

Методика частотно-временного анализа рядов измерений спектров излучения ночного мезосферного озона в миллиметровом диапазоне длин волн

С. Б. РОЗАНОВ, А. С. ЗАВГОРОДНИЙ, А. Н. ИГНАТЬЕВ

Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия, e-mail: alexeysz88@mail.ru

Для исследования наблюдаемых на миллиметровых волнах с поверхности Земли вариаций спектров излучения ночного мезосферного озона разработана методика частотно-временного анализа нерегулярных по времени выборок данных. Приведены основные расчётные соотношения, а также результаты численных экспериментов с монохроматическими и шумовыми сигналами, согласующиеся с теоретическими оценками.

Ключевые слова: озон, миллиметровые волны, мезосфера, спектрометр, выборка, частотный анализ, окно наблюдений, численное моделирование.

The technique of time-frequency analysis of unevenly sampled data sets obtained from ground-based millimeter-wave (microwave) observations of night mesospheric ozone emission spectra was developed. Both the basic calculation formulas and results of numerical simulations with sinusoidal and noise signals are presented. Results of the simulations are in good agreement with the theoretical estimates.

Key words: ozone, millimeter waves, mesosphere, spectrometer, sample, frequency analysis, data window, numerical simulation.

Атмосферный озон защищает жизнь на Земле от ультрафиолетового излучения Солнца, а также во многом определяет тепловой режим атмосферы, влияет на климат и экологию [1]. Техногенное загрязнение атмосферы в последние десятилетия привело к истощению озонового слоя, к появлению таких аномальных явлений, как озоновые дыры над Антарктикой и Арктикой [1, 2]. Для контроля состояния озонового слоя необходимы аппаратура и методы, позволяющие регистрировать общее содержание озона и его вертикальное распределение (ВРО) в атмосфере.

Дистанционное зондирование озона на миллиметровых (ММ) волнах (микроволнах) имеет ряд преимуществ по сравнению с оптическими и контактными методами [3, 4]. Регулярные измерения позволили обнаружить закономерности изменений ВРО в стратосфере на высотах 15—50 км [4]. В ночное время содержание озона выше 50 км (в мезосфере) значительно увеличивается, и можно получить данные о ВРО на высотах до 90—100 км [5, 6].

В 1999—2006 гг. в ФИАН и ИФА РАН были проведены первые одновременные измерения содержания озона и температуры атмосферы на высотах около 90 км в ночное время [5, 6], по результатам которых были восстановлены профили ВРО. Оказалось, что вторичный максимум ночного распределения озона вблизи 90 км демонстрирует большую межсуточную изменчивость. В ходе этих измерений были также обнаружены более быстрые вариации излучения ночного озона с периодами от нескольких минут до нескольких часов [6]. Создание в ФИАН нового автоматизированного микроволнового озонметра с улучшенной чувствительностью позволило детально исследовать быстрые вариации излучения ночного мезосферного озона [7, 8].

Основная цель данной работы — создание методики частотно-временного анализа неравномерных по времени ря-

дов наземных микроволновых измерений спектров излучения ночного мезосферного озона, позволяющей выявлять колебания интенсивности (яркостной температуры) излучения и оценивать длительность колебательных процессов.

Аппаратура и результаты наблюдений. Новый микроволновый озонметр ФИАН, предназначенный для регистрации линии излучения атмосферного озона с центральной частотой $f_0 = 142,175$ ГГц (длина волны 2,1 мм), состоит из малощумящего супергетеродинного приёмника со смесителем на планарном диоде Шоттки, двух анализаторов спектра (акустооптического и фильтрового), компьютера со специальными интерфейсами и программным обеспечением. Однополосная шумовая температура озонметра снижена до 1100 К по сравнению с 1500 К в неохлаждаемом варианте у предыдущего поколения аппаратуры [9]. Калибровка озонметра выполняется по двум чернотельным излучателям, один из которых находится при комнатной температуре, а второй охлаждается жидким азотом. Широкополосный акустооптический спектроанализатор (АОС) обеспечивает полосу анализа около 500 МГц с разрешением 1 МГц, а узкополосный 50-канальный фильтровый анализатор спектра АС-50 при полосе 10,8 МГц имеет разрешение, изменяющееся от 0,1 МГц в центре линии до 0,6 МГц на краях полосы. В [5, 6] показано, что наиболее информативными для анализа содержания и ВРО на высотах 50—100 км являются измерения яркостных температур излучения анализатором АС-50 при отстройках частоты δf в пределах примерно ± 1 МГц от центра линии.

