006.091

Некоторые случаи оценивания неопределенности измерений

И. П. ЗАХАРОВ, С. В. ВОДОТЫКА, Е. А. КЛИМОВА, Н. С. ШЕВЧЕНКО

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина, e-mail: newzip@ukr.net

Рассмотрено оценивание неопределенности измерений для величин, выраженных в децибелах. Приведены результаты расчета коэффициентов охвата для дробного числа степеней свободы, проведен учет квантования при оценивании неопределенности измерений с многократными наблюдениями.

Ключевые слова: *стандартная и расширенная неопределенности, число степеней свободы.*

The measurement uncertainty evaluation for quantities expressed in decibels is considered. The results of the coverage factor calculation for fractional number of degrees of freedom are presented.

Key words: *standard and expanded uncertainties, number of degrees of freedom.*

Руководство по выражению неопределенности измерения [1] разрабатывалось как документ, дающий единый подход к оцениванию точности измерений. Как любой нормативный документ, претендующий на универсальность, он содержит большое число «белых пятен», вызывающих постоянные вопросы и претензии пользователей. Рассмотрим некоторые случаи, не описанные в [1], с которыми столкнулись авторы при оценивании неопределенности измерений.

Оценивание неопределенности измерений для величин, выраженных в децибелах. В практике электрических, акустических, оптических и других измерений широкое распространение получила безразмерная единица — децибел. Она применяется для выражения как относительных величин (затухания, усиления, динамического и частотного диапазонов), так и параметров интенсивности — плотности потока мощности, уровня звукового давления и других энергетических и силовых величин относительно некоторого исходного значения, принятого за нулевое. Удобство применения этой единицы измерения связано со свойствами логарифма: использованием операций сложения и умножения вместо операций соответственно умножения и возведения в степень, а также существенным уменьшением диапазона числовых значений величин, выраженных в децибелах, при работе в широком диапазоне исходных величин.

Значения исходной величины Y связаны со значениями величины X, выраженной в децибелах, нелинейной (показательной) зависимостью

$$Y = Y_0 \cdot 10^{X/M},$$

где Y_0 — исходный (опорный) уровень, выраженный в абсолютных единицах; M — коэффициент, равный 10, при измерениях энергетических величин и 20 — силовых величин. Это ставит задачу определения условий эквивалентности оценок результата и неопределенности измерений, получаемых при расчетах в абсолютных единицах и при пересчете из соответствующих оценок, полученных в децибелах [2].

Определение оценки измеряемой величины. В качестве такой оценки при многократных измерениях берется среднее арифметическое отдельных наблюдений. Запишем общее выражение для перевода в абсолютные значения Y_i отдельных показаний индикаторного блока X_i, выраженных в децибелах:

$$Y_i = Y_0 \cdot 10^{X_i/M}.$$

Среднее арифметическое результатов отдельных наблюдений Y_i будет

$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{Y_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{X_i/M}. \qquad (1)$$

Выразим значение отдельного показания индикаторного блока X_i через случайную погрешность Δ_i:

$$X_i = \overline{X} + \Delta_i, \qquad (2)$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ — среднее арифметическое показаний индикаторного блока.

При подстановке выражения (2) в (1) получим

$$\overline{Y} = \frac{Y_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{(\overline{X}+\Delta_i)/M} = \frac{Y_0}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\overline{X}/M} \cdot 10^{\Delta_i/M} =$$

$$= \frac{Y_0}{n} \cdot 10^{\overline{X}/M}\sum_{i=1}^{n} 10^{\Delta_i/M} = \overline{Y}^* \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\Delta_i/M}. \qquad (3)$$

Здесь $\overline{Y}^* = Y_0 \cdot 10^{\overline{X}/M}$ — оценка измеряемой величины, получаемая обычно при пересчете из среднего арифметического показаний индикаторного блока $\overline{X}$.

