

Анализ исходных данных неустойчивых задач координатных измерений геометрических параметров деталей

М. Ф. ДАНИЛОВ, А. А. САВЕЛЬЕВА

*Научно-исследовательский институт оптико-электронного приборостроения, Сосновый Бор,
Россия, e-mail: DanilovMF@niioep.ru*

Проанализированы условия возникновения неустойчивости при решении типовых задач координатных измерений геометрических параметров деталей. Показана связь неустойчивых задач координатных измерений с плохо обусловленными системами линейных уравнений, а также с параметрами геометрических элементов, имеющих признаки вырождения. Получены формулы для оценки погрешности измерения параметров окружности, соосности цилиндров и параллельности плоскостей. Установлено, что экспериментальные результаты согласуются с теоретическими.

Ключевые слова: координатные измерения, неустойчивые, плохо обусловленные задачи.

Analysis of preconditions for the instability emergence in solving typical problems in coordinate measurements of parts geometrical parameters has been performed. The relation between unstable problems in coordinate measurements, ill-conditioned systems of linear equations and parameters of geometric elements with degeneracy properties has been revealed. The equations for estimating uncertainties in measuring of circle parameters, axis misalignment of cylinders and non-parallelism of planes have been derived. The experimental testing has showed a good agreement between the experimental and theoretical results.

Key words: coordinate measurements, unstable, ill-conditioned problems.

В области координатных измерений существует большой класс неустойчивых, плохо обусловленных задач [1], при решении которых незначительные погрешности исходных данных приводят к большим погрешностям результатов измерений. Под исходными данными здесь подразумеваются координаты измеренных точек на контролируемой поверхности детали. Примером плохо обусловленной задачи служит измерение геометрических размеров малых сегментов окружностей, цилиндров и сферических поверхностей [1]. На практике чаще всего встречается плохо обусловленная задача измерения соосности двух цилиндров, высота h одного (базового) много меньше его радиуса R , сопоставимого с другими характерными размерами детали. Это приводит к большой погрешности определения углового положения оси базового цилиндра и, соответственно, к большой погрешности измерения соосности цилиндров.

Целью настоящей работы является анализ условий возникновения неустойчивости при решении типовых задач координатных измерений, разработка простых аналитических моделей, пригодных для оценки погрешности измерений геометрических параметров деталей.

Простейший геометрический анализ показывает, что неустойчивость задач координатных измерений определяется параметрами геометрических элементов, имеющих признаки вырождения: отрезка прямой – в точку, дуги окружности и плоскости – в прямую, цилиндра – в окружность, сферы – в плоскость, асферической поверхности – в сферу.

Рассмотрим задачу измерения окружности, проходящей через три точки на плоскости с координатами $1(x_1, y_1)$, $2(x_2, y_2)$, $3(x_3, y_3)$. Запишем систему уравнений, определяющих координаты центра окружности (x_0, y_0) и её радиус R_0 :

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 &= R_0^2; \\ (x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 &= R_0^2; \\ (x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2 &= R_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

После несложных преобразований системы (1) получим систему двух линейных уравнений для координат центра окружности

$$\begin{cases} 2(x_1 - x_2)x_0 + 2(y_1 - y_2)y_0 = x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2; \\ 2(x_2 - x_3)x_0 + 2(y_2 - y_3)y_0 = x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2. \end{cases} \quad (2)$$

Запишем решение системы (2) по известным из курса линейной алгебры формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{2(y_2 - y_3)(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)}{4[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)]} - \\ &\quad - \frac{2(y_1 - y_2)(x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2)}{4[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)]}; \\ y_0 &= \frac{2(x_1 - x_2)(x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2)}{4[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)]} - \\ &\quad - \frac{2(x_2 - x_3)(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)}{4[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)]}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Далее покажем, что для определителя матрицы коэффициентов системы линейных уравнений (2) выполняется равенство

$$4[(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)] = 4L_0 h_0, \quad (4)$$

где L_0 , h_0 – основание и высота вписанного в окружность треугольника, образованного точками 1, 2, 3.

Пусть $\mathbf{R}_1(x_1, y_1), \mathbf{R}_2(x_2, y_2), \mathbf{R}_3(x_3, y_3)$ – радиус-векторы точек 1, 2, 3.