Для повышения отношения сигнал—шум производится накопление сигналов. Время накопления единичных спектров озона составляло 100 с, период записи — около 110 с. В результате ночных наблюдений в Москве с анализатором АС-50 в холодные месяцы 2014—2016 гг. получены ряды еди-

нических спектров излучения озона длительностью 4,5—16,0 ч. Яркостные температуры единичных спектров озона T_0 скорректированы (умножены) на значение тропосферного поглощения. В ходе наблюдений вариации яркостных температур единичных спектров озона в центральных каналах АС-50 неоднократно достигали 2—4 К и значительно превышали средние квадратичные погрешности измерений, составлявшие около 1 К.

Несмотря на автоматизированную методику наблюдений, процесс накопления спектров излучения озона периодически (обычно раз в 25 мин.) прерывается для калибровки озонометра. Также возможны паузы для изменения параметров озонометра оператором. Всё это приводит к тому, что результаты наблюдений — это неравномерные по времени ряды значений яркостных температур в каналах анализатора спектра.

При работе с АС-50 для определения ВРО в мезосфере оптимальным является использование разностей яркостных температур линии озона, измеренных в каналах с отстройками частоты $\delta f = 0; \pm 50; \pm 150; \pm 250$ кГц от центра линии [6]. В варианте метода Тихонова, применяемом в ФИАН для восстановления ВРО [4], используют не абсолютные значения яркостных температур, а их разности. Такой подход существенно снижает влияние возможных дрейфов аппаратуры и погрешностей калибровки. Поэтому объектом рассматриваемого ниже частотно-временного анализа являются массивы разностей яркостных температур единичных «внеатмосферных» спектров:

$$\Delta T_1 = T_0^{2k}(0) - T_0^{2k}(50 \text{ кГц}); \quad (1)$$

$$\Delta T_2 = T_0^{2k}(50 \text{ кГц}) - T_0^{2k}(150 \text{ кГц}); \quad (2)$$

$$\Delta T_3 = T_0^{2k}(150 \text{ кГц}) - T_0^{2k}(250 \text{ кГц}), \quad (3)$$

где $T_0^{2k}(\delta f) = [T_0(+\delta f) + T_0(-\delta f)]/2$ — полусуммы значений яркостных температур на двух крыльях линии. При времени накопления единичных спектров 100 с оценки экспериментальных погрешностей составляют $\sigma_1 = 1,13$ К для ΔT_1 и $\sigma_{23} = 1,6$ К для $\Delta T_2, \Delta T_3$.

Методика частотно-временного анализа. Рассмотрим неравномерную по времени выборку, состоящую из N измерений X_j некоторой величины $X(t)$, полученных в моменты времени $t = t_j, j = 1, \dots, N, t_{j+1} > t_j, t_N - t_1 = T_T$. В [10—15] описаны несколько подходов к частотно-временному анализу таких выборок.

Наиболее известными методами частотно-временного анализа рядов измерений являются оконное преобразование Фурье [10] и вейвлет-преобразование [11]. К сожалению, алгоритмы, как быстрого преобразования Фурье, так и вейвлет-преобразования, работают для равномерных выборок. Линейная или сплайн-интерполяция неравномерных данных на равномерную временную сетку может приводить к потере в спектре мощности сигнала $X(t)$ высоких частот, приближающихся к частоте Найквиста [12]:

$$\omega = \pi/\Delta t,$$

где ω — круговая частота; Δt — средний интервал времени между измерениями.

Решение задачи адаптации аппарата вейвлет-преобразования для анализа неравномерных по времени выборок и последующего определения статистических характеристик полученных результатов весьма трудоёмко и признано целесообразным в рамках данной работы.

Рассмотрим другие возможные методы (пока без использования временных окон). Достаточно часто для расчёта спектра мощности неравномерной выборки используется дискретное преобразование Фурье, как и для равномерной выборки [12]. Это даёт классическую периодограмму:

$$Q_X(\omega) = \frac{1}{N} \left[\left(\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}) \cos \omega t_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}) \sin \omega t_j \right)^2 \right], \quad (4)$$

где $\bar{X}$ — среднее по выборке значение $X(t)$.