Наличие в (3) величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 10^{\Delta_i/M}$ приводит к смещению результата измерения. Относительное значение этого смещения определим по формуле

$$\delta Y = \left[\left(\overline{Y}^* - \overline{Y}\right)/\overline{Y}\right] \cdot 100.$$

В результате вычислений методом Монте-Карло (ММК) была получена зависимость $\delta\overline{Y}$ от среднего квадратического отклонения (СКО) случайной погрешности $S(\Delta_i)$, приведенная на рис. 1. Аппроксимацию этой зависимости найдем разложением в ряд выражения (3):

$$\overline{Y} = \frac{Y_0}{n}\cdot 10^{\overline{X}/M}\left[\sum_{i=1}^{n}1 + \ln 10\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i}{M} + \frac{\ln^2 10}{2!}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\Delta_i}{M}\right)^2\right] =$$

$$= Y^*\left[1 + \frac{S^2(\Delta_i)}{2}\left(\frac{\ln 10}{M}\right)^2\right],$$

откуда

$$\delta Y \approx -50\,S^2(\Delta_i)(\ln 10/M)^2 = \begin{cases} -2{,}65\,S^2(\Delta_i) \text{ для } M=10; \\ -0{,}66\,S^2(\Delta_i) \text{ для } M=20. \end{cases}$$

***Оценивание стандартной неопределенности типа* А.** Выражение для стандартной неопределенности типа А измеряемой величины Y можно представить в виде

$$u_A(Y) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_0\cdot 10^{X_i/M} - Y_0\cdot 10^{\overline{X}/M}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_0\cdot 10^{(\overline{X}+\Delta_i)/M} - Y_0\cdot 10^{\overline{X}/M}\right)^2} =$$

$$= \overline{Y}^*\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\Delta_i/M} - 1\right)^2}. \qquad (4)$$

Выражение (4) в предположении $\Delta_i/M \to 0$ имеет вид

$$u_A^*(Y) = \overline{Y}^*\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{\Delta_i}{M}\ln 10 - 1\right)^2} =$$

$$= \left(\ln 10/M\right)\overline{Y}^*\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2}.$$

Поскольку в этом выражении $\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\Delta_i^2} = u_A(X)$ — стандартная неопределенность типа А показаний индикаторного блока, можно записать

$$u_A^*(Y) = \left(\ln 10/M\right)\overline{Y}^*\,u_A(X) \approx \begin{cases} 0{,}23\,\overline{Y}^*u_A(X) \text{ для } M=10; \\ 0{,}115\,\overline{Y}^*u_A(X) \text{ для } M=20. \end{cases}$$

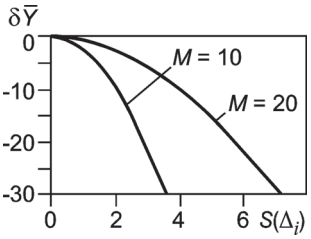

Рис. 1. Зависимость $\delta\overline{Y}(S(\Delta_i))$

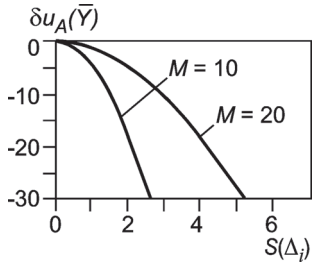

Рис. 2. Зависимость $\delta u_A(\overline{Y})(S(\Delta))$

Таким образом, при определенных значениях стандартной неопределенности типа А для наблюдаемых показаний индикатора $u_A(X)$ можно перейти к стандартной неопределенности $u_A(Y)$ путем умножения ее на $\left(\ln 10/M\right)\overline{Y}^*$. Относительная погрешность такого перехода

$$\delta u_A(Y) = \frac{u_A^*(Y) - u_A(Y)}{u_A(Y)}\,100,$$

ее зависимость от СКО случайной погрешности $S(\Delta_i)$, рассчитанная ММК, приведена на рис. 2.

