

Оценка параметров канала связи Бернулли–Гаусса

К. А. БАТЕНКОВ

Академия Федеральной службы безопасности Российской Федерации,

Орёл, Россия, e-mail: pustur@yandex.ru

Представлена модель цифровой абонентской линии в форме бернулли–гауссового канала связи, который косвенно описан в виде функции правдоподобия. Выведено выражение для точности стандартной оценки импульсной характеристики на основе традиционного усреднения. Формализована нижняя грань рассеивания оценки импульсной характеристики канала связи, демонстрирующая возможность повышения точности эффективной оценки.

Ключевые слова: оценка импульсной характеристики, цифровая абонентская линия связи, канал связи Бернулли–Гаусса, функция правдоподобия, нижняя грань рассеивания.

Digital subscriber line model impacted impulse noise in Bernoulli–Gaussian channel form is presented in paper. Its oblique description as likelihood function is found. Response characteristic standard measurement precision expression on base of traditional averaging is lead out. Response characteristic estimation dispersion lower border demonstrating measurement precision increase by effective estimation finding is formalized.

Key words: response characteristic measurement, digital subscriber line, Bernoulli–Gaussian channel, likelihood function, dispersion lower border.

За последние двадцать лет сразу несколько разновидностей цифровых абонентских линий связи (digital subscriber line – DSL) были разработаны, стандартизированы и внедрены в сетях доступа. Основопологающим фактором для современных типов подобных линий является применение в них дискретной многотональной модуляции (discrete multitone modulation – DMT) в сочетании с когерентным детектированием. Поэтому очень важна точная синхронизация передаваемых и принимаемых сигналов и оценка параметров канала связи [1]. Для этих целей обычно используются последовательности известных символов (пилот-сигналов), мультиплексируемых в последовательность данных пользователя.

В большинстве методов оценки параметров канала связи в качестве основного параметра принято рассматривать импульсную характеристику канала либо частный случай этой характеристики – коэффициент усиления [2–4]. Пренебрежение остальными параметрами допустимо лишь в случае, когда канал связи с аддитивным белым гауссовым шумом имеет большой объём случайной выборки. Данный факт объясняется симметричностью функции правдоподобия подобного канала, а также малой дисперсией оценки импульсной характеристики, что позволяет рассматривать данную характеристику как детерминированную функцию или вектор (в дискретном случае) [5–7].

Модель канала связи. Цифровая абонентская линия связи функционирует в нормальном режиме при условии существования информация о свойствах кабеля связи. Следовательно, должны быть известны оценки системной характеристики и стохастических параметров шумов этого кабеля. В общем случае данные параметры

имеют сугубо непрерывный характер, что усложняет их оценивание на практике. В то же время применение цифровой обработки сигналов на этапах модуляции и демодуляции предполагает, что часть элементов приёмо-передающего тракта являются единым блоком, причём осуществляемые им преобразования также будут дискретными. В качестве единого блока целесообразно рассматривать канал связи, на вход и с выхода которого, соответственно, поступают непрерывные по уровню и дискретные по времени сигналы

$$\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1, N}; \mathbf{y}' = \{y'_i\}_{i=1, N},$$

где N – суммарная размерность используемых сигнальных созвездий.

Указанный канал имеет дискретную импульсную (системную) характеристику и стохастические свойства дискретных гауссового и импульсного шумов. На основе данных параметров можно получить характеристики согласованных фильтров на передающей и приёмной сторонах традиционной схемы когерентного приёма и, следовательно, реализовать достоверное восстановление передаваемых пользовательских данных.

Модель подобного канала связи имеет вид:

$$\mathbf{y}' = H\mathbf{y} + \mathbf{n} + \mathbf{w},$$

где $H = \{H_{i,k}\}_{i,k=1,N}$ – импульсная характеристика канала связи;

$\mathbf{n} = \{n_i\}_{i=1,N}$, $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i=1,N}$ – векторы отсчётов гауссового и импульсного шумов, соответственно.

Косвенное описание канала связи. Поскольку принципиальным моментом при моделировании любого канала связи является его стохастичность, то для решения большинства задач как анализа, так и синтеза более приемлемо косвенное описание этого

канала [8]. Однако часть параметров канала связи имеет детерминированный характер, что делает более подходящим его прямое описание. В связи с этим особенно важно учитывать переходы от прямого описания канала к косвенному и обратно.

