

Использование геометрического и показательного распределений для прогнозирования дрейфа параметров технических объектов

Ю. С. СЫСОВЕВ

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»,
Москва, Россия, e-mail: sysoev2004@mail.ru

Разработана методика стохастического прогнозирования длительности дрейфа параметров технических объектов в пределах допусков, использующая геометрический и показательный законы распределения вероятностей. Рассмотрено применение этой методики при оценке длительности межповерочных интервалов платиновых термометров сопротивления.

Ключевые слова: прогнозирование, дрейф параметров, стохастическая экстраполяция, системы массового обслуживания, межповерочный интервал.

The procedure of stochastic forecasting of drift of technical objects parameters duration using geometrical and indicative laws of probability distribution is developed. The application of this procedure to assessment of calibration interval duration for platinum resistance thermometers is considered.

Key words: forecasting, parameters drift, stochastic extrapolation, queuing systems, calibration interval.

В [1] для оценки состояний средств измерений (СИ) было использовано семейство полуинтервалов $[0; \Delta Z)$, $[\Delta Z; 2\Delta Z)$, ..., $[(N-1)\Delta Z; N\Delta Z)$, $[N\Delta Z; (N+1)\Delta Z)$, ..., где Δ — модуль предельно допустимой погрешности СИ; N — натуральное число; $\Delta Z = \Delta/N$. Принадлежность модуля погрешности полуинтервалу $[j\Delta Z; (j+1)\Delta Z)$ предложено расценивать как нахождение устройства в состоянии E_j , $j = 0, 1, 2, \dots$, [1]. В соответствии с этой конструкцией построена одноканальная система массового обслуживания (СМО) с накопителем объема N , в которой вероятности переходов из j -го состояния в k -е совпадают с соответствующими вероятностями переходов СИ из состояния E_j в состояние E_k .

При использовании теории СМО получено равенство

$$P(\{k > N\}_t^i) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[R_{N-i+r}(t) \sum_{j=0}^r Q_j(t) \right], \quad (1)$$

где $\{k > N\}_t^i$ — событие, при котором необслуженных заявок в системе к моменту времени t будет не меньше N (накопитель заполнится и параметр выйдет за пределы допусков);

$P(\{k > N\}_t^i)$ — вероятность этого события; $R_j(t)$, $Q_j(t)$ — вероятности, что за время t в СМО поступит j требований и все они выполнятся.

Из равенства (1) следует, что когда $R_j(t)$, $Q_j(t)$ — распределения Пуассона, можно предложить способ приближенного решения относительно следующего уравнения:

$$P(\{k > N\}_t^i) = \gamma, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (2)$$

Значение t_0 , являющееся решением уравнения (2), — это оценка времени, в течение которого с вероятностью, большей числа $1 - \gamma$, контролируемый параметр будет находиться в пределах допусков.

Использование распределений Пуассона в СМО часто приводит к приемлемым результатам даже тогда, когда вероятности переходов реального объекта из одного состояния в другое не вполне соответствуют этим распределениям [2]. Однако для получения корректного результата соответствующая СМО в рассматриваемой (и в любой другой) задаче должна строиться таким образом, чтобы стохастическая структура состояний (количество состояний, вероятности переходов и т. д.) повторяла соответствующую структуру состояний реального объекта. Только в этом случае стохастическая структура состояний реального объекта будет идентичной стохастической структуре состояний СМО и позволит вместо реального объекта изучать поведение построенной системы.

В [1] приведены результаты испытаний партии из десяти платиновых термометров сопротивлений. Представлены модули погрешностей приборов в тройной точке воды после многократных воздействий на них режимами различных типов [3]. Анализ этих результатов (табл. 1) показывает, что в процессе экспериментов номер состояния прибора (модуль погрешности термометров) в 65 случаях не увеличивается ($x_i = 0$), в 19 — увеличивается на одну позицию ($x_i = 1$), в 3 случаях — на две ($x_i = 2$) и также в 3 случаях — на три позиции ($x_i = 3$). Аналогично, модуль погрешности термометров не уменьшается в 73 случаях, в 10 — уменьшается на одну позицию, в 5 случаях — на две и в 2 случаях — на три позиции.

