519.246:524

Некогерентный прием модулированного по интенсивности оптического сигнала

А. В. ГУСЕВ, И. С. ЮДИН

Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга МГУ, Москва, Россия, e-mail: avg@sai.msu.ru

Рассмотрен оптимальный (в байесовской постановке) алгоритм обнаружения модулирующего информационного сигнала на выходе некогерентного фотодетектора. Показано, что при полной статистической априорной информации возможно обнаружение сигналов независимо от их амплитуды и длительности интервала наблюдения.

Ключевые слова: *фотодетектирование, пуассоновские случайные процессы, функционал плотности вероятности, оптимальное обнаружение.*

The optimal Bayesian algorithm of the modulating informational signal detection for coherent photodetector is considered. One can show that the characteristics of the detection don't depend on signal's amplitudes and duration of interval observation for total statistical priory information.

Key words: *photo detection, Poison's stochastic processes, functional of the density of probability, optimal detection.*

В теории оптической связи [1] основной характеристикой в общем случае нестационарного дробового шума $i_s(t)$ на выходе фотодетектора считается энергетический спектр

$$N_s(\omega)\leftrightarrow K_s^*(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}K_s(t,\tau)dt,$$

где $K_s(t,\tau)=\langle i_s(t)i_s(t+\tau)\rangle$ — функция корреляции; $\langle\cdot\rangle$ — символическая форма записи оператора статистического усреднения; T — время наблюдения.

Спектральная плотность $N_s(\omega)$ используется для расчета отношения сигнал—шум при некогерентном приеме. При этом реальный нестационарный случайный процесс $i_s(t)$ с функцией корреляции $K_s(t,\tau)$ и стационарный случайный процесс с функцией корреляции $K_s^*(\tau)$ статистически неэквивалентны.

Ниже рассмотрен оптимальный (в байесовской постановке) алгоритм обнаружения оптического сигнала на выходе фотодетектора при полной статистической априорной информации. Воспользовавшись комплексной формой записи произвольных узкополосных сигналов с резонансной частотой ω_0, получим оптический сигнал на входе фотодетектора

$$E(t;\lambda)=\mathrm{Re}\left[\tilde{E}(t;\lambda)\exp\{\mathrm{j}\omega_0 t\}\right],$$

где $\tilde{E}(t;\lambda)$ — комплексная огибающая, зависящая от параметра состояния $\lambda=(0,1)$.

При дальнейшем анализе будем предполагать, что мощность $W(t;\lambda)$ оптического сигнала $E(t;\lambda)$ выражается как

$$W(t;\lambda)=\left|\tilde{E}(t;\lambda)\right|^2 S\Big/(2z_0)=W_0\,[1+\lambda m(t)],$$

где S — площадь пучка на входе фотодетектора; $z_0=120\pi$ Ом — волновое сопротивление свободного пространства; $W_0=\mathrm{const}$; $m(t)$ — полезный модулирующий информационный сигнал (МИС), $|m(t)|\le 1$.

При полной статистической априорной информации $m(t)$ и мощность W_0 оптического сигнала в состоянии $\lambda=0$ считаются известными.

Нестационарная модель фототока. В классе случайных пуассоновских процессов с независимыми моментами возникновения отдельных импульсов фототок $I(t)$ на выходе фотодетектора можно представить в виде

$$I(t)=e\sum_{\nu}\delta(t-t_\nu)=\bar{I}(t)+i_s(t),\quad 0\le t\le T,\qquad(1)$$

где e — заряд электрона; $\delta(\cdot)$ — дельта-функция; $\bar{I}(t)=\langle I(t)\rangle$.

