

Функция распределения оценки дисперсии Аллана: теория и практика

С. Г. Максименко

*Центральный научно-исследовательский институт Войск воздушно-космической
обороны МО РФ, Тверь, Россия, e-mail: sergeymax_1961@mail.ru*

Получены аналитические выражения нормированных автокорреляционных функций вариаций частоты для основных типов шумов частотных флуктуаций. Эти выражения позволяют рассчитать центральные моменты и функцию распределения оценок дисперсии Аллана. Представлен анализ погрешностей квантилей распределения и смещений оценок дисперсии Аллана при использовании распределения χ^2 .

Ключевые слова: частотные флуктуации, спектральная плотность мощности, оценка дисперсии Аллана, автокорреляционная функция, функция распределения.

Analytic expressions of the normalized autocorrelation functions of frequency variations for the main types of noise of frequency fluctuations are obtained, which allow calculating the central moments and the distribution function of the Allan dispersion estimates. An analysis of the errors of the quantiles of the distribution and the displacements of the Allan variance estimates is presented using the distribution χ^2 .

Key words: frequency fluctuations, power spectral density, Allan variance estimate, autocorrelation function, distribution function.

Дисперсия Аллана $\sigma_y^2(\tau)$ является одним из основных показателей точностных характеристик стандартов частоты во временной области и выражается как [1, 2]:

$$\sigma_y^2(\tau) = \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle / 2,$$

где $\bar{y}_{k+1}$, $\bar{y}_k$ – смежные измерения средних значений частоты на интервале времени измерения τ ; $\langle \dots \rangle$ – оператор математического ожидания.

Двухвыборочное стандартное отклонение $\sigma_y(\tau)$ или, согласно [3], среднее квадратическое относительное двухвыборочное отклонение (СКДО) измеренного значения меры частоты рекомендованы для описания точностных характеристик стандартов частоты во временной области.

Оценка дисперсии Аллана по результатам n измерений вариаций средних значений частоты $\bar{y}'_k = \bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k$ определяется выражением [3, 4]:

$$\hat{\sigma}_y^2(n, \tau) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (\bar{y}'_i)^2,$$

где $\bar{y}'_i$, $\bar{y}'_{i+1}$ – смежные измерения вариаций средних значений частоты.

Вопросы исследования точности определения оценки $\hat{\sigma}_y^2(n, \tau)$ для различных шумов частотных флуктуаций рассмотрены многими авторами. Например, в [5] получены аналитические выражения дисперсии оценки, в [6] представлены эмпирические выражения для эквивалентного числа степеней свободы распределения χ^2 с целью расчёта интервальной оценки дисперсии Аллана. Результаты указанных исследований реализованы в программном обеспечении оценки точностных характеристик стандартов частоты Stable32. В то же время необходимо найти и исследовать закон распределения оценки $\hat{\sigma}_y^2(n, \tau)$, в том числе, приняв во внимание математическое ожидание вариаций средних значений частоты при дрейфе частоты, а также разработать практические рекомендации по применению распределения χ^2 для интервальной оценки $\hat{\sigma}_y^2(n, \tau)$ с учётом представления частотных флуктуаций в виде аддитивной смеси различных шумов.

Флуктуации частоты представляются случайным процессом с нулевым математическим ожиданием, нормальным законом распределения плотности вероятности и односторонней спектральной плотностью мощности (СПМ) частотных флуктуаций

$$S_y(\omega) = \sum_{\alpha=-4}^{\alpha=2} A_{\alpha} \omega^{\alpha}, \omega > 0.$$