Таблица 1

Изменения погрешностей термометров сопротивления в процессе испытаний

x_i	Статистический ряд	
	№ 1	№ 2
0	65	73
1	19	10
2	3	5
3	3	2

Так как частоты в полученных статистических рядах не увеличиваются (убывают во всех случаях, кроме одного), были выдвинуты и проверены критерием χ^2 две статистические гипотезы о геометрическом или показательном (экспоненциальном) законах распределения соответствующих случайных величин, представленных статистическими рядами № 1, 2. Также проверена гипотеза о распределении Пуассона, применяемом в [1]. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты проверки статистических гипотез о законе распределения величин, характеризующихся изменениями состояний термометров

№ статистического ряда	Гипотеза о законе распределения	Критерий χ^2	Заключение о выдвинутой гипотезе на уровне значимости	
			0,05	0,01
1	Пуассона Показательное Геометрическое	12,21	Отвергается	Отвергается
		2,48	Не отвергается	Не отвергается
		2,84	Не отвергается	Не отвергается
2	Пуассона Показательное Геометрическое	17,81	Отвергается	Отвергается
		7,92	Отвергается	Не отвергается
		4,69	Не отвергается	Не отвергается

Из табл. 2 следует, что гипотеза о законе распределения Пуассона должна быть отвергнута, в то время как гипотеза о показательном распределении отвергается лишь на уровне значимости 0,05, но может быть принята на уровне значимости 0,01, а гипотеза о геометрическом распределении — на уровне значимости 0,05. Таким образом, геометрическое распределение наиболее приемлемо для описания случайных величин, представленных статистическими рядами № 1, 2.

Геометрический закон распределения. Предположим, что ему подчиняются распределения случайных изменений модулей погрешностей термометров сопротивления. Геометрическое распределение вероятностей [4] обычно представлено следующим образом:

$$P_k = pq^k, k = 0, 1, 2, \dots; 0 \leq p \leq 1; q = 1 - p. \quad (3)$$

Однако использовать этот закон в таком виде невозможно, так как отсутствует важный для прогнозирования СМО параметр — время t . Поэтому в (3) осуществим замены:

$$p = (1 + \lambda t)^{-1}; q = \lambda t / (1 + \lambda t).$$

С учетом введенных обозначений в дальнейшем будем использовать $p_\lambda(t)$, $q_\lambda(t)$, $P_k(t)$, соответственно. Тогда

$$P_k(t) = p_\lambda(t) (q_\lambda(t))^k \text{ или } P_k(t) = (\lambda t)^k / (1 + \lambda t)^{k+1}, \quad (4)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots; \lambda \geq 0, t \geq 0$.

Эта замена была выбрана таким образом, чтобы при использовании (4) в СМО за время t в среднем поступало λt заявок (т. е. λ за единицу времени). Для проверки этого утверждения обозначим $\lambda(t)$ — число заявок, поступивших за промежуток времени t . Тогда математическое ожидание $M[\lambda(t)]$ случайной величины $\lambda(t)$ с учетом равенства $(1 + \lambda t)^{-1} = 1 - \lambda t / (1 + \lambda t)$ и формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно определить из соотношения

$$M[\lambda(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(\lambda t)^k}{(1 + \lambda t)^{k+1}} = [\lambda t / (1 + \lambda t)] M[\lambda(t)] + \lambda t / (1 + \lambda t).$$

Решив это уравнение относительно неизвестного $M[\lambda(t)]$, получим $M[\lambda(t)] = \lambda t$.

К достоинствам геометрического распределения относят не только его простоту, но и свойство отсутствия последствия, что благоприятно для использования такого распределения в СМО [5].