Рассмотрим векторное произведение векторов $[\mathbf{R}_{2,1}, \mathbf{R}_{3,1}]$, где

$$\mathbf{R}_{2,1} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1; \quad \mathbf{R}_{3,1} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1.$$

В координатном представлении [2] модуль векторного произведения определяется как

$$|[\mathbf{R}_{2,1}, \mathbf{R}_{3,1}]| = |(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)|. \quad (5)$$

При этом справедливо равенство

$$|[\mathbf{R}_{2,1}, \mathbf{R}_{3,1}]| = |\mathbf{R}_{2,1}| |\mathbf{R}_{3,1}| \sin(\varphi),$$

где φ – угол между векторами $\mathbf{R}_{2,1}$, $\mathbf{R}_{3,1}$.

При подстановке в (5) $|\mathbf{R}_{2,1}| = L_0$; $|\mathbf{R}_{3,1}|\sin(\varphi) = h_0$ получим формулу (4).

На основании выражения (4) оценим погрешность измерения координат центра окружности, задаваемой тремя точками на плоскости. Погрешность, возникающую при решении систем линейных алгебраических уравнений, можно найти с помощью согласованных норм матриц и векторов [3]. Пусть A – матрица коэффициентов; $\mathbf{f}$ – вектор правых частей системы; $\mathbf{u}$ – вектор решений системы линейных уравнений; $\|A\|, \|\mathbf{f}\|, \|\mathbf{u}\|$, $\|\Delta A\|, \|\Delta \mathbf{f}\|, \|\Delta \mathbf{u}\|$ – согласованные нормы матрицы и векторов, а также их погрешностей. Тогда для оценки относительной погрешности решения (3) справедливо следующее неравенство [3]:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \leq \mu \left(\frac{\|\Delta \mathbf{f}\|}{\|\mathbf{f}\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right), \quad (6)$$

где $\mu(A) = \|A^{-1}\| \|A\|$ – число обусловленности матрицы A .

Согласно (6) число обусловленности μ определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение системы линейных уравнений. Почти очевидно, что всегда $1 \leq \mu$. Действительно, справедливы условия

$$1 = \|A^{(-1)} A\| \leq \|A^{(-1)}\| \|A\| = \mu.$$

При $\mu \approx 1 \dots 10$ погрешности входных данных слабо сказываются на решении, и система считается хорошо обусловленной. При $\mu \gg 10^2 \dots 10^3$ система является плохо обусловленной.

В частном случае, когда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

обратная матрица имеет вид (если определитель матрицы $|A| \neq 0$) [2]:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что для этого случая справедливо приближённое равенство

$$\mu(A) \approx \|A\|^2 / |A|. \quad (7)$$

Действительно, если принять согласованную кубическую норму матрицы $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ [3], а в качестве L_0 – длину основания равнобедренного треугольника, то в пределе $h_0 \ll L_0$ справедливо $\|A\| = 1,5L_0$. С учётом (4) и (7) окончательно получим простую формулу, связывающую число обусловленности с геометрическими параметрами нормируемого (контролируемого) участка окружности:

$$\mu \sim L_0 / h_0. \quad (8)$$

Таким образом, параметр h_0/L_0 является количественной характеристикой степени вырождения дуги окружности в отрезок прямой. При этом, чем меньше этот параметр, тем больше согласно (8) число обусловленности линейной задачи нахождения координат центра окружности.

Отметим, что при $h_0 = 0$ (точки 1, 2, 3 лежат на одной прямой) определитель системы уравнений (2) равен нулю, но при этом правые части системы не равны нулю. В этом случае система не имеет решений. Система будет иметь бесконечное число решений, когда все три точки сольются в одну.

Введём $\Delta \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}$; $\Delta \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix}$ – векторы погрешности координат точек контроля и погрешности координат центра окружности, соответственно. Будем искать оценку нормы погрешности координат центра окружности как функцию параметра h_0/L_0 и нормы вектора погрешности исходных данных $\|\Delta \mathbf{u}\|$:

$$\|\Delta \mathbf{u}_0\| \leq f(h_0/L_0, \|\Delta \mathbf{u}\|).$$

Установлено, что с высокой точностью эта зависимость описывается эмпирической формулой

$$\|\Delta \mathbf{u}_0\| \leq \frac{2\|\Delta \mathbf{u}\|}{0,1h_0^4/L_0^4 + h_0^3/L_0^3 + 10h_0^2/L_0^2 + 0,1h_0/L_0} + \|\Delta \mathbf{u}\|. \quad (9)$$

На рис. 1 приведены графики расчётных и экспериментальных зависимостей погрешности измерения координат центра и диаметра окружности от параметра h_0/L_0 . Сплошными линиями представлены результаты расчёта по формуле (9) для трёх значений погрешности исходных данных (координат точек контроля) $\|\Delta \mathbf{u}\| = 0,001; 0,005; 0,010$ мм. Точками 1, 2 представлены результаты имитационного моделирования процесса многократного измерения координат центра окружности по трём точкам для $\|\Delta \mathbf{u}\| = 0,005; 0,010$ мм.