Пусть $w(t)$ — плотность вероятности случайных независимых величин $t_\nu\in(0,T)$ (для стационарного процесса $w(t)=1/T$). При таком подходе, предположив, что вероятность появления n электронов на интервале $0\le t\le T$ определяется законом Пуассона

$$p(n)=\frac{\bar{n}^n}{n!}\exp\{-\bar{n}\},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

среднее значение и функцию автокорреляции случайного процесса $I(t)$ можно записать как [2]:

$$\bar{I}(t)=\bar{n}e\int_{-\infty}^{\infty}w(t-\vartheta)\delta(\vartheta)d\vartheta=e\bar{n}_1(t);$$

$$K_s(t,\tau)=e^2\bar{n}\int_{-\infty}^{\infty}w(t-\vartheta)\delta(\vartheta)\delta(\tau-\vartheta)d\vartheta=e^2\bar{n}_1(t)\delta(\tau),\qquad(2)$$

где $\bar{n}$ — среднее число импульсов; $\bar{n}_1(t)=\bar{n}w(t)$ — среднее число импульсов в единицу времени.

При квантовом выходе фотодетектора $\eta=1$ в квазиклассическом приближении параметр $\bar{n}_1(t)$ связан с мощностью оптического поля на входе соотношением [2]:

$$\bar{n}_1(t) = \bar{n}_1(t;\,\lambda) = \frac{W(t;\,\lambda)}{\hbar\omega_0} = \frac{W_0}{\hbar\omega_0}[1+\lambda m(t)]. \qquad (3)$$

Приняв во внимание (1)—(3), представим асимптотически гауссов случайный процесс в виде

$$I(t) = ax(t),$$

где $a = e/(\hbar\omega_0)$ — масштабный коэффициент,

$$x(t) = W(t;\,\lambda) + \sqrt{W(t;\,\lambda)}\,\xi(t),\ \ 0 \le t \le T, \qquad (4)$$

$\xi(t)$ — стационарный гауссов дельта-коррелированный процесс с функцией корреляции

$$K_\xi(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle = N_0\delta(\tau),\ N_0 = \hbar\omega_0. \qquad (5)$$

Пусть $\mathbf{w}_x(x_1, x_2, ..., x_L|\lambda)$ — совместная плотность вероятности случайных величин $x_1, x_2, ..., x_L$ в состоянии $\lambda = (0,1)$, где $x_k = x(k\Delta t)$, $k = \overline{0, L}$, Δt — шаг дискретизации, $L = [[T/\Delta t]]$, $[[\cdot]]$ — целая часть действительного числа. Тогда при обработке информации в непрерывном времени статистические свойства непрерывного (аналогового) случайного процесса $x(t)$ на интервале наблюдения $(0,\ T)$ определяются функционалом плотности вероятности (ФПВ) [3]:

$$F_x[x(t)|\lambda] = \lim_{\substack{\Delta t\to\infty \\ L\to\infty}} \mathbf{w}_x(x_1, x_2, ..., x_L|\lambda).$$

Принимая во внимание (4), имеем

$$F_x[x(t)|\lambda] = F_\xi\left\{[x(t) - W(t;\,\lambda)]\Big/\sqrt{W(t;\,\lambda)}\right\}, \qquad (6)$$

где

$$F_\xi[\xi(t)] = k\exp\left\{-\frac{1}{N_0}\int_0^T \xi^2(t)\,dt\right\} \qquad (7)$$

— ФПВ гауссова белого шума $\xi(t)$ с функцией корреляции (5); k — неинформативный (не зависящий от принимаемой реализации) масштабный коэффициент.

Условное отношение правдоподобия определяется выражением

$$\Lambda = \exp\{\Theta\} = F_x[x(t)|\lambda = 1] / F_x[x(t)\lambda = 0]. \qquad (8)$$

Согласно (6)—(8)

$$\Theta = \ln\Lambda = \frac{M}{N_0W_0} - \frac{W_0}{N_0}\int_0^T S(t)\,dt; \qquad (9)$$

$$M = \int_0^T r(t)\,x^2(t)\,dt;\ \ r(t) = m(t)/[1+m(t)]. \qquad (10)$$

Решающее правило при обнаружении детерминированного МИС $m(t)$ принимает вид [3]:

$$\lambda = \begin{cases} 1,\ \Theta > \ln C; \\ 0,\ \Theta \le \ln C, \end{cases} \qquad (11)$$

где C — пороговый уровень, зависящий от выбранного критерия качества.

