

О размерности безразмерных величин

А. Н. МИТРОХИН

Москва, Россия, e-mail: manmitrofan1946@yandex.ru

Рассмотрена возможность установления связи понятийного аппарата математики, физики, метрологии, сопровождающаяся изменением требований к формированию единиц измерения СИ, на основе новых подходов к математическим операциям, включая введение в понятийный оборот нового термина — качественной (размерностной) единицы.

Ключевые слова: размерность, безразмерная величина, качественная (размерностная) единица.

It is possible to solve the problem of coordinations of the conceptual instruments of mathematics, physics, metrology, accompanying by changing of requirements to forming of SI units of measurement on the basis of new approaches to mathematical operations, including introduction in a conceptual circulation of the new term — qualitative (dimensional) unit (one).

Key words: dimension, dimensionless quantity, qualitative (dimensional) unit.

Понятие безразмерной величины, как показывает обзор учебной, научно-технической, в том числе и нормативной литературы [1—16], утвердилось не только в анализе размерностей, но и там, где используется математический аппарат. Как только возникает необходимость сравнения однородных величин, осуществляемого путем математической операции деления, так сразу же появляется неизбежный спутник — безразмерная величина, легко угадываемая в различных словесно-смысловых обликах. Несмотря на то, что в учебной и научно-технической литературе эта величина является одним из часто встречающихся привычных терминов, она по сей день остается спорным элементом понятийно-терминологического аппарата точных наук.

Продвинулась ли наука в решении данной проблемы за последнее время? Конечно, эта проблема постоянно привлекает внимание специалистов, но по сути ничего не изменилось со времен П. Бриджмена [1]. Современная научно-техническая и учебная литература в изобилии пестрит этим понятием, хотя толком никто не может объяснить, в чем же заключается смысл этой «безразмерности», происхождение которой во многом обязано математической операции деления. Согласно существующим математическим правилам при делении однородных величин остается «безразмерное» число. Однако у практиков абсолютной идентификации с числом не происходит, напротив, продолжает сохраняться скрытый физический смысл, связанный с исходными величинами [2, 3]. Причем смысловое наполнение можно интерпретировать неоднозначно и придавать ему различные смысловые оттенки. Рассмотрим для уяснения проблемы две простые арифметические задачи. В первом случае разделим число 100 на число 10, в результате получим $100/10 = 10$. Во втором случае для ответа на вопрос «сколько отрезков длиной 10 см укладывается в отрезке длиной 100 см?» выполним операцию деления над двумя однородными физическими величинами. В результате, поделив числа и сократив размерности, получим $100 \text{ см}/10 \text{ см} = 10$. Из приведенного выше следует, что результаты деления по форме в обоих случаях совпадают. Однако из сопоставления решений можно сделать очень интересное наблюдение: оказывает-

ся, деление чисел и деление величин, состоящих из числа и размерности, — это различные процедуры. Во втором примере в ответе присутствует не только числовое значение, но будет подразумеваться и смысловое содержание, хотя в обоих примерах получается математически казалось бы одинаковый результат. Несмотря на схожесть формы, содержание ответов будет разное. Во втором случае, зная, что $10 \text{ см} = 1 \text{ дм}$ получаем полный ответ: в 100 см содержится 10 дм и, следуя логике международного стандарта [12], в котором приведено равенство $1 \text{ метр}/1 \text{ метр} = 1 = 1 \text{ радиан}$, по аналогии записываем $100 \text{ см}/10 \text{ см} = 10 = 10 \text{ дм}$. Такая форма записи не должна вызывать возражений, она вытекает из условий задачи, так как ответ в виде числа 10 не устраивает, он неполный и не дает ответа на поставленный вопрос. Следовательно, число 10 в решении второй задачи — это не совсем число, а нечто иное, очень похожее на безразмерную величину, которая далее приобретает черты полноправной физической величины с размерностью длины.

Операции с размерностями во втором примере свидетельствуют о том, что дециметр, хотя и имеет статус дольной единицы измерения в СИ, содержит явные признаки безразмерной величины. В связи с этим напрашивается следующий простой вопрос, а если по каким-либо причинам в качестве основной меры длины был бы выбран дециметр, то стал бы в этом случае метр безразмерной величиной или нет? Ответ скорее всего будет положительным, поскольку в метрологии сейчас существует положение, когда физическая величина при одних обстоятельствах имеет размерность, а при других может оказаться безразмерной.

Особенно отчетливо проблема безразмерности видна на примере угловых единиц измерения — радиана, градуса и других, которые никак не хотят вписываться в существующие каноны. Например, в 1960 г. радиан истерадиан получили статус дополнительных единиц СИ. В 1995 г. класс дополнительных единиц был упразднен, а радиан истерадиан отнесли к безразмерным производным единицам СИ, имеющим специальные наименования и обозначения [11]. Отечественные метрологи при этом одно время предлагали включить их в состав основных единиц СИ [5]. Полемика об

определении статуса угловых единиц измерения продолжается и сейчас, поэтому неудивительно, что этот вопрос постоянно находится в центре внимания Международной организации по стандартизации (ИСО).