Точками 3 показаны погрешности измерений [1] радиуса эталонного кольца с номинальным радиусом $R_{\text{ном}} = 13,500$ мм в секторах окружности 6; 11; 22; 45; 90°. В каждом секторе было измерено шесть точек окружности. Измерения выполнены на высокоточной координатно-измерительной машине (КИМ) DKM1-30DP, имеющей пространственную погрешность $\pm(2+L/200)$ мкм. При построении графика пересчитаны центральные углы φ сектора к параметру h_0/L_0 по формуле $h_0/L_0 = 0,5 \operatorname{tg}(\varphi/2)$. При оценке погрешности по формуле (9) выбрано значение $\|\Delta \mathbf{u}\| = 0,001$ мм, что согласуется с номинальной пространственной погрешностью КИМ. При $\|\Delta \mathbf{u}\| \ll \|\Delta \mathbf{u}_0\|$ погрешность измерения радиуса $\Delta R \approx \|\Delta \mathbf{u}_0\|$, поэтому формула (9) описывает погрешности не только координат центра, но радиуса окружности.

Отметим также, что при $h_0/L_0 \approx 1$ погрешность измерения координат центра не зависит от радиуса окружности; при $h_0/L_0 \ll 1$ и $L_0 = \text{const}$ справедливо $R \sim h_0^{-1}$. В этом случае погрешность измерения координат центра окружности пропорциональна её радиусу: $\|\Delta \mathbf{u}_0\| \sim R$.

Решим задачу оценки погрешности измерения соосности двух цилиндров с использованием полученных результатов. В качестве исходных

данных примем значение $\|\Delta \mathbf{u}_0\|$. Согласно [4], выявленная средняя линия нормируемого цилиндра должна располагаться внутри цилиндрической зоны, ось которой совпадает с базовой осью A и имеет диаметр, равный допуску на соосность. Пусть точки $1(x_1, y_1, z_1)$, $2(x_2, y_2, z_2)$ – координаты центров двух измеренных окружностей, которые определяют ось базового цилиндра; точки $3(x_3, y_3, z_3)$, $4(x_4, y_4, z_4)$ – координаты центров измеренных окружностей нормируемого цилиндра; $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3, \mathbf{R}_4$ – соответствующие радиус-векторы этих центров. Введём разности векторов $\mathbf{h}_0 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$; $\mathbf{L}_3 = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$; $\mathbf{L}_4 = \mathbf{R}_4 - \mathbf{R}_1$ и векторные произведения $\mathbf{V}_3 = [\mathbf{h}_0, \mathbf{L}_3]$; $\mathbf{V}_4 = [\mathbf{h}_0, \mathbf{L}_4]$.

Используем известное свойство векторных произведений $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin\varphi$ и найдем расстояния ρ_3, ρ_4 от точек 3, 4, соответственно, до оси базового цилиндра, проходящей через точки 1, 2:

$$\rho_3 = |\mathbf{V}_3|/|\mathbf{h}_0|; \quad \rho_4 = |\mathbf{V}_4|/|\mathbf{h}_0|.$$

Соосность $q = 2\max(\rho_3, \rho_4)$. Примем для определённости $\rho_3 < \rho_4$, тогда соосность можно представить как $q = 2|\mathbf{V}_4|/|\mathbf{h}_0|$. В координатном представлении

$$\mathbf{h}_0 = (h_x, h_y, h_z); \mathbf{L}_4 = (L_x, L_y, L_z);$$

$$\mathbf{V}_4 = (h_y L_z - h_z L_y, h_z L_x - h_x L_z, h_x L_y - h_y L_x).$$

Будем решать задачу при условии, что высота базового цилиндра варьируется. Примем также, что погрешности измерения координат центров окружностей удовлетворяют неравенству

$$\Delta x, \Delta y, \Delta z \approx 10^{-3} \text{ мм} \ll \rho_4 \approx 10^{-2} \text{ мм} \ll |\mathbf{h}_0| \approx 1 \dots 10^2 \text{ мм} \leq |\mathbf{L}_4| \approx 10^2 \text{ мм}.$$