Параметры большинства законов распределения, используемых при оценке результатов и случайных погрешностей измерений, с увеличением числа наблюдений (более 25–30) изменяются незначительно. Поэтому для получения достоверных результатов измерений указанное число является достаточным [7]. Нормативными документами [4] для оценки СКДО предусмотрено выполнение не менее 10 измерений. В этом плане для шумов с СПМ $S_y(\omega) = A_1\omega + A_2\omega^2$, в основном преобладающих при интервалах времени измерения менее 1 с, нет проблем с набором статистики, достоверность сравнительно просто подтверждается повторяемостью оценок. Для шумов с СПМ $S_y(\omega) = A_{-4}\omega^{-4} + A_{-3}\omega^{-3}$, которые преобладают, если интервалы времени измерения, как правило, больше месяца, дисперсия Аллана расходится или не существует. Поэтому для исследований функции распределения оценки дисперсии Аллана СПМ частотных флуктуаций представлена моделью

$$S_y(\omega) = A_0 + A_{-1}/\omega + A_{-2}/\omega^2, \omega > 0,$$

где A_0, A_{-1}, A_{-2} – коэффициенты, характеризующие интенсивности белого частотного шума (БЧШ), частотного фликкер-шума (ЧФШ) и частотного шума случайных блужданий (ЧШСБ), соответственно.

Оценка $\hat{\sigma}_y^2(n, \tau)$ является случайной величиной и полностью характеризуется законом распределения $F_n(x)$, который в общем случае за-

висит от закона распределения вариаций средних значений частоты (предполагается нормальным), их автокорреляционной функции и количества измерений n , включаемых в обработку [8]. Необходимо также отметить, что функция распределения оценки дисперсии Аллана зависит от неизвестного истинного значения дисперсии $\sigma_y^2(\tau)$, поэтому её практическое применение невозможно. Для исключения этой трудности целесообразно исследовать функцию распределения отношения оценки дисперсии Аллана к истинной дисперсии $v_n^2 = \hat{\sigma}_y^2(n, \tau) / \sigma_y^2(\tau)$. Данная функция является средней арифметической оценкой дисперсии нормированных нормально распределённых случайных величин ξ_i с нулевым математическим ожиданием и с автокорреляционными функциями в зависимости от типа шума $v_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\xi_i)^2$.

Задача определения теоретической функции распределения средней арифметической оценки дисперсии нормированных нормально распределённых величин при коррелированной выборке решается на основе известной характеристической функции распределения [8]:

$$\varphi_n(t) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k} \left(\frac{it}{n} \right)^k Sp \|\rho\|^k \right], \quad (1)$$

где $\|\rho\|$ – автокорреляционная матрица измерений; $Sp \|\rho\|^k$ – след k -й степени матрицы $\|\rho\|$.

Так как плотность распределения случайной величины $f_n(x)$ и характеристическая функция $\varphi_n(t)$ составляют пару преобразований Фурье, то теоретически плотность распределения оценки дисперсии определяется как

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-it \left(x - \frac{Sp\|p\|}{n} \right) - \frac{t^2}{n^2} Sp\|p\|^2 \right] \exp \left[\sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k} \left(\frac{it}{n} \right)^k Sp\|p\|^k dt \right]. \quad (2)$$

Если пренебречь, например, членами выше второго порядка, то получим аппроксимацию для гауссового распределения

$$f_n(x) = \exp \left[-(x - A)^2 / (2B) \right] / (B\sqrt{2\pi}),$$

где $A = Sp\|p\|/n = 1$ – математическое ожидание оценки дисперсии;
 $B = 2Sp\|p\|^2/n^2$ – дисперсия оценки дисперсии.

С использованием выражения для расчёта дисперсии Аллана [1], представим автокорреляционную функцию вариаций средних значений частоты и нормированную автокорреляционную функцию (НАКФ) как

$$R(\Delta t, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S_y(\omega) \frac{2\sin^4(\omega\tau/2)}{(\omega\tau/2)^2} \cos(\omega\Delta t) d\omega;$$

$$\rho(\Delta t) = R(\Delta t, \tau) / R(0, \tau), R(0, \tau) = \sigma_y^2(\tau).$$

С учётом табличных интегралов [9] выведены выражения для нормированных автокорреляционных функций БЧШ, ЧФШ и ЧШСБ, где $n = \Delta t/\tau$.