Результатом аппроксимации этой зависимости является выражение

$$\delta u_A(Y) \approx -\frac{7}{8}\left(\frac{\ln 10}{M}\right)^2 S^2(\Delta_i)100 = \begin{cases} -4{,}64S^2(\Delta_i) \text{ для } M=10; \\ -1{,}16\,S^2(\Delta_i) \text{ для } M=20. \end{cases}$$

***Оценивание стандартной неопределенности типа* В.** Выражение для стандартной неопределенности типа В можно получить методом частных приращений. Действительно, вклад неопределенности типа В выраженной в децибелах величины $u_B(X)$ в неопределенность исходной величины $u_B(Y)$ будет

$$u_B(Y) = \left(Y_0\cdot 10^{[X+u_B(X)]/M} - Y_0\cdot 10^{[X-u_B(X)]/M}\right)\Big/2 =$$

$$= Y\left(10^{u_B(X)/M} - 10^{-u_B(X)/M}\right)\Big/2,$$

откуда приближенную оценку неопределенности измерения Y по типу В можно определить из выражения

$$u_B^*(Y) = Y\left(\ln 10\right)\Big/M\,u_B(X) \approx \begin{cases} 0{,}23Yu_B(X) \text{ для } M=10; \\ 0{,}115Yu_B(X) \text{ для } M=20, \end{cases} \qquad (5)$$

где $u_B(X) = u(\Delta)$ — стандартная неопределенность типа В измерения X.

Относительная погрешность вычисления $u_B^*(Y)$ по (5) будет

$$\delta u_B(Y) = 100\left[u_B^*(Y) - u_B(Y)\right]\Big/u_B(Y),$$

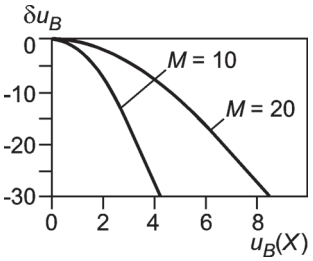

Рис. 3. Зависимость $\delta u_B(u_B(X))$

зависимость которой от $u_B(X)$, рассчитанная ММК, приведена на рис. 3.

Аппроксимация этой зависимости дает выражение

$$\delta u_B(Y) = -u_B^2(X)\frac{\ln^2 10}{2{,}7M^2}\cdot 100 =$$

$$= \begin{cases} -1{,}96u_B^2(X) \text{ для } M=10; \\ -0{,}49u_B^2(X) \text{ для } M=20. \end{cases}$$

Оценивание суммарной стандартной и расширенной неопределенностей. Оценка суммарной стандартной неопределенности будет иметь вид

$$u_c^*(Y) = \sqrt{\left[c_A u_A(X)\right]^2 + \left[c_B u_B(X)\right]^2}, \qquad (6)$$

где $c_A = (\partial Y/\partial X) = (\ln 10/M)Y^*$, $c_B = (\partial Y/\partial \Delta) = (\ln 10/M)Y^*$ — коэффициенты чувствительности.

При подстановке этих коэффициентов в (6) получим

$$u_c^*(Y) = \left(\ln 10/M\right)\overline{Y}^*\sqrt{u_A^*(X) + u_B^*(X)} =$$

$$= \left(\ln 10/M\right)Y^* u_c(X) \approx \begin{cases} 0{,}23\overline{Y}^* u_c(X) \text{при } M=10; \\ 0{,}115\overline{Y}^* u_c(X) \text{ при } M=20. \end{cases}$$

Расширенная неопределенность $U(Y)$ будет равна [1]:

$$U(Y) = ku_c(Y),$$

где k — коэффициент охвата, определяемый для эффективного числа степеней свободы и доверительной вероятности по таблице Стьюдента.

Оценка коэффициента охвата для абсолютных величин равна коэффициенту охвата для величин, выраженных в децибелах, так как

$$\nu_{эфф}^* = (n-1)\left[\frac{u_c(Y)}{u_A(Y)}\right]^4 = (n-1)\left[\frac{(\ln 10/M)Y^* u_c(X)}{(\ln 10/M)\overline{Y}^* u_A(\overline{X})}\right]^4 =$$

$$= (n-1)\left[\frac{u_c(X)}{u_A(X)}\right]^4.$$

Таким образом, оценка расширенной неопределенности будет

$$U^*(Y) = k\left(\ln 10/M\right)Y^* u_c^*(X) \approx \begin{cases} 0{,}23Y^* U(X) \text{при } M=10; \\ 0{,}115Y^* U(X) \text{ при } M=20, \end{cases}$$

т. е. можно рассчитывать $u_c(X)$ или $U(X)$, а затем переходить к оценкам $u_c^*(Y)$ или $U^*(Y)$ путем их умножения на $(\ln 10/M)Y^*$. Погрешность такого пересчета будет зависеть от соотношения стандартных неопределенностей типов А и В.