Для оценки импульсной характеристики канала связи рациональнее применять модель канала, в которой неизвестной величиной является не теплицева матрица, а вектор импульсной характеристики. Переход к векторному виду импульсной характеристики возможен, если задать верхнюю треугольную теплицеву матрицу входного сигнала следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ 0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{N-1} \\ 0 & 0 & y_1 & \cdots & y_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y_1 \end{bmatrix}.$$

Прямое описание канала связи можно записать как [9]:

$$\mathbf{y}' = Y^T \mathbf{h} + \mathbf{n} + \mathbf{w},$$

где $\mathbf{h} = \{h_i\}_{i=1, N}$ – вектор импульсной характеристики.

Аддитивный шум в канале можно описать моделью белого гауссового шума с нулевым математическим ожиданием и диагональной матрицей ковариации $d_n I$, где d_n – дисперсия гауссового шума; I – единичная матрица размера $N \times N$ [2, 7]. Таким образом, плотность вероятности данного шума примет вид

$$\omega_n(\mathbf{n}) = \left(\sqrt{2\pi d_n^N} \right)^{-1} e^{-\mathbf{n}^T \mathbf{n} / (2d_n)}.$$

Для моделирования импульсного шума существует несколько альтернатив, каждая из которых характеризуется абстракциями относительно амплитуды, длительности импульсов и межимпульсного

интервала [10, 11]. В целом же аналитическое описание статистических особенностей импульсного шума на основе всех показателей весьма громоздко в условиях изменяющихся и непредсказуемых источников помех. Именно поэтому в работах [10, 12, 13] импульсный шум задаётся в форме коротких и резких всплесков. Наиболее распространённой моделью такого типа воздействий является процесс Бернулли–Гаусса, формирующий амплитудно-модулированную бинарную последовательность. Результирующие шумовые отсчёты являются композицией случайных величин Бернулли и Гаусса [13, 14]:

$$w_i = b_i g_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где b_i – независимые случайные величины Бернулли ($\mathbf{b} = \{b_i\}_{i=1,N}$), принимающие значения нуль или единица (вероятность появления единицы – $P(b_i = 1) = p$, нуля – $P(b_i = 0) = q = 1 - p$); g_i – независимые гауссовы случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией d_g .

Эти величины имеют плотность распределения

$$\omega_g(g_i) = \left(\sqrt{2\pi d_g}\right)^{-1} e^{-g_i^2/(2d_g)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Условная плотность распределения отсчётов принимаемого сигнала y_i при известном значении b_i рассчитывается как

$$\begin{aligned} \omega_{y_i/b_i}(y_i, b_i) = & \delta(b_i) \left(\sqrt{2\pi d_n}\right)^{-1} e^{-(y_i - h_i)^2/(2d_n)} + \\ & + \delta(b_i - 1) \left[\sqrt{2\pi(d_n + d_g)}\right]^{-1} e^{-(y_i - h_i)^2/[2(d_n + d_g)]}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция; $h'_i = \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}$ – i -й элемент вектора преобразованного каналом сигнала (без учёта влияния шумов); $\mathbf{Y}_i$ – i -й столбец матрицы $\mathbf{Y}$.

Для краткости введём обозначение для плотности нормального распределения

$$g(x, d) = \left(\sqrt{2\pi d} \right)^{-1} e^{-x^2/(2d)}. \quad (1)$$

Выражение (1) позволяет представить условную плотность в виде

$$\omega_{y'_i/b_i}(y'_i, b_i) = \delta(b_i) g(y'_i - h'_i, d_n) + \delta(b_i - 1) g(y'_i - h'_i, d_n + d_g), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

С учётом независимости текущих отсчётов от импульсного шума в соседних отсчётах можно получить условную плотность принимаемого сигнала как произведение независимых плотностей:

$$\begin{aligned} \omega_{y'/b}(y', b) &= \prod_{i=1}^N \omega_{y'_i/b_i}(y'_i, b_i); \\ \omega_{y'_i/b_j}(y'_i, b_j) &= \omega_{y'_i}(y'_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N; \\ \omega_{y'_i/(b_i, b_j)}(y'_i, b_i, b_j) &= \omega_{y'_i/b_i}(y'_i, b_i), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

На основе формулы полной вероятности, представленной в [7], можно вывести выражение для плотности принимаемого сигнала:

$$\omega_y(y') = \prod_{i=1}^N \left[pg(y'_i - h'_i, d_n) + qg(y'_i - h'_i, d_n + d_g) \right]. \quad (2)$$

Выражение (2) является функцией правдоподобия канала связи, так как $h'_i = \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}$. Кроме того, эта функция представляет собой произведение одномерных плотностей, что свидетельствует о статистической независимости отсчётов.