Выражение для нормированной автокорреляционной функций БЧШ:

$$\rho_0(n) = \begin{cases} 1 - 3|n|/2, & \text{если } 0 \leq |n| \leq 1; \\ 1 - (4 - |n|)/2, & \text{если } 1 \leq |n| \leq 2; \\ 0, & \text{если } |n| \geq 2; \end{cases}$$

$$R_0(0, \tau) = A_0/(2\tau). \quad (3)$$

Выражение для нормированной автокорреляционной функций ЧФШ:

$$\begin{aligned}
\rho_{-1}(n) = & 1 - \frac{2}{\ln 2} \left(0,5 \ln 2 - 0,0625(|n|+2) \ln \left[4(|n|+2)^2 \right] - \right. \\
& - 0,0625(2-|n|) \ln \left[4(2-|n|)^2 \right] + 0,125(|n|+1) \ln \left[4(|n|+1)^2 \right] - \\
& - 0,125(|n|-1) \ln \left[4(|n|-1)^2 \right] + 0,5|n| \left\{ 0,0625(2-|n|) \ln \left[4(2-|n|)^2 \right] - \right. \\
& - 0,125|n| \ln(4n^2) - 0,0625(|n|+2) \ln \left[4(|n|+2)^2 \right] + 0,25(|n|+1) \ln \left[4(|n|+1)^2 \right] - \\
& \left. \left. - 0,25(1-|n|) \ln \left[4(1-|n|)^2 \right] - 0,5|n| \ln(2|n|) \right\} \right); \\
R_{-1}(0, \tau) = & A_{-1} \ln 2 / \pi, \tag{4}
\end{aligned}$$

выражения при $n=0; 1; 2$ получаются из (4) путём элементарных преобразований.

Выражение для нормированной автокорреляционной функций ЧШСБ:

$$\rho_{-2}(n) = \begin{cases} 1 - 3n^2(2-|n|)/4, & \text{если } 0 \leq |n| \leq 1; \\ 1 - (|n|^3 - 6n^2 + 12|n| - 4)/4, & \text{если } 1 \leq |n| \leq 2; \\ 0, & \text{если } |n| \geq 2; \end{cases}$$

$$R_{-2}(0, \tau) = A_{-2} \tau / 6. \tag{5}$$

Нормированные автокорреляционные матрицы вариаций средних значений частоты $\|\rho_\alpha\|$ являются симметричными, их первые строки – значения НАКФ – при смежных измерениях по результатам расчётов записываются в виде $\rho_0 = 1; -0,5; 0; \dots; 0$; $\rho_{-1} = 1; -0,22; -0,13; -0,05; -0,02; -0,02; 0; \dots; 0$; $\rho_{-2} = 1; 0,25; 0; \dots; 0$. На рис. 1 представлены графические зависимости НАКФ $\rho_\alpha(n)$ вариаций средних значений частоты БЧШ, ЧФШ и ЧШСБ.

Выбрав необходимое число членов в разложении (2), можно достичь требуемой точности определения плотности распределения. Однако при большом числе членов в разложении (2) вычисления представляет извест-

ную трудность, поэтому его практическое применение вряд ли целесообразно.

В целом следует отметить, что все методы определения функций распределения объединяются в единый метод моментов, основанный на единственности решения так называемой «проблемы моментов» математического анализа. Суть данной проблемы теории вероятностей состоит в том, что практически знание существующих моментов эквивалентно знанию функции распределения в том смысле, что теоретически возможно все свойства распределения выразить в терминах теории моментов [10]. Поэтому, если два распределения имеют некоторое число одинаковых низших моментов и определены на одном и том же интервале, то они в какой-то степени схожи и аппроксимируют друг друга. В этом плане, очевидно, можно аппроксимировать распределение оценки дисперсии, распределением известного вида с примерно теми же первыми моментами.

