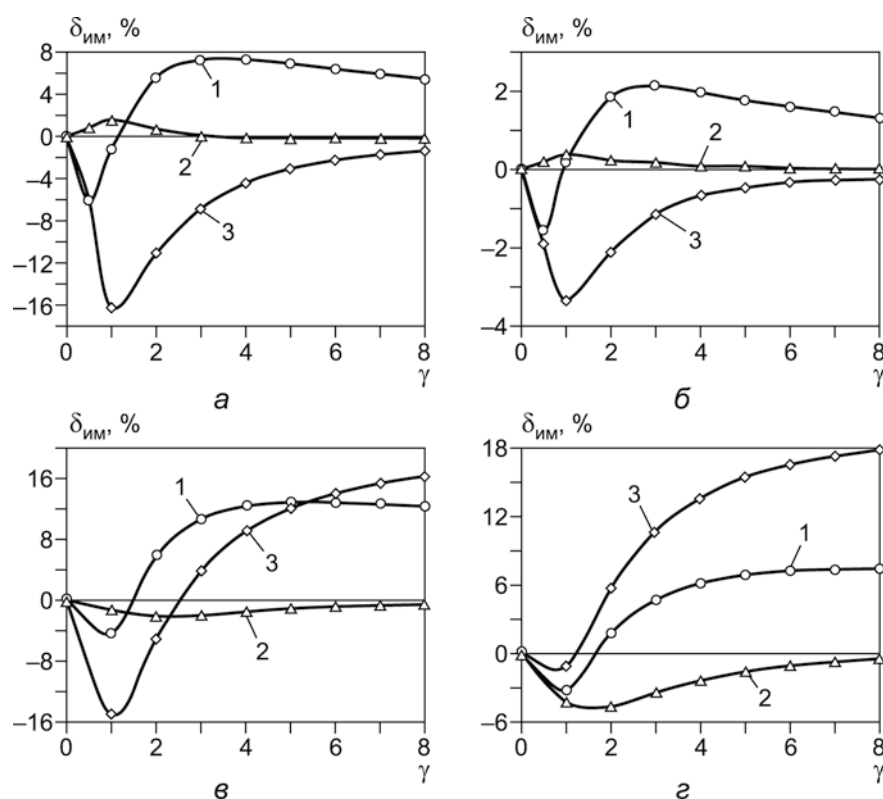
$$U_3 = \sqrt{\left[t_{0,95; (n-1)} s / \sqrt{n} \right]^2 + (k_B u_B)^2}, \quad (6)$$

где коэффициент охвата $k_B = 1,65$; 1,96 соответственно для равномерного и нормального законов распределения, приписываемых неопределённости типа В.

Тогда «байесовский» коэффициент охвата определяется по формуле

$$k_3^* = \frac{U_3 \sqrt{n}}{s \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} = \sqrt{\frac{t_{0,95; (n-1)}^2 + (k_B \gamma)^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}. \quad (7)$$

Дополнение 1 к GUM. Реализация метода Монте–Карло для нахождения коэффициента охвата осуществлялась в со-



Зависимости $\delta_{\text{ИМ}}(\gamma)$ для нормального (а, б) и равномерного (в, г) законов распределения, приписываемых неопределённости типа В, рассчитанные при $n=4$ (а, в) и 11 (б, г) измерениях для различных «байесовских» коэффициентов охвата:

1 – $k_{\text{ГОСТ}}^*$ по (5); 2 – k_3^* по (7); 3 – k_{GUM}^* по (3)

ответствии со следующим алгоритмом [3, 9]:

- 1) генерировали случайное число X_i , подчиняющееся несмещённому и немасштабированному распределению Стьюдента с заданным числом степеней свободы $\nu = n-1$;
- 2) генерировали случайное число Y_i с нулевым математическим ожиданием и заданным СКО γ , подчиняющееся нормальному (равномерному) закону распределения;
- 3) выполняли суммирование $Z_i = X_i + Y_i$;
- 4) повторяли $M=10^6$ раз шаги 1–3;
- 5) полученный массив чисел $Z_i (i=1...M)$ ранжировали по возрастанию и оценивали расширенную неопределённость по формуле

$$U = (Z_{975000} - Z_{25000})/2;$$

- 6) повторяли 10 раз шаги 1–5 и вычисляли среднее значение $\bar{U}$, а затем его относительное СКО

$$\tilde{S}(U_i) = \frac{100}{\bar{U}} \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (U_i - \bar{U})^2};$$

- 7) по полученному значению $\bar{U}$ рассчитывали коэффициент охвата при использовании ММК:

$$k_{\text{ММК}} = \bar{U} / \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}.$$

Относительные СКО полученных оценок $k_{\text{ММК}}$ не превысили 0,2 %, при этом полученные значения $k_{\text{ММК}}$ полностью совпали со значениями коэффициента охвата, полученного в [5] с помощью байесовского вывода.