Стандартная оценка импульсной характеристики канала связи. Для любой статистической характеристики существует множество оценок [7]. В случае наблюдения параметров канала связи наиболее важной статистической характеристикой является его импульсная характеристика [15], за оценку которой обычно принимают усреднённое значение. Так, если рассматриваются результаты N_m опытов (символов), представленные в форме матрицы

$$Y' = \{y_{i,j}\}_{i=1,N,j=1,N_m} = [y'_1, y'_2, \dots, y'_{N_m}]^T$$

размера $N \times N_m$ и объединяющие столбцы y'_i отдельных случайных выборок сигнала на выходе канала связи, то стандартную оценку импульсной характеристики с учётом выражения $\mathbf{h}' = Y^T \mathbf{h}$, можно записать как

$$\mathbf{h}_m = N_m^{-1} Y'^T Y' \mathbf{1}_{N_m},$$

где $\mathbf{1}_{N_m}$ – единичный вектор размера $N_m \times 1$.

Подобная оценка оказывается несмещённой и состоятельной [7], а её качество характеризуется дисперсией, вычислить которую можно на основе плотности результатов независимых опытов. Такая плотность является произведением функций правдоподобия (2) канала связи и имеет следующий вид:

$$\omega_{Y'}(Y') = \prod_{j=1}^{N_m} \prod_{i=1}^N [pg(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n) + qg(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n + d_g)]. \quad (3)$$

Таким образом, дисперсия оценки определяется выражением

$$d(\mathbf{h}_m) = N_m^{-1} [pd_n + q(d_n + d_g)] \text{tr}(Y'^T Y'^{-1}),$$

где $\text{tr}(A)$ – след матрицы A [16].

В частном случае, когда $Y=I$, дисперсия стандартной оценки принимает вид

$$d(\mathbf{h}_m) = \frac{N}{N_m} \left[p d_n + q (d_n + d_g) \right]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что качество стандартной оценки определяется не только дисперсией гауссового шума в канале связи d_n , как в случае классического гауссового канала, но и параметрами импульсного шума d_n , p . Заметим, что при $p \rightarrow 1$ или $d_g \rightarrow 0$ исследуемый канал связи становится идентичен гауссовому, а качество оценки стремится к его эффективной оценке $\frac{N}{N_m} d_n$.

Нижняя грань рассеивания оценки импульсной характеристики канала связи. Необходимо отметить, что при наличии импульсного шума ($p \neq 1$, $d_g > 0$), а также при незначительном числе проводимых опытов стандартная оценка оказывается неэффективной. Данная ситуация типична как для инициализации канала связи, где на сбор экспериментальных данных отводится порядка нескольких десятков секунд, так и непосредственно для обмена информацией, характеризующейся периодической передачей пилот-сигналов.

Нижняя грань рассеивания оценки импульсной характеристики канала связи рассчитывается на основе информационной матрицы Фишера, предполагающей нахождение производной логарифма плотности результатов независимых опытов в выражении (3) [5, 7]:

$$\ln \omega_{Y'}(Y') = \sum_{j=1}^{N_m} \sum_{i=1}^N \ln \left[p g(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n) + q g(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n + d_g) \right].$$

Поскольку варьируемый параметр является вектором $\mathbf{h}$, то необходимо получить дифференциал логарифма плотности

результатов независимых опытов [16]. Так как для любого i -го измерения гауссовы плотности идентичны, т. е.

$$g(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n); g(y'_{i,j} - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n + d_g),$$

то информационная матрица Фишера имеет форму [5, 7]:

$$K_F = N_m \sum_{i=1}^N \mathbf{Y}_i \mathbf{Y}_i^T \times \\ \times \int_{\Omega_{Y'}} \frac{\left\{ pg(y'_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n)(d_n)^{-1} + qg(y'_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n + d_g)(d_n + d_g)^{-1} \right\}^2}{pg(y'_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n) + qg(y'_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h}, d_n + d_g)} \times \\ \times (y'_i - \mathbf{Y}_i^T \mathbf{h})^2 dy'_i,$$