При этом $h_x, h_y \ll h_z$; $L_x, L_y \ll L_z$;

$$q \approx 2L_z \sqrt{h_x^2 + h_y^2} / h_z. \quad (10)$$

Выберем систему координат так, чтобы ось Z была направлена вдоль оси базового цилиндра максимальной высоты, а начало координат помещено в центр первой окружности базового цилиндра. Обозначим погрешности измерения координат центра окружности $\Delta x = \Delta y \equiv \Delta_{xy}$. Тогда по (10) и с учётом известных формул для погрешности косвенных измерений найдем погрешность определения соосности:

$$\Delta q \leq 2\Delta_{xy}L_z/h_z. \quad (11)$$

Формулы (10), (11) имеют простой геометрический смысл: $\theta_1 = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}/L_z$ – угол между направлением в точку 4 (центр окружности нормируемого цилиндра) и осью Z ; $\theta_0 = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}/h_z$ – угол между осью базового цилиндра и осью Z . Тогда $q \approx 2L_z|\theta_1 - \theta_0| \approx 2L_z|\theta_0|$ при условии $\theta_1 \ll \theta_0$.

Таким образом, погрешность определения соосности двух цилиндров при выполнении всех заданных выше условий прямо пропорциональна произведению погрешности измерения координат центров окружности базового цилиндра Δ_{xy} на максимальное расстояние L_z между границами базового и нормируемого цилиндров и обратно пропорциональна высоте h_z базового цилиндра.

На рис. 2 представлены экспериментальные (*точки-треугольники*) и рассчитанные по формуле (11) (*линия*) погрешности измерения соосности цилиндров. Высота базового цилиндра изменялась в диапазоне $h_z = 1\text{--}60$ мм при постоянной высоте нормируемого цилиндра $h_1 = 69$ мм, которая задавала параметр L_z . Для построения цилиндров (по восьми точкам) в двух сечениях по высоте находили четыре точки в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Методом многократных измерений (по результатам пяти измерений) определяли погрешности Δ_{xy} измерения координат центра окружностей и погрешности Δq измерения соосности. Из рис. 2

следует, что экспериментальные результаты согласуются с теоретическими.

Перейдем к задаче оценки погрешности измерения параллельности плоскостей. Как известно, три точки в трёхмерном пространстве (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , не лежащие на одной прямой, однозначным образом определяют единственную плоскость. Существует несколько способов задания параметров плоскости [2], но при решении задач координатных измерений геометрических параметров деталей – для определения взаимного положения данной плоскости относительно других геометрических элементов детали – интересен вектор нормали $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$.

Аналогично задаче об окружности, проходящей через три точки, рассмотрим радиус-векторы точек $\mathbf{R}_1(x_1, y_1, z_1)$; $\mathbf{R}_2(x_2, y_2, z_2)$; $\mathbf{R}_3(x_3, y_3, z_3)$ и векторы $\mathbf{R}_{2,1} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$; $\mathbf{R}_{3,1} = \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1$, лежащие в данной плоскости. Тогда в качестве вектора нормали к плоскости можно взять векторное произведение векторов $\mathbf{N} = [\mathbf{R}_{2,1}, \mathbf{R}_{3,1}]$. При этом, как было показано выше, $|\mathbf{N}| = L_0 h_0$, где L_0 – наибольшая длина стороны треугольника, образованного тремя точками; h_0 – его высота. Пусть $\Delta \mathbf{N}$ – погрешность единичного измерения вектора нормали; $\Delta \theta = |\Delta \mathbf{N}|/|\mathbf{N}|$ – погрешность его углового положения.

Обобщим формулу оценки погрешности измерения параллельности [5] для случая измерения углового положения базовой плоскости при условии $h_0/L_0 \ll 1$:

$$\Delta P \leq \frac{\delta_0 + L_1 |\Delta \mathbf{N}|/|\mathbf{N}|}{\sqrt{n}} + \delta_1 d\delta_1, \quad (12)$$

где δ_0 , δ_1 – плоскостности базовой и нормируемой плоскостей соответственно; L_1 – характерный размер нормируемой плоскости; n – число точек контроля на базовой плоскости; $d\delta_1$ – относительная погрешность измерения плоскостности.