Недостатками этого подхода являются усложнение статистических свойств спектра $Q_X(\omega)$ по сравнению со случаем равномерной выборки, что затрудняет оценки значимости найденных спектральных компонент, и потеря инвариантности спектра относительно сдвига начала отсчёта времени t .

Авторы [12, 13], используя результаты работы [14], модифицировали классическую периодограмму (4) таким образом, чтобы избавиться от недостатков для неравномерных выборок, отмеченных выше. Так называемая периодограмма Ломба определяется как

$$Q_{LX}(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}) \cos \omega(t_j - \tau) \right]^2 / \sum_{j=1}^N \cos^2 \omega(t_j - \tau) + \left[\sum_{j=1}^N (X_j - \bar{X}) \sin \omega(t_j - \tau) \right]^2 / \sum_{j=1}^N \sin^2 \omega(t_j - \tau) \right\}, \quad (5)$$

где временной сдвиг τ рассчитывается из соотношения

$$\operatorname{tg}(2\omega\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \sin(2\omega t_j)}{\sum_{j=1}^N \cos(2\omega t_j)}. \quad (6)$$

Периодограмма Ломба (5) с точностью до второго множителя совпадает с LS (least squares) спектром [14], полученным при вписывании методом наименьших квадратов в массив центрированных данных $X_j - \bar{X}$ монохроматического сигнала $S_\omega(t) = A \cos t + B \sin \omega t$, взятого в моменты времени $t_j - \tau$ [12].

В [12, 13] показано, что периодограмма Ломба инвариантна по отношению к сдвигу шкалы времени, а её статистические свойства для неравномерных выборок оказываются такими же, как свойства классической периодограммы (4) для равномерных выборок. Если $X(t)$ является случайной гауссовой величиной с дисперсией σ_X^2 , то вероятность P того, что значение $Q_{LX}(\omega)$ не превышает $z\sigma_X^2$, где порог $z \geq 0$, запишем как [12]:

$$P(z) \equiv P\{Q_{LX}(\omega) < z\sigma_X^2\} = \int_0^z p(z') dz' = 1 - e^{-z}. \quad (7)$$

Соответственно плотность вероятности распределения $Q_{LX}(\omega) p(z) = e^{-z}$, а среднее по частоте $Q_{LX}(\omega) = \sigma_X^2$.

С учётом изложенного использование периодограмм Ломба представляется вполне целесообразным для определения спектров мощности рассматриваемых неравномерных рядов наземных микроволновых измерений яркостных температур излучения ночного мезосферного озона.

Поскольку на результаты измерений накладывается шум аппаратуры, надо оценить вероятность того, что отдельный выброс в рассчитанном спектре является случайным шумовым событием. Для «нулевой гипотезы», предполагающей, что «полезного» синусоидального сигнала нет и $X(t)$ — случайная величина, вероятность того, что при проверке спектра (5) ни на одной из M независимых частот значение $Q_{LX}(\omega)$ не превысит $z \sigma_X^2$, с учётом формулы (7) составляет [12, 15]:

$$P_M(z) \equiv P\{Q_X(\omega_m) < z \sigma_X^2, m=1, \dots, M\} = (1 - e^{-z})^M.$$

Соответственно

$$P_0 = 1 - P_M(z) = 1 - (1 - e^{-z})^M \approx M e^{-z} \quad (8)$$

представляет вероятность превышения шумовым выбросом уровня $z \sigma_X^2$ на одной из M контролируемых частот, т. е. вероятность ложной тревоги для «нулевой гипотезы». Отметим, что приближённое равенство в (8) справедливо для используемых на практике малых значений вероятности P_0 : $P_0 \leq 0,1$. Для выборок с относительно небольшим нарушением регулярности отсчётов, как в рассматриваемом случае, рекомендуется $M \approx N$ [15]. Тогда из (8) получим оценку порога z , соответствующего заданной малой вероятности «ложной тревоги» P_0 :

$$z \approx \ln(N/P_0). \quad (9)$$

Частотный анализ с использованием периодограмм Ломба позволяет решить задачу предварительного поиска достаточно сильных спектральных составляющих в неравномерных рядах данных. Однако для всех алгоритмов частотного анализа «время жизни» колебания является источником неопределённости при расчёте интенсивности соответствующей спектральной составляющей. Потому для оценки временных характеристик и эволюции наблюдаемых явлений необходим частотно-временной анализ, при котором часть выборки выделяется скользящим окном наблюдений. В ходе наблюдений выявлено, что значительные вариации яркостной температуры в центральных каналах анализатора АС-50 возникали лишь в отдельные отрезки длительных сеансов.