Учитывая, что в (9) второе слагаемое не зависит от принимаемой реализации $x(t)$, решающее правило (11) можно представить в эквивалентном виде

$$\lambda = 1\!: M > M_c;\quad M_c = N_0W_0\ln C + W_0^2\int_0^T m(t)\,dt. \qquad (12)$$

Как следует из (10) и (12), оптимальный алгоритм обнаружения МИС при некогерентном приеме оказывается нелинейным.

Характеристики обнаружения — вероятности ложной тревоги $\alpha = \alpha(M_c)$ и пропуска сигнала $\beta = \beta(M_c)$ — представляются соотношениями $\alpha = P\{M > M_c|\,\lambda = 0\}$; $\beta = P\{M \le M_c|\,\lambda = 1\}$. В соответствии с центральной предельной теоремой [4] достаточную статистику (10) можно рассматривать как асимптотически гауссову случайную величину с параметрами $\bar{M}(\lambda) = \langle M|\lambda\rangle$; $D(\lambda) = \langle M^2|\lambda\rangle - \bar{M}^2(\lambda)$.

Пусть $\Phi(\cdot)$ — интеграл вероятности, u_p — квантиль гауссова распределения, $\Phi(u_p) = p$. Тогда в приемнике Неймана—Пирсона [3] вероятность пропуска сигнала $\beta = \beta(\alpha)$ имеет вид

$$\beta \approx \Phi\Big(u_{1-\alpha}\sqrt{D(0)/D(1)} - \Delta\bar{M}\Big/\sqrt{D(1)}\Big), \qquad (13)$$

где $\Delta\bar{M} = \bar{M}(1) - \bar{M}(0)$.

Случайный процесс $x(t)$ представляет суперпозицию регулярной составляющей $W(t;\,\lambda)$ и нестационарного белого шума $\sqrt{W(t;\,\lambda)}\,\xi(t)$ с неограниченной дисперсией. Поэтому при вычислении характеристик обнаружения воспользуемся аппроксимацией $\xi(t) \to \hat{\xi}(t)$, где $\hat{\xi}(t)$ — «реальный» (сглаженный) широкополосный гауссов случайный процесс с равномерным в полосе $\omega \in (-\omega_{max},\ \omega_{max})$ энергетическим спектром и корреляционной функцией

$$K_{\hat{\xi}}(\tau) = \left\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t+\tau)\right\rangle = \sigma_{\hat{\xi}}^2\,\mathrm{sinc}(\omega_{max}\tau),$$

где $\sigma_{\hat{\xi}}^2 = \left\langle \hat{\xi}^2(t)\right\rangle = N_0\,\omega_{max}/\pi < \infty$.

В такой постановке

$$\bar{M}\left(\lambda|\omega_{max}\right) = \int_0^T r(t)\Big[W^2(t;\,\lambda) + W(t;\,\lambda)\,\sigma_{\hat{\xi}}^2\Big]dt;$$

$$D\left(\lambda|\omega_{max}\right) = 8\int_0^T K_{\hat{\xi}}(\tau)H_1(\tau;\,\lambda)\,d\tau + 4\int_0^T K_{\hat{\xi}}^2(\tau)H_2(\tau;\,\lambda)\,d\tau, \qquad (14)$$

где $H_1(\tau;\,\lambda) = \int_0^{T-\tau} h_1(t;\,\lambda)h_1(t+\tau;\,\lambda)\,dt,\ \ h_1(t;\,\lambda) = r(t)W^{3/2}(t;\,\lambda);$

$$H_2(\tau;\,\lambda) = \int_0^{T-\tau} h_2(t;\,\lambda)h_2(t+\tau;\,\lambda)\,dt,\ \ h_2(t;\,\lambda) = r(t)W(t;\,\lambda),\ \ \tau \ge 0.$$