Запишем $R_j(t)$, $Q_j(t)$ как

$$R_j(t) = (\lambda t)^j / (1 + \lambda t)^{j+1}, Q_j(t) = (v t)^j / (1 + v t)^{j+1} \quad (5)$$

или $R_j(t) = p_\lambda(t) (q_\lambda(t))^j$, $Q_j(t) = p_v(t) (q_v(t))^j$.

Подставив (5) в (1) и используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, а также соотношения $1 - q_v(t) = p_v(t)$, $1 - q_\lambda(t) = p_\lambda(t)$, найдем

$$P\{k > N_t^i\} = \left[\sum_{r=0}^{\infty} (p_\lambda(t) (q_\lambda(t))^{N-i+r}) \sum_{r=0}^{\infty} p_v(t) (q_v(t))^j \right] = (q_\lambda(t))^{N-i} - p_\lambda(t) (q_\lambda(t))^{N-i} q_v(t) / (1 - q_\lambda(t) q_v(t)).$$

С учетом (4), (5) получим

$$P\{k > N_t^i\} = (\lambda t)^{N-i} (1 + \lambda t) / \{ (1 + \lambda t)^{N-i} [1 + (\lambda + v)t] \}.$$

Тогда для рассматриваемого случая выражение (2) примет вид

$$\left(\frac{\lambda t}{1 + \lambda t} \right)^{N-i} \frac{1 + \lambda t}{1 + (\lambda + v)t} = \gamma, \quad 0 < \gamma < 1. \quad (6)$$

Экспоненциальный закон распределения. Рассмотрим прогнозирование дрейфа параметров с использованием СМО в случае указанного закона с интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где μ — некоторая константа.

Так как случайные величины, определяющие количество поданных и обслуженных заявок в СМО, являются дискретными, то исходя из общего определения функции распределения вероятностей $F_\xi(x) = P(\xi < x)$, где ξ — случайная величина, вероятности P_k для каждой из соответствующих диск-

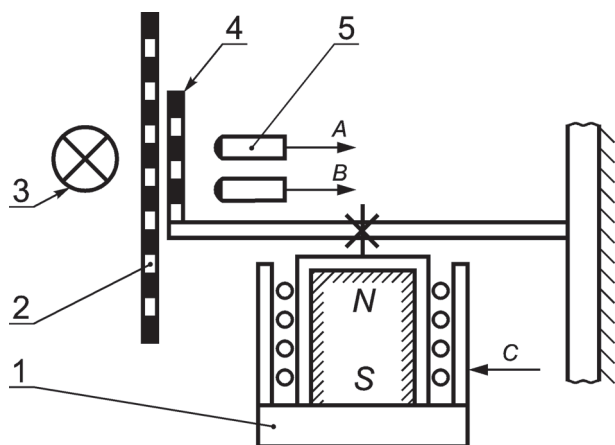


Рис. 1. Функциональная схема однокоординатного модуля:

1 — магнитоэлектрический СКИ; 2 — измерительный растр; 3 — осветитель; 4 — индикаторный растр; 5 — фотоприемники

компенсационное преобразование и метод замещения, при измерении в экстремальных системах обладает свойством инвариантности к амплитуде и гармоническому составу сигнала, т. е. к дрейфу параметров источника излучения, измерительного сопряжения и элементов прямой ветви канала преобразования сигнала. Работа канала счета периодов меры на переменном токе без демодуляции повышает быстродействие и надежность работы измерительной системы [14].