где $\Omega_{Y'}$ – область интегрирования по матрице Y'

В частном случае, когда $Y=I$, то вектор $\mathbf{Y}_i$ включает единственный ненулевой единичный i -й элемент, и информационная матрица Фишера имеет диагональный вид:

$$K_F = N_m \int_{\Omega_{Y'}} \frac{\left\{ \left[pg(y'_i - h_i, d_n) \right] / d_n + \left[qg(y'_i - h_i, d_n + d_g) \right] / (d_n + d_g) \right\}^2}{pg(y'_i - h_i, d_n) + qg(y'_i - h_i, d_n + d_g)} \times \\ (y'_i - h_i)^2 dy'_i I, \forall i.$$

При этом все элементы её главной диагонали равны между собой, а следовательно нижнюю грань рассеивания оценки импульсной характеристики канала связи можно записать как

$$d(\mathbf{h}_p) = \frac{N}{N_m} \left[\int_{\Omega_{Y'}} (y'_i - h_i)^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\left\{ \left[pg(y'_i - h_i, d_n) \right] / d_n + \left[qg(y'_i - h_i, d_n + d_g) \right] / (d_n + d_g) \right\}^2}{pg(y'_i - h_i, d_n) + qg(y'_i - h_i, d_n + d_g)} dy'_i \right]^{-1}. \quad (5)$$

Полученная грань проста с точки зрения вычислений, поскольку требует лишь однократного интегрирования пусть и сложной подынтегральной функции.

Рассчитанные зависимости дисперсии стандартной оценки $d(\mathbf{h}_m)$ (согласно формуле (4)), нижней грани рассеивания оценки $d(\mathbf{h}_p)$ (согласно формуле (5)), а также дисперсии эффективной оценки $d(\mathbf{h}_e)$ (при отсутствии импульсных шумов, т. е. $d(\mathbf{h}_e) = d(\mathbf{h}_m)|_{p=1}$) от отношения дисперсий гауссового d_n и импульсного шумов d_g $\gamma = 10 \lg(d_n/d_g)$, приведены на рис. 1. Представлены случаи интенсивных, средних и редких импульсных шумов $p=0,1; 0,5; 0,9$, соответственно, при объёме выборки $N_m = 10^4$ для одного из отсчётов импульсной характеристики ($N=1$). Отношение дисперсий γ изменяли путём вариации дисперсии гауссового шума при фиксированной дисперсии импульсного шума $d_g = 0,1$. Анализ рис. 1 свидетельствует, что стандартная оценка импульсной характеристики существенно проигрывают по точности максимально правдоподобной оценке, характеризуемой нижней гранью рассеивания $d(\mathbf{h}_p)$, при низких значениях отношения дисперсий гауссового и импульсного шумов ($\gamma < -5$ дБ). В случае превалирования гауссового шума ($\gamma > 0$ дБ) данные оценки с точки зрения достоверности оказываются идентичными, следовательно, допустимо применять стандартные методы оценки. При увеличении интенсивности импульсных шумов, т. е. при снижении p наблюдается снижение точности получаемых статистик. При редких импульсных шумах нижняя грань оценки приближается к дисперсии эффективной оценки в отсутствии

импульсных шумов, а точность стандартной оценки оказывается существенно меньшей при значительной мощности импульсных шумов. Данное явление объясняется тем, что редкие, но мощные импульсные шумы существенно искажают значения усреднённых оценок.

На рис. 2 представлены линии уровней эффективности стандартной оценки $d(\mathbf{h}_m)$ (относительного выигрыша нижней грани рассеивания $d(\mathbf{h}_p)$ относительно стандартной оценки $d(\mathbf{h}_m)$) при вариации интенсивности импульсных шумов p и логарифмического отношения дисперсий шумов γ . Градациями серого цвета показаны различные области, относительный выигрыш в которых варьируется в пределах значений, указанных на границах данных областей. Следует отметить, что линии уровня относительно интенсивности импульсных шумов p и смещённость выигрыша к меньшей интенсивности этих шумов несимметричны. Этот факт свидетельствует о более негативном влиянии редких шумов по сравнению с интенсивными. Указанное явление объясняется приближением интенсивных импульсных шумов по статистическим свойствам к характеристикам гауссового шума.