При использовании окна наблюдений $w(t - t_0)$, имеющего характерную ширину T_w и центр в момент времени t_0 , исследуемую величину $X(t)$ умножают на весовую функцию:

$$X_w(t, t_0) = X(t) w(t - t_0); \quad X_{wj} = X(t_j) w(t_j - t_0). \quad (10)$$

Среднее по выборке значение $X_w(t, t_0)$ при этом зависит от формы окна w и положения его центра t_0 . Квадраты синусов

и косинусов в знаменателях (5) умножают на квадраты весовой функции $[w(t_j - t_0)]^2$, а в (9) общее число точек выборки N заменяют на их эффективное количество в пределах окна $N_w(t_0)$, определяемое соотношением

$$N_w(t_0) = \sum_{j=1}^N w(t_j - t_0).$$

Следует учитывать, что при введении окон рассчитанные мощности спектральных составляющих убывают пропорционально отношению $N_w(t_0)/N$.

В данной работе использовали окна гауссовой формы

$$w(t - t_0) = \exp\left[-(t - t_0)^2 / (2T_w^2)\right], \quad (11)$$

с шириной $T_w = 5 \dots 60$ мин.

Численные и натурные эксперименты. Вычислительный алгоритм, созданный для анализа результатов измерений спектров излучения ночного озона, построен на основе соотношений (5), (6), (10), (11) с учётом рекомендаций работы [15]. В качестве величины $X(t)$ используются разности яркостных температур линии озона, формулы (1)–(3). Расчёты выполняются с использованием программных пакетов MathCAD и MatLab. Значительное ускорение работы последнего достигается методами, рассмотренными в материалах [16, 17]. Алгоритм обеспечивает непрерывность значений временного сдвига $\tau(\omega)$, рассчитываемого по формуле (6), в точках перескока арктангенса на π .

Для проверки разрешающей способности алгоритма по частоте и времени при использовании гауссовых окон использовался тестовый сигнал в виде суммы трёх гармоник с амплитудами $S_1 = 10$ К, $S_2 = 5$ К и $S_3 = 7$ К на частотах $F_1 = 1$ МГц, $F_2 = 2$ МГц и $F_3 = 3$ МГц, соответственно:

$$X_1(t) = \sum_{k=1}^3 S_k [\theta(t - t_{k1}) - \theta(t - t_{k2})] \sin(2\pi F_k t).$$

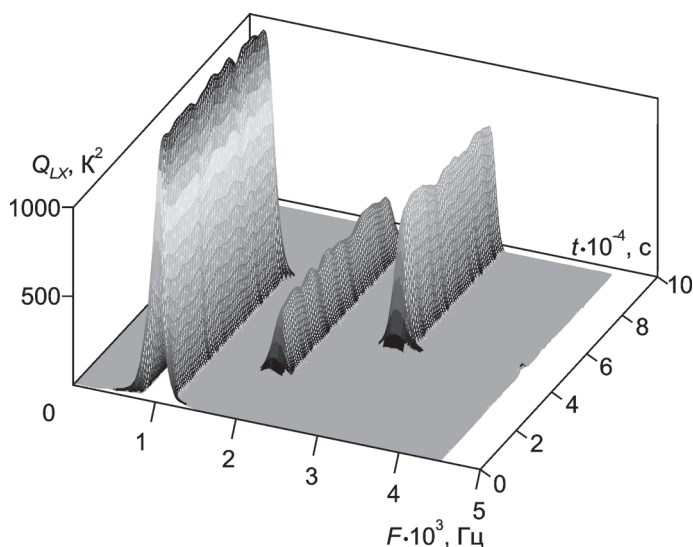


Рис. 1. Спектр мощности $Q_{LX}(F)$ для тестового сигнала $X_2(t)$, состоящего из трёх гармоник с частотами 1, 2, 3 МГц и амплитудами 10, 5, 7 К (см. (12))