Расчет коэффициента охвата для дробного числа степеней свободы. В соответствии с [1] расширенная неопределенность результата измерения определяется умножением суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата. При наличии вклада, оцененного по типу А, этот коэффициент рассчитывают как коэффициент Стьюдента при вероятности 0,95 для эффективного числа степеней свободы $\nu_{эфф}$. Последнее определяется по формуле Велча—Саттерсвейта и в общем случае представляет собой дробное число. В [1, п. G.6.4] рекомендовано уменьшать полученное значение $\nu_{эфф}$ до ближайшего целого числа или интерполировать. В случае, когда получаемое значение $\nu_{эфф}$ мало, погрешность определения коэффициента Стьюдента при его округлении может иметь существенное значение. Например, для $\nu_{эфф}$, лежащего в диапазоне 1—2, коэффициент охвата изменяется в 3 раза (от 12,7 до 4,3).

Авторами была поставлена цель получения значений коэффициента Стьюдента для дробных чисел степеней свободы и аппроксимации зависимости $t_{0,95}(\nu)$ аналитическим выражением с приемлемой точностью [3].

В основе расчета лежит операция численного интегрирования. Значение коэффициента Стьюдента $t_p(\nu)$ для заданного уровня доверия p и числа степеней свободы ν находим из равенства

$$\int_0^{t_p(\nu)} p(t, \nu)dt = p/2,$$

где $p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}}\frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)}\left(1 + t^2/\nu\right)^{-(\nu+1)/2}$ — плотность распределения вероятности Стьюдента.

Простейший алгоритм расчета включает следующие операции:

1) вычисление значения $p(0, \nu)$ по (1) для начального значения переменной $t = 0$ и заданного числа степеней свободы ν;

2) вычисление значения $p(\Delta t, \nu)$, где Δt — шаг интегрирования;

3) расчет значения интеграла $\int_0^{\Delta t} p(t, \nu)dt$ по формуле численного интегрирования;

4) вычисление значения $p(2\Delta t, \nu)$ и интеграла $\int_0^{2\Delta t} p(t)dt$;

5) продолжение цикла вычислений до достижения интегралом $\int_0^{n\Delta t} p(t)dt$ значения $p/2$; в этом случае коэффициент охвата $t_p(\nu) = n\Delta t$.

Очевидно, что для малых значений Δt и ν (для больших значений коэффициента Стьюдента) время вычисления по такому алгоритму будет очень длительным. Для его сокращения был применен итерационный алгоритм.

В таблице приведены рассчитанные значения коэффициента Стьюдента для p = 0,95 и числа степеней свободы 1—6,9 с шагом 0,1 [3].

Рассчитанные значения коэффициента Стьюдента

ν	$t_{0,95}(\nu)$	$t_{0,9545}(\nu)$	ν	$t_{0,95}(\nu)$	$t_{0,9545}(\nu)$	ν	$t_{0,95}(\nu)$	$t_{0,9545}(\nu)$
1,0	**12,706**	**13,968**	**3,0**	**3,182**	**3,307**	**5,0**	**2,571**	**2,648**
1,1	10,277	11,203	3,1	3,125	3,245	5,1	2,556	2,633
1,2	8,649	9,364	3,2	3,073	3,189	5,2	2,541	2,617
1,3	7,501	8,074	3,3	3,025	3,137	5,3	2,527	2,603
1,4	6,657	7,131	3,4	2,981	3,089	5,4	2,514	2,589
1,5	6,017	6,418	3,5	2,940	3,045	5,5	2,502	2,575
1,6	5,517	5,864	3,6	2,902	3,005	5,6	2,490	2,562
1,7	5,119	5,424	3,7	2,868	2,967	5,7	2,478	2,550
1,8	4,795	5,067	3,8	2,835	2,932	5,8	2,468	2,539
1,9	4,527	4,773	3,9	2,805	2,900	5,9	2,457	2,527
2,0	**4,303**	**4,527**	**4,0**	**2,776**	**2,869**	**6,0**	**2,447**	**2,517**
2,1	4,112	4,318	4,1	2,745	2,841	6,1	2,437	2,506
2,2	3,949	4,140	4,2	2,725	2,814	6,2	2,428	2,496
2,3	3,807	3,985	4,3	2,702	2,789	6,3	2,419	2,487
2,4	3,684	3,850	4,4	2,680	2,766	6,4	2,410	2,478
2,5	3,575	3,732	4,5	2,659	2,743	6,5	2,402	2,469
2,6	3,478	3,627	4,6	2,639	2,722	6,6	2,394	2,460
2,7	3,392	3,534	4,7	2,621	2,702	6,7	2,386	2,452
2,8	3,315	3,450	4,8	2,603	2,684	6,8	2,379	2,444
2,9	3,245	3,375	4,9	2,586	2,666	6,9	2,372	2,436