Исследования оценки дисперсии показали, что при n независимых измерениях функция распределения оценки обусловлена распределением χ^2/n с n степенями свободы, а при полностью зависимых – с одной степенью свободы [8]. В связи с этим логично исследовать аппроксимацию функции распределения оценки дисперсии при n коррелированных измерениях распределением χ^2/n_s с эквивалентным числом степеней свободы $1 < n_s < n$. Причём n_s может быть и нецелым числом, так как формально распределение χ^2 определено для любых положительных n [10].

Начальные моменты распределения оценки дисперсии однозначно определяются характеристической функцией (1) на основании выражения

$$\alpha_r = \left. \frac{d^r \varphi(\omega)}{d\omega^r} \right|_{\omega=0},$$

где $\omega = it$.

Начальные моменты с первого до четвёртого включительно равны [8]:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 1; \alpha_1 = 1; \alpha_2 = \frac{1}{n^2} \left[2Sp \|\rho\|^2 + (Sp \|\rho\|)^2 \right]; \\ \alpha_3 &= \frac{1}{n^3} \left[8Sp \|\rho\|^3 + 6Sp \|\rho\| Sp \|\rho\|^2 + (Sp \|\rho\|)^3 \right]; \\ \alpha_4 &= \frac{1}{n^4} \left[48Sp \|\rho\|^4 + 32Sp \|\rho\|^3 Sp \|\rho\| + 12(Sp \|\rho\|^2)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 12Sp \|\rho\|^2 (Sp \|\rho\|)^2 + (Sp \|\rho\|)^4 \right].\end{aligned}$$

Центральные моменты распределения связаны с начальными соотношением [10]:

$$\mu_r = \sum_{j=0}^r C_j^r \alpha_{r-j} (-\alpha_1)^j.$$

Центральные моменты для первых четырёх начальных моментов имеют вид

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 1; \mu_1 = 0; \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2; \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3; \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.\end{aligned}\tag{6}$$

Вторые центральные моменты (дисперсии) занимают важное место в теории оценивания, характеризуя так называемое стандартное отклонение. Они широко используются на практике, поэтому выражение для определения дисперсий целесообразно записать в развёрнутой форме [8]:

$$\mu_2 = \frac{2}{n^2} Sp \|\rho\|^2 = \frac{2}{n} \left[1 + 2 \sum_{l=1}^{n-1} \left(1 - \frac{l}{n} \right) \rho^2(l) \right].\tag{7}$$

После подстановки в (7) значений НКАФ (3)–(5) для шума каждого типа соответственно, имеем

$$\left. \begin{aligned} \mu_2^0 &= (3n-1)/n^2; \\ \mu_2^{-1} &\approx (2,28n-0,374)/n^2, \text{ если } n > 6; \\ \mu_2^{-2} &= (9n-1)/(4n^2). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Рассчитаны центральные моменты (6) при $n=1,30$ и НАКФ (3)–(5) и центральные моменты распределения χ^2/n , определяемые выражениями [10]: $\mu_0=1$; $\mu_1=0$; $\mu_2=2/n$; $\mu_3=8/n^2$; $\mu_4=(48+12n)/n^3$.

Результаты сравнения центральных моментов позволили сделать важный вывод о том, что для каждого типа НАКФ (типа шума) и значения n можно подобрать распределение χ^2/n_3 с $1 < n_3 < n$ степенями свободы (где n_3 – эквивалентное число степеней свободы), и моменты аппроксимируемых распределений совпадут с некоторой точностью. Вряд ли можно отыскать значение n_3 , для которого совпадут все (и даже только первые) моменты распределений. Таким образом, возникает задача выбора центральных моментов аппроксимируемых распределений, на основании которых следует находить эквивалентное число n_3 степеней свободы распределения. В этом плане следует отметить, что на практике, как правило, при аппроксимации распределений используются первые четыре момента. Второй, третий и четвёртый моменты определяют асимметрию g_1 и эксцесс g_2 распределений и характеризуют их форму:

$$g_1 = \mu_3 / \sqrt{\mu_2^3}; \quad g_2 = \mu_4 / \mu_2^2 - 3.$$

Поэтому при нахождении эквивалентного числа степеней свободы в качестве критерия предлагается применять минимум относительных погрешностей асимметрии и эксцесса аппроксимируемых распределений.