Множитель $[\theta(t - t_{k1}) - (t - t_{k2})]$ — разность двух смещённых по времени функций Хевисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1/2, & t = 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Данный множитель при $t < t_{k1}$ и $t > t_{k2}$ равен нулю, и колебаний на k -й частоте нет. Колебания существуют только при $t_{k1} < t < t_{k2}$, когда множитель равен единице. Отсчёты времени (в секундах) для выборки с числом элементов $N = 1000$ формировали как

$$t_j = 110j + n(t_j), \quad (12)$$

где j — номер отсчёта в выборке; коэффициент 110 соответствует среднему интервалу времени между спектрами; $n(t)$ — центрированная случайная гауссова величина с СКО $\sigma_n = 5$ с, моделирующая неравномерность записи спектров при проведении измерений. Моменты включения t_{k1} и выключения t_{k2} гармоник подобраны так, что сначала в сигнале присутствует только гармоника на частоте F_1 , затем по очереди включаются гармоники с частотами F_2, F_3 . После в той же последовательности гармоники выключаются. Результат обработки сигнала с окном шириной $T_w = 30$ мин, перемещаемым с шагом $T_w/2 = 15$ мин, приведен на рис. 1. Моменты t_{k1}, t_{k2} отражены на рис. 1, что подтверждает возможность использования алгоритма для определения времён жизни периодических процессов. Средние уровни спектральных волн соотносятся примерно как $4:1:2 \approx 10^2:5^2:7^2$, т. е. соответствуют квадратам амплитуд (мощностям) гармоник. Изрезанность вершин гребней является следствием неравномерного шага по времени в выборке.

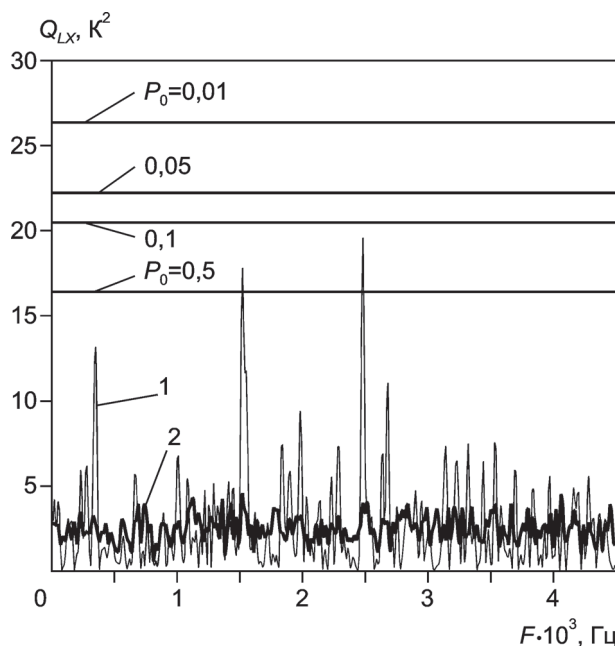


Рис. 2. Спектр мощности $Q_{LX}(\omega)$ центрированного гауссова шума для одной его реализации (1) и средний спектр по 10 реализациям (2); горизонтальные линии — уровни мощности, соответствующие указанным вероятностям ложной тревоги

Чтобы смоделировать выделение гармонического сигнала из шумов аппаратуры, использовали тестовые сигналы

$$X_2(t) = S_1 \sin(2\pi F_1 t) + Gg(t)$$

в виде суммы гармонической составляющей с частотой $F_1 = 1$ мГц, амплитудой (в кельвинах) S_1 и центрированного гауссовского шума $g(t)$ с единичной дисперсией, масштабируемого коэффициентом $G = \sigma_{23} = 1,6$ К, соответствующим шуму аппаратуры для разностей яркостных температур $\Delta T_2, \Delta T_3$ при времени накопления спектра 100 с. Отсчёты времени снова формировали по (12), число точек выборки $N = 300$ соответствует типичному числу единичных спектров озона в течение зимней ночи. Численные эксперименты проводили с амплитудами S_1 от 0 до 10 К без временных окон. На рис. 2 показаны рассчитанные спектры мощности гауссова шума $X_2(t)$ при $S_1 = 0$, для одной реализации (линия 1) и среднее по 10 реализациям (линия 2). Горизонтальные линии — уровни мощности, соответствующие вероятностям ложной тревоги $P_0 = 0,5; 0,1; 0,05; 0,01$. Они проведены на уровнях $z\sigma_{23}^2$, где параметр z рассчитывали по (8), (9). Отсюда следует, что для единичной реализации шума максимальные пики в спектре соответствуют вероятностям «ложной тревоги» между 0,5 и 0,1. Поэтому регистрация гармонической составляющей сигнала $X_2(t)$ для выборок может считаться достаточно надёжной при превышении соответствующей составляющей спектра уровней вероятности $P_0 \leq 0,05$. Среднее по частоте значение мощности спектра для единичной реализации шума составило $2,57 \text{ К}^2$, для среднего спектра по 10 реализациям — $2,49 \text{ К}^2$, оба значения близки к теоретическому $\sigma_{23}^2 = 2,56 \text{ К}^2$.