Заключение. Нижняя грань рассеивания $d(\mathbf{h}_p)$ зависит от нескольких параметров канала связи: дисперсий гауссового и импульсного шумов и интенсивности последнего. Следует ожидать, что эффективная оценка импульсной характеристики (если она существует) в отличие от случая гауссового канала, где эта оценка является усреднением по принимаемым отсчётам, будет зависеть от рассмотренных выше параметров.

Наиболее важным с теоретической точки зрения методом синтеза оценок является метод максимума правдоподобия Фишера [7]. В его основе лежит принятие за оценку такого неизвестного параметра, при котором плотность результатов проведённого опыта принимает максимальное значение. Таким образом, если максимально правдоподобная оценка существует, то она является эффективной, а значит состоятельной и несмещённой.

Литература

1. **Morelli M. A., Mengali U.** Comparison of Pilot-Aided Channel Estimation Methods for OFDM Systems // IEEE Trans. Signal Proc. 2001. V. 49. No. 12. P. 3065–3073.
2. **Farid A. A., Farid Ahmed. A, Zhi-Quan Luo, Zhi Ding.** Blind Channel Equalization Based On Second Order Statistics // IEEE Int. Conf. Acoustics, Speech, Signal Proc., 2005, P. 557–560.
3. **Rinne J., Rinne J., Renfors M.** Pilot spacing in orthogonal frequency division multiplexing systems on practical channels // IEEE Trans. Consum. Electron. 1996. V. 42. P. 959–962.
4. **Батенков А. А., Богачёв Г. В., Батенков К. А.** Алгоритм синтеза базиса ортонормированных функций для многоканальной передачи данных // Цифровая обработка сигналов. 2007. № 2. С. 19–25.
5. **Ван Трис Г.** Теория обнаружения, оценок и модуляции: пер. с англ. В 3 т. Т. 1: Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции. М.: Советское радио, 1977.

6. **Батенков А. А., Батенков К. А.** Дискретизация линейного канала связи с памятью и аддитивным белым гауссовским шумом численным методом // Математическое моделирование. 2009. Т. 1. № 1. С. 53–74.

7. **Пугачёв В. С.** Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

8. **Левин Б. Р., Шварц В.** Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985.

9. **Qiu W., Khusro Saleem S., Pham M.** Blind identification of multichannel systems driven by impulsive signals // Digital Signal Proc. 2010. No. 20. P. 736–742.

10. **Zhang D.** Impulse Noise Detection Techniques for Retransmission to Reduce Delay in DSL Systems. Montreal: McGill University, 2012.

11. **TR-100** ADSL\ADSL2 plus performance test plan / Broadband Forum Technical Report. 2014, No. 3. [Электрон. ресурс]: [http:// www.broadband-forum.org/technical/download/TR-100_Issue-3.pdf](http://www.broadband-forum.org/technical/download/TR-100_Issue-3.pdf). (дата обращения 20.12.2017).

12. **Vaseghi S. V.** Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction (Chapter on Impulse Noise). Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2000. P. 354–360.

13. **Al-Naffouri T. Y., Hmida H., Quadeer A. A., Al-Shaalan F. F.** Impulsive Noise Estimation and Cancellation in DSL Using Compressive Sampling // IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems. 2011. P. 2133–2136.

14. **Ghosh M.** Analysis of effect of Impulse Noise on multicarrier and single carrier QAM system // IEEE Trans. on Communications. 1996. V. 44. P. 145–147.

15. **Батенков К. А.** Синтез структурной схемы нелинейного демодулятора на основе функционального ряда // Информационные системы и технологии. 2013. № 1 (75). С. 30–35.

16. **Магнус Я. Р., Нейдеккер Х.** Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Под ред. С. А. Айвазяна. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Дата принятия: 22.02.2018.

Подрисуночные подписи:

Рис. 1. Зависимости дисперсий и нижней грани рассеивания оценок $d(\mathbf{h})$ от отношения дисперсий γ гауссового и импульсного шумов для интенсивных $p=0,1$ (а); средних $p=0,5$ (б); редких импульсных шумов $p=0,9$ (в):

1 – стандартная оценка; 2 – нижняя грань рассеяния; 3 – эффективная оценка в отсутствии импульсных шумов

Рис. 2. Линии уровней эффективности стандартной оценки при вариации интенсивности импульсных шумов p и логарифмического отношения дисперсий шумов γ ($N=1$, $N_m=10^4$)