Анализ результатов расчёта относительных погрешностей асимметрии dg_1 и эксцесса dg_2 при расчёте n_3 по вторым, третьим и четвёртым мо-

ментам показал, что наименьшие погрешности при $n > 10$ соответствуют определению числа n_3 на основании равенства третьих центральных моментов μ_3^α аппроксимируемых распределений для шумов всех типов и количества измерений n : $n_3 = \sqrt{8/\mu_3^\alpha}$. Таким образом, функция распределения оценок дисперсии v_n^2 нормированных нормально распределенных коррелированных случайных величин обусловлена распределением χ^2/n [11]:

$$F_n(x > x_p) = \int_{x_p}^{\infty} \frac{(n_3/2)^{n_3/2}}{\Gamma(n_3/2)} x^{(n_3/2-1)} \exp(-n_3 x/2) dx.$$

Если при времени измерения τ преобладают шумы одного типа в вариациях средних значений частоты, то задача определения интервальных оценок нестабильности просто решается на основе функций распределения оценок дисперсий для шума каждого типа. Однако заранее по виду зависимостей средних значений частоты от времени вряд ли можно установить, шум какого типа определяет статистические характеристики вариаций при времени измерения τ . Более того, объективно при конкретном интервале времени измерения τ вариации средних значений частоты обусловлены аддитивной смесью независимых шумовых составляющих, а статистические характеристики этой смеси зависят от соотношения интенсивностей основных шумов и значения интервала времени измерения τ . Для смежных значений вариаций частоты ($\Delta t = \tau$) автокорреляционная функция с учётом (3)–(5) определяется как

$$R(\tau, \tau) = \frac{A_0}{2\tau}(-0,5) + \frac{A_{-1} \ln 2}{\pi}(-0,22) + \frac{A_{-2} \tau}{6}(0,25).$$

При этом НАКФ смежных значений вариаций частоты представляется выражением

$$\rho(\tau) = \left[\frac{A_0}{2\tau}(-0,5) + \frac{A_{-1} \ln 2}{\pi}(-0,22) + \frac{A_{-2} \tau}{6}(0,25) \right] / \left[\frac{A_0}{2\tau} + \frac{A_{-1} \ln 2}{\pi} + \frac{A_{-2} \tau}{6} \right]. \quad (9)$$

При увеличении интервала измерения функция (9) изменяется в интервале $-0,5 \dots +0,25$, т. е. от преобладания БЧШ к преобладанию ЧШСБ.

Исследованы три промышленных образца цезиевых стандартов частоты на интервале времени наблюдения 1 месяц, оценены их СКДО на уровне $2 \cdot 10^{-13}$ при интервале времени измерения 1 сутки. Определены оценки $\hat{A}_0, \hat{A}_{-1}, \hat{A}_{-2}$ на основе аппроксимации методом наименьших квадратов оценок дисперсии Аллана для различных интервалов времени измерения [12, 13] известной теоретической зависимостью [1]. На рис. 2 представлены расчётные зависимости НАКФ (9) смежных значений вариаций частоты от интервала времени измерения для исследованных цезиевых стандартов частоты.

В условиях изложенных выше неопределённостей одним из решений может стать допущение о независимости вариаций средних значений частоты при любом интервале времени измерения и определение границ доверительных интервалов истинных значений нестабильности частоты $\sigma_y(\tau)$ на основе распределения χ^2 с n степенями свободы при доверительной вероятности P .

Квантили распределения оценок v_n на уровне стандартного отклонения Δ_{CO} при $n > 10$ принимают значения $\Delta_{CO} \approx 1 \pm \sqrt{\mu_2^\alpha}/2$, где μ_2^α – вторые центральные моменты (8) распределений оценок дисперсий для шумов рассматриваемых типов. При этом относительная погрешность δ_{nCO} квантилей Δ_{CO} при замене распределением $\chi/\sqrt{n}$ представляется выражением $\delta_{nCO} \approx (\sqrt{\mu_2^\alpha} - \sqrt{\mu_2})/2$, где $\mu_2 = 2/n$ – второй центральный момент распределения χ^2/n . В целом для шумов всех типов при $n > 10$ погрешность δ_{nCO} не превышает значения 0,05 и уменьшается с увеличением n .