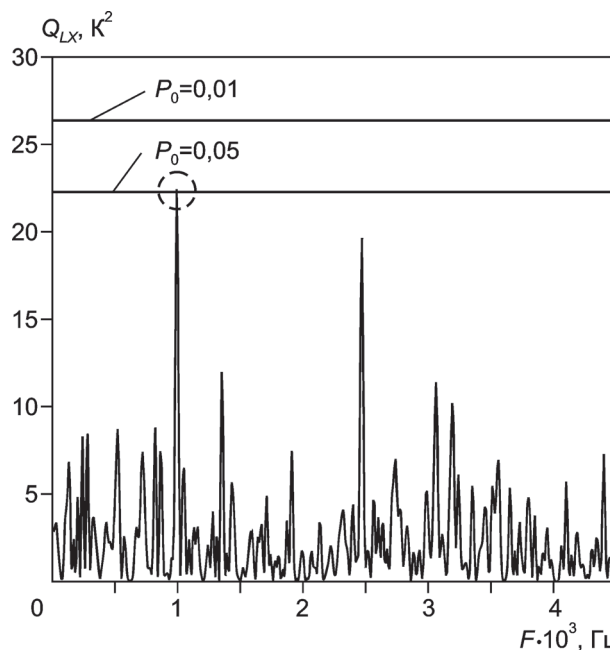


Рис. 3. Спектр мощности $Q_{LX}(\omega)$ гармонического сигнала частотой $f_1 = 0,001$ Гц и амплитудой $S_1 = 0,5$ К в присутствии гауссова шума с дисперсией $2,56 \text{ К}^2$; горизонтальные линии — уровни мощности, соответствующие указанным вероятностям ложной тревоги

На рис. 3 приведена периодограмма Ломба (см. (5)) для модельного сигнала $X_2(t)$ при амплитуде гармоники $S_1 = 0,5$ К. Горизонтальные линии соответствуют значениям $P_0 = 0,05$; $0,01$. Спектральная составляющая на частоте 1 МГц превышает шумы и достигает порога обнаружения, соответствующего вероятности $P_0 = 0,05$. При этом отношение амплитуды сигнала к СКО шума составляет $S_1/G \approx 0,3$.

В настоящее время, после успешной проверки разработанной методики частотно-временного анализа в численных экспериментах, начато её использование в «натурных» экспериментах, для обработки экспериментальных массивов спектров излучения ночного мезосферного озона. Первый анализ данных выявил вариации разностей яркостных температур в центре линии озона с периодами 5—40 мин и временами жизни 1—8 периодов [18].

Заключение. Поскольку ряды измерений спектров излучения ночного мезосферного озона неравномерны по времени, использовать для их анализа обычные алгоритмы оконного преобразования Фурье и вейвлет-преобразования, работающие для равномерных выборок, не удаётся. Поэтому для расчёта спектральной мощности вариаций разностей яркостных температур в центре линии применён метод периодограмм Ломба, статистические свойства которого позволяют оценивать уровни значимости найденных спектральных составляющих для неравномерных выборок. Для выявления колебаний с «временами жизни» меньше длительности сеансов наблюдений использованы скользящие временные окна гауссовой формы. Численные эксперименты, проведенные с модельными синусоидальными и шумовыми сигналами, показали корректность работы созданного вычислительного алгоритма. Первые результаты обработки экспериментальных данных выявили вариации разностей яркостных температур в центре линии озона 142,175 ГГц с периодами 5—40 мин и временами жизни 1—8 периодов.

Работа выполнена при поддержке ОФН РАН по программам «Новые источники миллиметрового и терагерцового излучения и их перспективные приложения» и «Радиоэлектронные методы в исследованиях природной среды и человека», а также Учебно-научного комплекса ФИАН.