Конструкция из двух вертикально расположенных и связанных между собой параллелограммных механизмов, повернутых на 90° в горизонтальной плоскости относительно друг друга, образует двухкоординатную ИГО. При определенных условиях аналогом такой ИГО может стать параллелограммный механизм на цилиндрических пружинах с взаимно перпендикулярным направлением перемещения. Эта конструкция позволит уменьшить габаритные размеры ИГО при необходимости использования крестообразной растровой меры, выполненной на одной подложке. Конструкция из двухкоординатной ИГО и еще одного параллелограммного

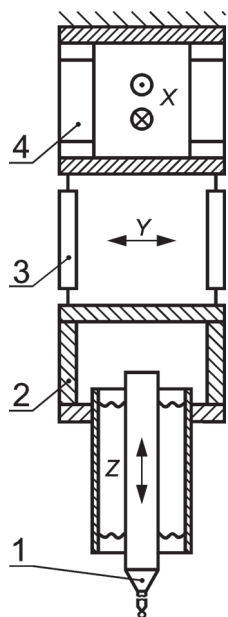


Рис. 2. Принципиальная схема механической части ИГО:

1 — измерительный наконечник; 2 — корпус; 3, 4 — параллелограммные механизмы продольной и поперечной координат

механизма, установленного вертикально и повернутого на 90° в вертикальной плоскости, образует трехкоординатную ИГО [1]. Достаточно компактную конструкцию трехкомпонентной ИГО образует параллелограммный механизм на цилиндрических пружинах и ИГ микромера, в котором используется подвеска измерительного стержня на фигурных пружинах [13].

Конструкция из двух параллелограммных механизмов на плоских пружинах и цифрового микромера [13] образует трехкомпонентную ИГО. Схема ее механической части представлена на рис. 2. Два параллелограммных механизма 3, 4 и цифровой микромер, включающий корпус 2 и измерительный наконечник 1, образуют трехкомпонентную ИГО.

Устройство, выполненное на базе цифрового растрового микромера [13], дает отсчет по вертикальной координате Z, два параллелограммных механизма обеспечивают отсчет показаний по продольной и поперечной координатам Y, X, соответственно.

Диапазоны измерений ИГО по координатам X, Y составляют $\pm 2,5$ мм, по координате Z: 0—0,5 мм, дискретность отсчета варьируется из-за изменения шага растровых мер и индекса интерполяции в пределах 0,1—0,01 мкм, измерительное усилие определяется конфигурацией упругих элементов параллелограммных механизмов.

Вывод. Использование в компонентах ИГО и координатах КИМ цифровой фотоэлектрической экстремальной счетно-интерполяционной системы измерений линейно-угловых перемещений наиболее перспективно. Это существенно повышает точность, надежность и ремонтопригодность, что подтверждено опытом эксплуатации растровых длиномеров, выпущенных малой серией и до настоящего времени находящихся в эксплуатации [6].

Литература

1. Гапшис В. А. А., Каспарайтис А. Ю., Модестов М. В., Раманаускас З. А., Серков Н. А., Чудов В. А. Координатные измерительные машины и их применение. М.: Машиностроение, 1988.
2. Голубовский Ю. М., Пивоварова Л. Н., Афанасьева Ж. К. Фотоэлектрические преобразователи линейных и угловых перемещений // Оптико-механическая промышленность. 1984. № 8. С. 50—58.
3. Каспарайтис А. Ю., Мураускас П. Р., Шимуленис Ю. Ю. Анализ погрешностей, возникающих при стыковке растровых линеек // Станкостроение Литвы. 1980. № 12. С. 71—78.
4. А. с. 1422002 СССР. Устройство для измерения перемещений / А. В. Мироненко, Г. П. Дмитриев, Ю. Б. Коляда, В. Н. Янушкин // Открытия. Изобретения. 1988. № 33.
5. Коляда Ю. Б., Янушкин В. Н. Комплексное решение проблемы повышения точности измерения линейно-угловых перемещений // Измерительная техника. 2014. № 3. С. 20—23.
6. Янушкин В. Н., Коляда Ю. Б., Крушняк Н. Т. Приоритетное направление проектирование прецизионных средств измерения линейных и угловых величин // Метрология. 2014. № 5. С. 21—27.
7. Коляда Ю. Б., Королев Ю. С., Разгулин В. Г., Янушкин В. Н. Цифровой фотоэлектрический интерферометр для измерения перемещений // Измерительная техника. 2001. № 6. С. 17—18.