Для вероятности охвата 0,95 получено аналитическое выражение, аппроксимирующее значение коэффициента Стьюдента в диапазоне 2,37—12,7 (что соответствует изменению числа степеней свободы от 7 до 1):

$$t_{0,95}(\nu) = \frac{2{,}348551}{1 - 1{,}45153\exp(-0{,}576295\nu)}. \qquad (7)$$

Относительная погрешность аппроксимации в этом диапазоне не превышает ± 2 %.

Учет квантования при оценивании неопределенности измерений с многократными наблюдениями. При оценивании неопределенности измерений в процессе калибровки цифровых измерительных приборов (ЦИП) одной из доминирующих составляющих является неопределенность квантования калибруемого прибора. При отсутствии наблюдаемого рассеивания показаний ЦИП расчет этой неопределенности не вызывает затруднений. В [1] описан подход к объединению стандартных неопределенностей, связанных с квантованием измеряемой величины $u(\Delta_o)$ и наблюдаемым рассеиванием результатов измерений u_A, основанный на применении правила суммирования дисперсий:

$$u_\Sigma = \sqrt{u^2(\Delta_o) + u_A^2}; \qquad (8)$$

$$u(\Delta_o) = q/2\sqrt{3};$$

$$u_A = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right] \Big/ [n(n-1)]}.$$

Здесь q — единица младшего разряда в отсчете X_i; n — число проведенных многократных измерений.

Как показали исследования, такая оценка является завышенной.

Исследование «истинных» значений совместной неопределенности u_Σ проводилось авторами ММК. Результаты вычислений представлены на рис. 4, откуда следует, что оценка совместной стандартной неопределенности, найденная по (8), при определенных условиях почти в 2 раза превышает «истинную» оценку совместной неопределенности.

Аппроксимация «истинных» значений неопределенности дала следующее выражение для оценивания совместной неопределенности:

$$u_\Sigma = \sqrt{\left(q^2/12\right)\exp\left[-60\sqrt[2]{n^3}\left(u_A/q\right)^3\right] + u_A^2}. \qquad (9)$$

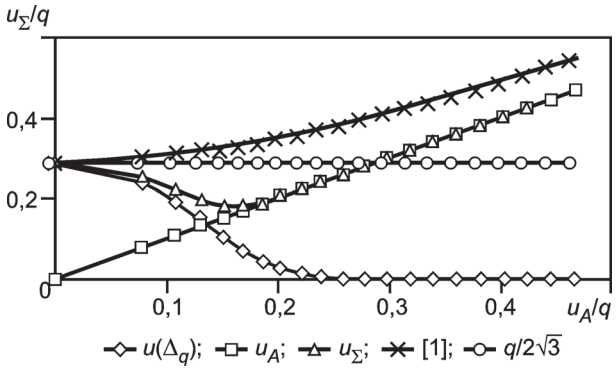

Рис. 4. Исследование неопределенности, связанной с квантованием измеряемой величины, для числа измерений n = 5

Для оценивания расширенной неопределенности можно рассчитать эффективное число степеней свободы для u_Σ по формуле $\nu_{эфф} = (n-1)(u_\Sigma/u_A)^4$. Значения $\nu_{эфф}$ будут изменяться от $n-1$ (при $u_A \geq 0{,}4q\sqrt{n}$) до ∞ (при $u_A = 0$).