Л и т е р а т у р а

1. Scientific Assessment of Ozone Depletion: 2014. World Meteorological Organization, Global Ozone Research and Monitoring Project, Report No.55, WMO, 2014.
2. Manney G. L., Santee M. L., Rex M., Livesey N. J., Pitts M. C., Veefkind P., Nash E. R., Wohltmann I., Lehmann R., Froidevaux L., Poole L. R., Schoeberl M. R., Haffner D. P., Davies J., Dorokhov V., Gernandt H., Johnson B., Kivi R., Kyrö E., Larsen N., Levelt P. F., Makshtas A., McElroy C. T., Nakajima H., Parrondo M. C., Tarasick D. W., von der Gathen P., Walker K. A., Zinoviev N. S. Unprecedented Arctic ozone loss in 2011 // *Nature*. 2011. V. 478. N. 7370. P. 469—475.
3. Atmospheric remote sensing by microwave radiometry / Ed. M. A. Janssen. N.-Y.: J.Wiley & Sons, 1993.

4. Соломонов С. В., Гайкович К. П., Кропоткина Е. П., Розанов С. Б., Лукин А. Н., Игнатьев А. Н. Дистанционное зондирование атмосферного озона на миллиметровых волнах // *Известия вузов. Радиофизика*. 2011. Т. 54. № 2. С. 113—121.
5. Соломонов С. В., Кропоткина Е. П., Семенов А. И. Наблюдение мезосферного озона на миллиметровых волнах // *Краткие сообщ. физ. ФИАН*. 2001. № 10. С. 31—39.
6. Игнатьев А. Н. Радиометрия атмосферного озона и окиси хлора на миллиметровых волнах: Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 2006.
7. Розанов С. Б., Завгородний А. С., Логвиненко С. В., Лукин А. Н., Штанюк А. М., Большаков О. С. Малошумящий приёмник для микроволновой озониметрии // *Известия вузов. Радиофизика*. 2011. Т. 54. № 8—9. С. 708—718.
8. Розанов С. Б., Соломонов С. В., Кропоткина Е. П., Завгородний А. С., Игнатьев А. Н., Лукин А. Н. Комплекс аппаратуры для наземного микроволнового зондирования озона и окиси хлора в атмосфере Земли // *Радиолокация и радиосвязь: докл. VII Всерос. науч.-техн. конф.*, 25—27 ноября 2013 г., Москва. М.: Изд. ИПЭ РАН, 2013. С. 98—102.
9. Соломонов С. В., Игнатьев А. Н., Кропоткина Е. П., Логвиненко С. В., Лукин А. Н., Никифоров П. Л., Розанов С. Б. Спектральная аппаратура для мониторинга атмосферного озона на миллиметровых волнах // *Приборы и техника эксперимента*. 2009. № 2. С. 138—144.
10. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. 2-е изд. СПб.: Питер, 2006.
11. Витязев В. В. Вейвлет-анализ временных рядов. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2001.
12. Scargle J. D. Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data // *Astrophys. Space Sci. J.* 1982. V. 263. P. 835—853.
13. Lomb N. R. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data // *Astrophys. Space Sci.* 1976. V. 39. P. 447—462.
14. Barning F. J. M. The numerical analysis of the light-curve of 12 Lacertae // *Bulletin of the Astron. Institutes of the Netherlands*. 1963. V. 17. P. 22—28.
15. Numerical Recipes. Ed. by W. H. Press et. al. Cambridge, 1986. P. 685—692.
16. Ускорение вычислений в MatLab // Материалы вебинара компании MathWorks. [Электрон. версия] <http://www.mathworks.com/videos/speeding-up-matlab-applications-82459.html> (дата обращения: 12.07.2016).
17. Заранек С. В., Чоу Б., Шарма Г., Зарринкуб Х. Ускорение алгоритмов и приложений Matlab // Материалы компании MathWorks в открытом доступе [Электрон. версия] http://matlab.ru/articles/Matlab_acceleration.pdf (дата обращения: 12.07.2016).
18. Завгородний А. С., Розанов С. Б., Игнатьев А. Н., Лукин А. Н., Соломонов С. В. Частотно-временной анализ вариаций микроволнового излучения ночного мезосферного озона над Москвой // *Тез. докл. X Всерос. семинара по радиофиз. миллиметр. и субмиллиметр. волн.* Н. Новгород: Изд-во ИПФ РАН, 2016. С. 144.

Дата принятия: 01.04.2016.