На практике используются квантили распределения χ^2 для табличных значений вероятностей P . На основе линейной интерполяции квантилей χ_p распределения χ^2/n и с учётом монотонности их зависимости от n при заданном значении P рассчитаны квантили распределений оценок дисперсий v_n^2 для шума каждого типа в зависимости от n . Относительные погрешности $\lambda_n(p)$ квантилей распределения $\chi/\sqrt{n}$ при замене ими квантилей распределений v_n в зависимости от типа шума приведены табл. 1.

Таблица 1

Относительные погрешности $\lambda_n(p)$ квантилей распределения $\chi/\sqrt{n}$ при замене распределения v_n для БЧШ, ЧФШ и ЧШСБ

n	n_3	Значения вероятности P										
		0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02
БЧШ												
10	6,5	-0,21	-0,17	-0,12	-0,08	-0,06	-0,02	0,01	0,02	0,04	0,05	0,07
15	9,7	-0,15	-0,11	-0,09	-0,06	-0,04	-0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06
20	12,8	-0,13	-0,10	-0,07	-0,05	-0,03	-0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06
25	16,0	-0,11	-0,08	-0,07	-0,04	-0,03	-0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
30	19,2	-0,09	-0,07	-0,06	-0,04	-0,02	-0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
ЧФШ												
10	9,0	-0,05	-0,03	-0,03	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,02
15	13,4	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,02
20	17,8	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,01
25	22,2	-0,03	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,01
30	26,7	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,01
ЧШСБ												
10	8,6	-0,06	-0,05	-0,04	-0,02	-0,02	-0,01	0,01	0,01	0,01	0,02	0,02
15	12,9	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,02	0,02
20	17,2	-0,04	-0,03	-0,03	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,02	0,02
25	21,4	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,02
30	25,7	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	0	0	0,01	0,01	0,01	0,02

Анализ относительных погрешностей показывает, что для шума любого типа истинные доверительные интервалы несколько шире по сравнению с определяемыми на основании распределения χ^2 .

Представленные выше теоретические выкладки для исследования оценок дисперсии Аллана справедливы при нулевом математическом ожидании вариаций средних значений частоты. На практике, если нельзя досто-

верно предположить, что дрейф частоты β равен нулю, то среднее значений вариаций частоты необходимо уточнить по результатам измерений. При уточнении средних значений частоты оценку дисперсии Аллана по результатам n измерений вариаций средних значений частоты $\bar{y}'_k = \bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k$ следует находить как

$$\hat{\sigma}_y^2(n, \tau) = \frac{1}{2n_c} \sum_{k=1}^n \left(\bar{y}'_k - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}'_i \right)^2.$$

Значение n_c определяется исходя из требования к несмещённости оценки (для независимых измерений $n_c = n-1$). Значения n_c находят на основе исследования оценок дисперсии $v_{\text{н.с.}}^2$ нормированных нормально распределённых случайных величин ξ_j с автокорреляционной функцией $\rho(i)$ при уточнении математического ожидания, представляемых выражением

$$v_{\text{н.с.}}^2 = \frac{1}{n_c} \sum_{j=1}^n \left(\xi_j - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 = \frac{1}{n_c} \left(\sum_{j=1}^n \xi_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^2 \right).$$

При этом математическое ожидание оценки

$$\langle v_{\text{н.с.}}^2 \rangle = \frac{1}{n_c} \left(n-1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \rho(i) \right).$$