К проблеме безразмерности относится также путаница, возникающая при обращении с физическими величинами (частотой, угловой частотой гармонических колебаний, частотой вращения, угловой скоростью), имеющими единицу измерения с^{-1} . Логично предположить, что имеющаяся путаница вряд ли останется только на бумаге, например в нормативных документах, она обязательно приведет к ошибкам в практических делах, что подтверждено в [15]. И по возможности от нее необходимо избавляться. В этом отношении наука имеет прекрасный пример разрешения путаницы, происшедшей с мерами массы и веса.

Существующие неувязки и своеобразные белые пятна в понятийном поле точных наук, включая метрологию, конечно, налагают свой отпечаток на настроения в научном мире и время от времени неудовлетворенность существующим положением выплескивается на страницы литературы [7, 8]. Вносят ли ясность в этот вопрос нормативные документы по метрологии? В международных стандартах существование безразмерных (безразмерностных) величин узаконено с давних пор, и этот статус подтвержден современными международными и национальными нормативными документами [9, 11—14]. В обновленной редакции [14] предложено следующее толкование: безразмерностная величина — величина, для которой все показатели степени сомножителей, соответствующих основным величинам, равны нулю.

Из проведенного анализа следует, что «бриджменовский» вопрос: «В чем смысл величин, не имеющих размерности?» — сейчас столь же актуален, как и прежде, поскольку содержание новых документов остается прежним. Что же все-таки следует понимать под безразмерностью величин? Скорее всего это чистая условность и состоит она в том, что физические величины могут оказаться безразмерными при переводе в другую размерностную систему. Все это свидетельствует о шаткости границ между размерными и безразмерными величинами. Имеющийся размерно-безразмерный дуализм несомненно противоречит основным законам логики, так как эти понятия взаимоисключают друг друга, физическая величина не может одновременно быть и размерной, и безразмерной. Хотя подобное положение несколько напоминает ситуацию в физике, когда ученые при изучении закономерностей микромира впервые столкнулись с дуализмом фотона, который в одних случаях проявлял свойства волны, а в других — свойства частицы.

Откуда возникают безразмерные величины? У истоков их появления стоит математика, точнее математическая операция деления, которую следует рассмотреть более внимательно. Как известно, с первых классов школы нас приучают к мысли, что математические операции (счет, сложение, вычитание, деление и др.) являются операциями над числами. Однако при решении конкретных задач (бытовых, инженерных, научных), например при делении величин, необходимо осуществлять два параллельных математических действия — деление чисел и деление (взаимодействие) размерностей. В случае неоднородности единиц измерения числителя и знаменателя происходит своеобразное сращивание размерностей, объединяемых знаками деления или умножения. В результате этого математического сращивания возникают новые размерности, новые понятия, что мож-

но проиллюстрировать на примере образования единиц измерения скорости движения. В случае одинаковых единиц измерения при делении происходит их сокращение и формально по существующим математическим правилам в результате деления получается пустое безразмерное число. Но, как было показано выше, результат деления математических величин все же не является только числом. Частное от деления несет кроме количественного и качественное содержание, ассоциируемое у практиков с безразмерной величиной.

Анализ путей решения неувязок понятийного аппарата точных наук с использованием уравнений математической физики приводит к выводу, что математические операции необходимо рассматривать не только как операции над числами, но и как операции над математическими величинами, состоящими из числовой и размерностной частей [15]. Причем математическая операция деления в привычном приложении к числам вряд ли подходит к тому, что происходит в этом случае с размерностями — по сути никакого деления здесь не наблюдается. Скорее эту процедуру можно назвать взаимодействием в математическом смысле (например, аналогично слиянию или разделению атомов и молекул в химических реакциях, в результате чего возникают новые свойства веществ) и поэтому сложно подобрать лучший термин в названии [15].

В силу сказанного предлагается размерностный анализ отнести к математике, он должен стать ее естественной и неотъемлемой частью, поскольку в обоих случаях действуют законы математики, хотя алгебра операций с числами и размерностями различна. Такой подход дает дополнительные возможности для решения имеющихся неувязок. Одна из них состоит в четком различении числовой и качественной (размерностной) единиц [15], последняя отражает взаимодействие однородных единиц измерения в операции деления.