Сопоставление полученных результатов. Зависимости относительных отклонений $\delta_{\text{ИМ}}(\gamma)$ коэффициентов охвата, найденных по формулам (3), (5), (7), для разных n при нормальном и равномерном законах распределения неопределённости типа В приведены на рисунке. Наименьшее отклонение от значений $k_{\text{ММК}}$ наблюдается для коэффициента k_3^* и не превышает 4,5 %. Наибольшие отклонения характерны для k_{NewGUM} (до 81 %) и k_{GUM}^* (до ± 16 %). Относительное отклонение $k_{\text{ГОСТ}}^*$ от $k_{\text{ММК}}$ составляет не более 12 %. С учётом равенства формул (1), (2) выводы для коэффициентов охвата всех ИМ можно распространить на соответствующие расширенные неопределённости $U_{\text{ИМ}}$.

Закключение. Внедрение концепции неопределённости измерений как продукта процесса международной стандартизации оценивания качества измерений должно обеспечивать получение не только единообразных, но и максимально достоверных оценок неопределённости.

Максимальные отклонения от $U_{\text{ММК}}$ наблюдаются для U_{NewGUM} (до 81 %) и U_{GUM} (до ± 16 %). Расширенная неопределённость $U_{\text{ГОСТ}}$ имеет относительное отклонение от $U_{\text{ММК}}$ не более 12 %.

Наиболее достоверную оценку расширенной неопределённости можно получить по формуле (6), относительное отклонение U_3 от $U_{\text{ММК}}$ не превышает $\pm 4,5$ % во всем диапазоне изменения γ для нормального и равномерного законов распределения неопределённости типа В.

Необходимо продолжать исследования методик вычисления расширенной неопределённости, в которых учитываются несколько неопределённостей типов А, В, а также рассматриваются отличные от нормального и равномерного законы распределения неопределённости типа В.

Л и т е р а т у р а

1. Bich W., Cox M., Dybkaer R., Elster C., Estler T., Hibbert B., Imai H., Kool W., Michotte C., Nielsen L., Pendrill L., Sidney S., van der Veen A., Woger W. Revision of the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement»// Metrologia. 2012. No. 49. P. 702–705.
2. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.
3. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the «Guide to the expression of uncertainty in measurement» – Propagation of distributions using a Monte Carlo method.

4. Bich W., Cox M., Michotte C. Towards a new GUM – an update // Metrologia 2016. No. 53. P. S149–S159.
5. Бурмистрова Н. А., Степанов А. В., Чуновкина А. Г. Вычисление расширенной неопределенности измерения в случае двух источников неопределенности // Метрология и приборостроение. 2016. № 3. С. 18–22.
6. РМГ 43–2001. Метрология. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерения».
7. ГОСТ Р 8.736–2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений.

Основные положения.

8. Захаров И. П. Исследование и повышение достоверности интервальных оценок точности прямых многократных измерений // АСУ и приборы автоматики. 2005. Вып. 132. С. 106–109.
9. Захаров И. П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях // Стандартизация, метрология, сертификация (Болгария). 2006. № 12. С. 2–6.

Дата принятия: 07.02.2018.

ЛИНЕЙНЫЕ И УГЛОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

531.717

Итерационный метод коррекции радиуса сферического щупа мобильных координатно-измерительных машин при контроле поверхностей вращения

Ф. В. ГРЕЧНИКОВ¹, А. Ф. РЕЗЧИКОВ², О. В. ЗАХАРОВ³

¹Самарский национальный исследовательский университет им. академика С. П. Королева, Самара, Россия

²Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия

³Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина, Саратов, Россия, e-mail: zov20@mail.ru

Рассмотрен итерационный метод компенсации радиуса щупа мобильных координатно-измерительных машин при контроле тел вращения. Новый метод минимизирует угол между нормальными в заданной точке к номинальному и реальному профилям в результате последовательных приближений. Результаты измерения и обработки данных показали высокую эффективность итерационного метода по сравнению с известными методами, базирующимися на методе наименьших квадратов. Наибольший эффект по уменьшению погрешности компенсации радиуса щупа достигается при небольшом числе измеренных точек и их неравномерном расположении на поверхности детали.

Ключевые слова: мобильная координатно-измерительная машина, поверхность вращения, компенсация радиуса щупа.

An iterative method of probe radius compensation for the body of revolution control on mobile coordinate measuring machines is considered. The new method minimizes the angle between the normals at the given point to the nominal and real profiles by successive approximations. Results of measurement and data processing demonstrated high efficiency of the iterative method in comparison with the known ones based on the least squares method. The greatest effect is achieved with a small number of measured points and their uneven location on the surface of the part.

Key words: mobile coordinate measuring machine, rotation surface, probe radius compensation.

Современные координатно-измерительные машины (КИМ) позволяют не только быстро и точно измерять детали, но и, используя возможности электронно-вычислительной машины, выявлять отклонения заданной формы, статистически обрабатывать данные измерений, вычислять наладочные параметры для корректировки процесса обработки [1–6]. Вместе с тем, множество задач контроля геометрических характеристик сложных поверхностей решаются недостаточно эффективно. Это обусловлено слабой разработанностью математических моделей для компенсации радиуса сфе-

рического наконечника щупа и исключения погрешностей расположения базовых поверхностей детали. Данное обстоятельство приобретает особое значение при измерении на мобильных КИМ, где трудно достижимы: равномерное расположение точек на контролируемой поверхности; подвод наконечника щупа по нормали к номинальной поверхности.

Одной из первостепенных задач контроля тел вращения будет построение поверхности (профиля) детали по измеренным координатам центра сферического наконечника щупа КИМ. Для элементарных поверхностей обычно осу-