8. Коляда Ю. Б., Королев Ю. С., Разгулин В. Г., Янушкин В. Н. Микроскоп измерительный цифровой // Измерительная техника. 2005. № 5. С. 20—23.

9. Коляда Ю. Б., Полярус Н. Т., Королев Ю. С., Разгулин В. Г., Янушкин В. Н. Головки измерительные цифровые // Измерительная техника. 2007. № 1. С. 20—23.

10. Янушкин В. Н., Коляда Ю. Б., Крушняк Н. Т. Длинномер фотоэлектрический цифровой // Измерительная техника. 2013. № 10. С. 23—24.

11. Модестов М. Б., Чудов В. А. Принципы построения измерительных головок для автоматических координатных машин. М.: Наука, 1976.

12. Модестов М. Б. Исследование точности модульных головок для координатных измерительных машин с ЧПУ. М.: Наука, 1976.

13. Каспарайтис А. Ю., Куметайтис Ю. П. Конструкция и точность координатных измерительных машин // Станкостроение Литвы. 1982. № 14. С. 12—27.

14. Коляда Ю. Б., Королев Ю. С., Крушняк Н. Т., Разгулин В. Г., Янушкин В. Н. Перспективы и проблемы автоматизации, повышения точности, быстродействия и надежности измерения линейных и угловых величин // Измерительная техника. 2011. № 9. С. 21—23.

Дата принятия 13.01.2015 г.

ОПТИКО-ФИЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

550.344.33

Наблюдение собственных колебаний Земли лазерными интерферометрами-деформографами

В. К. МИЛЮКОВ^{1,4}, М. П. ВИНОГРАДОВ¹, А. В. ЛАГУТКИНА¹, А. П. МИРОНОВ¹,
А. В. МЯСНИКОВ¹, Н. А. ПЕРЕЛЫГИН¹, Б. Г. ПУСТОВИТЕНКО²,
О. В. БОБОРЫКИНА³, Ю. М. ВОЛЬФМАН², В. А. НАСОНКИН³

Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга
МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, e-mail: milyukov@sai.msu.ru

²Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия,
e-mail: bpustovitenko@gmail.com

³Геофизическая обсерватория, Севастополь, Россия

⁴Владикавказский научный центр РАН и РСО-А, Владикавказ, Россия

По деформационным данным, полученным с помощью прецизионных лазерных интерферометров-деформографов, расположенных на Северном Кавказе (Приэльбрусье) и в Крыму (Севастополь), проанализированы собственные колебания Земли, возбужденные одним из сильнейших землетрясений последнего десятилетия (Япония, 2011 г.). Проведено сравнение теоретических (модель PREM) и наблюдаемых мод колебаний (Северный Кавказ).

Ключевые слова: лазерные интерферометры-деформографы, собственные колебания Земли.

Based on the strain data received by means of precision laser interferometers-strainmeters located in Northern Caucasus (Elbrus area) and in the Crimea (Sevastopol), the free oscillations of the Earth (FOS) excited by one of the strongest earthquakes of last decade (Japan, 2011), have been analyzed. The comparison of theoretical (PREM model) and observed FOS modes (Northern Caucasus) were carried out.

Key words: laser interferometers-strainmeters, free oscillations of the Earth.

Сферическая форма Земли существенно ограничивает как радиальные, так и тангенциальные движения внутри планеты. Окружность Земли определяет характерный масштаб длин, которые соответствуют целому числу волн, обеспечивая таким образом существование стоячих колебаний. Поэтому только дискретные значения длин волн и час-

тот могут удовлетворять земным граничным условиям. Соответствующие стоячие волны называются собственными колебаниями Земли (СКЗ) или нормальными модами.

Собственные колебания возбуждаются сильными землетрясениями, сейсмические колебания которых охва-