Для оценки числа измерений, при котором с вероятностью $P = 0,99$ относительная погрешность измерения параметра будет равняться $d\delta_1$, используем формулы из [5]:

$$n = x \exp(x^2/2) \sqrt{2\pi}; \quad d\delta_1 = (x - 2,6) / 2,6,$$

где x – случайная величина единичного измерения.

Выберем систему координат так, чтобы ось Z была направлена вдоль нормали $\mathbf{N}$, ось X – вдоль вектора $\mathbf{R}_{2,1}$, а начало координат находилось на плоскости. Затем с учётом координатного представления векторного произведения оценим погрешность измерения вектора нормали $|\Delta \mathbf{N}|$. После несложных преобразований из (12) получим

$$\Delta P \leq \frac{\delta_0 (1 + 2L_1/h_0)}{\sqrt{n}} + \delta_1 d\delta_1. \quad (13)$$

На рис. 3 представлены экспериментальные и теоретические погрешности измерения параллельности двух плоскостей в зависимости от отношения h_0/L_1 . Точками-треугольниками обозначены экспериментальные значения погрешности, точками-кружками – численных расчётов по формуле (12) с использованием измеренных координат точек, сплошной линией – результатов вычислений по формуле (13) с использованием для каждой расчётной точки индивидуальных значений h_0/L_1 и полученных экспериментально значений n , δ_0 .

Покажем, что погрешность измерения перпендикулярности также можно оценить по формуле (13). Действительно, согласно определению перпендикулярности [4], выявленная нормируемая поверхность должна быть расположена между двумя перпендикулярными к базовой плоскости параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно допуску. При повороте поверхности на произвольный угол вместе с ограничивающими её плоскостями расстояния между всеми точками поверхности, расстояние между плоскостями, и площади поверхностей сохраняют свои

значения [6], т. е. являются инвариантами преобразования поворота. Отсюда следует, что при повороте на угол 90° параметр перпендикулярности преобразуется в параметр параллельности.

Заключение. Рассмотрены актуальные вопросы решения неустойчивых, плохо обусловленных задач координатных измерений, детально проанализированы причины существенного роста погрешности измерений. Выведены простые аналитические формулы для оценки погрешности измерений параметров окружности, соосности цилиндров, параллельности и перпендикулярности плоскостей в зависимости от характеристик формы, ориентации и месторасположения геометрических элементов изделий. Теоретические результаты подтверждены методами имитационного моделирования, результатами численных расчётов и многократных измерений геометрических параметров деталей.

Литература

1. **Суслин В. П., Джунковский А. В.** Применение метода регуляризации для решения плохо обусловленных задач координатных измерений // Измерительная техника. 2009. № 7. С. 23–26.
2. **Умнов А. Е.** Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учебное пособие. М.: МФТИ, 2011.
3. **Петров И. Б., Лобанов А. И.** Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, БИНОМ, 2006.
4. **ГОСТ Р 53442-2015.** Характеристики изделий геометрические. Установление геометрических допусков. Допуски формы, ориентации, месторасположения и биения.
5. **Данилов М. Ф., Иванова А. П., Савельева А. А.** Оценка погрешности координатных измерений геометрических параметров детали на основе априорной информации // Измерительная техника. 2018. № 3. С. 23–27.

6. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980.

Дата принятия: 16.01.2018.

Подрисуночные подписи

Рис. 1. Погрешность измерения координат центра и диаметра окружности:

линии – результаты расчёта по формуле (9) для трёх значений погрешности исходных данных (измеренных координат точек) $\|\Delta \mathbf{u}\| = 0,001; 0,005; 0,010$ мм; *точки 1 (кружки), 2 (квадраты)* – результаты имитационного моделирования процесса многократного измерения координат центра окружности по трём точкам для $\|\Delta \mathbf{u}\| = 0,005; 0,010$ мм, соответственно; *точки-треугольники 3* – погрешности измерений [1] радиуса эталонного кольца с номинальным радиусом $R_{\text{ном}} = 13,500$ мм в секторах окружности 6; 11; 22; 45; 90° (в каждом секторе измерено шесть точек окружности)

Рис. 2. Экспериментальные (*точки-треугольники*) и рассчитанные по формуле (11) (*линия*) погрешности измерения соосности цилиндров

Рис. 3. Экспериментальные (*точки 1*) и рассчитанные по формуле (12) погрешности измерения параллельности двух плоскостей (*точки 2*), *линией* показаны расчёты по (13) с использованием для каждой точки индивидуальных значений параметров h_0/L_1 и полученных экспериментально значений n, δ_0