Выводы. Процедура вычисления среднего арифметического входных величин, выраженных в децибелах, с последующим пересчетом в оценку измеряемой величины дает из-за связывающей их нелинейной зависимости смещенную оценку. Это смещение не будет превышать 10 % при СКО случайной погрешности не более 2 дБ для энергетических и 4 дБ для силовых величин. Если стандартная неопределенность типа А величины, выраженной в децибелах, не превышает 1,8 дБ для энергетических и 3,6 дБ для силовых величин, то относительная погрешность ее оценивания не более 15 %. Если стандартная неопределенность типа В величины, выраженной в децибелах, не превышает 2,8 дБ для энергетических и 5,6 дБ для силовых величин, то относительная погрешность ее оценивания не более 15 %. Представленный алгоритм позволяет рассчитать коэффициент Стьюдента для любого дробного числа степеней свободы. Предложенная формула (7) для аппроксимации зависимости коэффициента Стьюдента от числа степеней свободы имеет относительную погрешность не более ± 1 % в диапазоне изменения ν от 1 до 6. Выражение (9) для вычисления совместной неопределенности, связанной с квантованием измеряемой величины и наблюдаемым рассеиванием результатов измерений, обеспечивает уменьшение неопределенности по сравнению с выражением (8), приведенным в [1], до 2 раз.

Литература

1. **Guide** to the Expression of Uncertainty in Measurement. Geneva: ISO, 1993.

2. **Захаров И. П., Шевченко Н. С.** Особенности оценивания неопределенности измерений при выражении входных величин в децибелах // Системи обробки інформації. 2009. Вип. 5 (79). С. 29—33.

3. **Захаров И. П., Климова Е. А.** Расчет значений коэффициента Стьюдента для дробного числа степеней свободы // Системы обработки информации. 2010. № 4 (85). С. 43—47.

4. **Захаров И. П., Водотыка С. В.** Учет погрешности квантования при оценивании неопределенности результатов измерений с многократными наблюдениями // Системи обробки інформації. 2011. Вип. 8 (98). С. 39—44.

Дата принятия 29.01.2013 г.

53.081.1

О независимости, взаимозаменяемости и логической корреляции случайных переменных в метрологии

В. ВЁГЕР

Физико-технический институт, Берлин, Германия, e-mail: wolfgang.woeger@ptb.de

Представлена байесовская трактовка измерений в условиях повторяемости, которая в конечном итоге сводится к замене (полной) независимости внутри последовательности случайных переменных, генерирующих наблюдения, условной независимостью, означающей наличие скрытой корреляции случайных переменных внутри последовательности. Введено понятие взаимозаменяемой совместной плотности распределения вероятностей для краткого обсуждения связи измерений в условиях повторяемости с центральной теоремой о представлении де Финетти, которая требует использования байесовского подхода.

Ключевые слова: *плотность распределения вероятностей, байесовский подход, корреляция случайных переменных, модель измерения.*

A Bayesian understanding of measurements under repeatability conditions is presented, finally leading to the replacement of (complete) independence within the sequence of random variables generating the observations, with a conditional independence which means a hidden correlation of the random variables in the sequence. The concept of an changeable joint probality densiti function is introduced to briefly discuss the relation of measurements under repeatability conditions to de Finetti's purely mathematical General Representation Theorem that, moreover, calls for a Bayesian approach.

Key words: *probability density function, Bayesian approach, correlation of the random variables, measurement model.*

Неполное знание двух или более величин математически описывается совместной плотностью распределения вероятностей (ПРВ), которая помимо известных математических ожиданий и стандартных отклонений содержит также в качестве дополнительных параметров известные ковариации или коэффициенты корреляции. Здесь ПРВ понимается как математическое выражение уровня знаний, определяемого информацией об изучаемых величинах. Случайную переменную с ПРВ для неизвестной фиксированной величины будем обозначать тем же символом, что и саму вели-