Очевидно, чтобы среднее значение оценки равнялось истинному – единице, требуется соблюдение равенства $n_c = n-1 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \rho(i)$. После подстановки значений НАКФ (3)–(5) получены следующие выражения для БЧШ, ЧФШ и ЧШСБ, соответственно:

$$n_c = n-1/n; \quad n_c \approx (n^2 - 0,22n - 1,46)/n \text{ при } n > 6; \quad n_c = n-1,5 + 0,5/n.$$

С учётом результатов исследований функции распределения оценки дисперсии Аллана при известном дрейфе частоты логично сделать вывод о

целесообразности использования распределения χ^2 и при уточнении дрейфа частоты на той же выборке принять $n_c = n - 1$. При этом смещения оценок $\hat{\sigma}_y(n, \tau)$ нестабильности частоты определяются выражением $\delta = 1 - \sqrt{n_c / (n - 1)}$ (табл. 2).

Таблица 2

Зависимость смещения оценок δ от типа шума

n	БЧШ	ЧФШ	ЧШСБ
10	-0,049	-0,034	0,025
15	-0,033	-0,023	0,017
20	-0,025	-0,018	0,013
25	-0,020	-0,014	0,010
30	-0,017	-0,012	0,008

Заключение. Полученные аналитические выражения НАКФ вариаций частоты для БЧШ, ЧФШ и ЧШСБ позволяют рассчитать центральные моменты и функцию распределения оценок дисперсии Аллана. Найдены относительные погрешности границ доверительных интервалов оценки $\hat{\sigma}_y(n, \tau)$ нестабильности частоты при использовании распределения χ^2 , при $n > 10$ для используемых на практике вероятностей 0,9...0,1 погрешности не превышают по абсолютному значению 0,12 и уменьшаются с увеличением n . Определено смещение оценок $\hat{\sigma}_y(n, \tau)$ нестабильности частоты при уточнении дрейфа частоты, при $n > 10$ смещение находится в интервале $[-0,049...+0,025]$, который уменьшается с увеличением n .

Л и т е р а т у р а

1. Рютман Ж. Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов: Итоги развития за пятнадцать лет // ТИИЭР. 1978. Т. 66. № 9. С. 70–102.

2. Уоллс Ф. Л., Аллен Д. У. Измерения стабильности частоты

// ТИИЭР. 1986. Т. 74. № 1. С. 182–188.

3. **ГОСТ 8.567-2014.** Измерения времени и частоты. Термины и определения.

4. **МИ 2188-92.** Меры частоты и времени. Методика поверки.

5. **Lesage P., Audoin C.** Characterization of frequency stability: uncertainty due to the finite number of measurements // IEEE Trans. Instrum. Meas. 1973. V. IM-22. No. 2. P. 157–161.

6. **Stein S. R.** Frequency and Time - Their Measurement and Characterization, Chapter 12. Precision Frequency Control. V. 2. P. 191–416 / Eds. E. A. Gerber, A. Ballato. New York: Academic Press, 1985. ISBN 0-12-280602-6.

7. **Кузнецов В. А., Ялунина Г. В.** Общая метрология. М.: ИПК «Издание стандарт», 2001.

8. **Виленкин С. Я.** Статистическая обработка результатов исследования случайных функций. М.: Энергия, 1979.

9. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1984.

10. **Кендалл М. Дж., Стьюарт А.** Теория распределений. М.: Наука, 1966.

11. **Гнеденко Б. В.** Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961.

12. **Максименко С. Г.** Аналитическое выражение погрешности линейной оценки расхождения шкал времени // Измерительная техника. 2009. № 1. С. 28–31.

13. **Максименко С. Г.** Совершенствование методики расчёта относительной погрешности меры частоты // Измерительная техника. 2018. №1. С. 15–17.

Дата принятия: 29.11.2017.

Подрисуночные подписи

Рис. 1. Нормированные автокорреляционные функции вариаций средних значений частоты белого частотного шума, частотного фликкер-шума и частотного шума случайных блужданий – кривые 1–3, соответственно

Рис. 2. Нормированные автокорреляционные функции смежных значений вариаций частоты для трёх цезиевых стандартов – кривые 1–3, соответственно