Пусть $\left[\Delta\bar{M}\right]_{as}, \left[D(\lambda)\right]_{as}$ — асимптотические значения параметров $\Delta\bar{M}$, $D(\lambda)$ при «больших» значениях частоты среза ω_{max}. Тогда, принимая во внимание (14), находим

$$\left[\Delta\bar{M}\right]_{as} = W_0 \sigma_{\hat{\xi}}^2 \int_0^T \frac{m^2(t)}{1+m(t)} dt;$$

$$\left[D(\lambda)\right]_{as} = \frac{2\pi\sigma_{\hat{\xi}}^4}{\omega_{max}} \int_0^T W(t;\lambda)\left[\frac{m(t)}{1+m(t)}\right]^2 dt. \qquad (15)$$

Подстановка (15) в (13) приводит к следующему результату: $\omega_{max} \to \infty$: $\beta(\alpha) = 0$, т. е. при оптимальной обработке информации оказывается принципиально возможным обнаружение сколь угодно слабых МИС $m(t)$ при любом времени наблюдения T.

Обсуждение полученных результатов. На практике несомненный интерес представляет обнаружение слабого МИС ($|m(t)| << 1$). При традиционном подходе в подобной ситуации [1]:

$$x(t) \approx \begin{cases} W_0 + \sqrt{W_0}\,\xi(t), \ \lambda = 0; \\ W_0\,[1+m(t)] + \sqrt{W_0}\,\xi(t), \ \lambda = 1, \ 0 \le t \le T \end{cases}$$

и, следовательно, бинарное обнаружение «да — нет» можно рассматривать как статистическую задачу различения детерминированных сигналов $s_0(t) = W_0$ и $s_1(t) = W_0\,[1 + m(t)]$ на фоне стационарного гауссова белого шума $\sqrt{W_0}\,\xi(t)$. Такая задача решается при помощи линейного приемника; вероятность погрешности определяется отношением сигнал—шум [1, 3]:

$$\rho = \frac{W_0}{\hbar\omega_0} \int_0^T m^2(t)\,dt.$$

Однако оптимальный алгоритм обнаружения МИС является принципиально нелинейным вследствие зависимости корреляционной функции дробового шума от параметра обнаружения $\lambda = (0,1)$. Это позволяет рассматривать задачу обнаружения как проверку сложной статистической гипотезы

$$H_1: \begin{cases} \langle x(t)|\lambda = 1\rangle = W_0\,[1+m(t)]; \\ \delta K_x^{(1)}(t,\tau) = W_0\,[1+m(t)]\,N_0\,\delta(t-\tau) \end{cases}$$

против альтернативы

$$H_0: \begin{cases} \langle x(t)|\lambda = 0\rangle = W_0; \\ \delta K_x^{(0)}(t,\tau) = W_0\,N_0\,\delta(t-\tau), \end{cases}$$

где $\delta K_x^{(\lambda)}(t,\tau) = \langle \delta x(t)\delta x(\tau)|\lambda\rangle$; $\delta x(t) = x(t) - \langle x(t)\rangle$.

Так как погрешность оптимальной оценки дисперсии гауссова случайного процесса стремится к нулю при любом интервале наблюдения $(0, T)$ (парадокс Слепяна [5]), вероятность пропуска МИС оказывается при полной априорной информации равной нулю независимо от его амплитуды и длительности интервала наблюдения $(0, T)$.

Литература

1. **Гальярди Р. М., Карп Ш.** Оптическая связь. М.: Связь, 1978.

2. **Рытов С. М.** Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1977. Т. 1.

3. **Сосулин Ю. Г.** Теоретические основы радиолокации и радионавигации. М.: Радио и связь, 1992.

4. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989.

5. **Куликов Е. И.** Методы измерения случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986.

Дата принятия 19.03.2013 г.