Для пояснения вернемся к арифметической задаче, приведенной выше, решение которой имеет вид $100 \text{ см}/10 \text{ см} = 10 = 10 \text{ дм}$. Из рассуждений относительно данного равенства следует, что после сокращения единиц измерения делимого и делителя исчезновения размерности не происходит (что, заметим, согласуется с законами сохранения), т. е. видно ее возрождение. Поэтому желательно каким-то образом отразить промежуточный результат этого взаимодействия, представленный числом 10. По мнению автора, в этом может помочь качественная (размерностная) единица, отражающая результат сокращения размерностей, и указанное равенство примет вид $100 [\text{см}]/10 [\text{см}] = 10[1] = 10 [\text{дм}]$. Таким образом, при делении однородных математических величин получается не безразмерностное количественное содержание, а полновесная математическая величина, состоящая из количественной (числа) и качественной (размерности) частей, хотя для представления качественной части математике явно не хватает более эффективных, с точки зрения последующей расшифровки их субъектом исследования, средств. Если существует такая качественная единица, то с учетом ограниченных возможностей математики субъект исследования сам может принимать решение о характере смыслового содержания (размерности) математической величины. Это свидетельствует о том, что качественная единица многолика по своему внутреннему содержанию, суть которого, несмотря на числовую форму — не количество, а качество, т. е. размерность.

Качественная единица, отражающая взаимодействие размерностей при выполнении операции деления над однородными математическими величинами, вносит существенные коррективы в понимание сущности этой операции. Во-первых, при этом исключается безразмерность результатов деления, что дает серьезные основания для избавления от безразмерных величин. Во-вторых, с учетом, что алгебра операций с символами размерностей отличается от обычной алгебры, некоторые формулы размерностного анализа предстанут в новом виде. В частности, поделив длину на длину в приведенном примере и опустив числовую часть, получим следующий результат:

$$[L]/[L] = [1] = [L]_{\text{рез}}, \quad (1)$$

где $[L]$ в числителе и знаменателе — длина измеряемого отрезка и мера длины образца (эталоны), соответственно; $[1]$ — качественная (размерностная) единица, отражающая результат взаимодействия размерностей; $[L]_{\text{рез}}$ — результирующая мера длины (для рассмотренного выше примера выраженная в дециметрах).

В современной же трактовке (1) в анализе размерностей, как известно, имеет вид $L/L = 1$, где 1 — числовая единица.

Аналогичные рассуждения будут справедливы в отношении любых других величин: массы, времени, скорости и т. д. Рассмотрим правомерность равенства из [12], указанного выше, с учетом введения качественной единицы: 1 метр/1 метр = 1 $[1]$ = 1 радиан. Действительно, если в числителе подразумевается дуга окружности длиной 1 м, а в знаменателе радиус этой же окружности длиной 1 м, то результатом деления будет та же длина, но в виде дуги окружности, равной по длине радиусу этой же окружности, т. е. радиану, причем в данном конкретном случае один радиан равен одному метру.

Отметим также следующую особенность: из-за многоликости качественной единицы ее расшифровка полностью зависит не только от содержимого знаменателя и числителя, но и от вопроса, ответ на который можно получить в результате математической операции деления. Например, при выяснении, во сколько раз один отрезок больше другого, расшифровав смысловое значение размерностной единицы, получим ответ в количестве раз.

Качественная единица дает ключ к уточнению статуса угловых мер. Как показано в [15], при измерении плоского угла измеряется длина дуги окружности, проведенная между двумя наклонными прямыми линиями. В качестве ее основной меры принят радиан — часть окружности, равная по длине радиусу этой же окружности. Важно отметить, что выбор этой меры обусловлен исходным уравнением колебаний гармонического осциллятора и его решением. Такой же мерой может быть и физико-математическая константа π , содержащая 6,283 ... радиана-радиуса. Поэтому под измерением плоского угла следует подразумевать процедуру определения величины раскрытия (раствора, степени непараллельности) двух прямых линий. В результате при делении длины на длину выясняется, что размерностью угловых мер является все та же длина. При этом угловые градус, минута, секунда предстанут как дольные от радиана меры.

Камнем преткновения в современном анализе размерностей является существующее определение, сводящееся к тому, что размерность — это формула, состоящая из символов физических величин. Ограничивая понятие размернос-

ти пределами только физических величин и воспринимая ее как формулу, мы сознательно ограничиваем свои возможности. Понятию размерность эта формульная оболочка явно тесновата. Новый подход к математическим операциям с размерностями дает основание кардинальным образом пересмотреть это определение, и в авторской редакции размерность трактуется как качественная часть математической величины [15]. Иначе говоря, все, что прилагается к числу в виде смыслового содержания, и есть размерность. Разумеется, ее формульное представление не исключается, такая форма записи становится частным случаем выражения размерности физических величин.

Для более полного уяснения изменений, которые вносит новый подход к математическим операциям, рассмотрим действующий национальный стандарт [11], фрагмент которого приведен в табл. 1. Затем скорректируем табл. 1 на основе новых подходов, получим табл. 2 и сравним обе таблицы. Отличия видны уже в заголовках граф табл. 2. Далее, измерение длины в этой таблице предусмотрено двояким образом: для прямой линии — при помощи принятой в данной размерностной системе образцовой (эталонной) единицы измерения длины (например, метра), измерение длины дуги окружности (кривой линии) — с использованием радиана или физико-математической константы π , содержащей 6,283... радиана-радиуса, одинаково употребляемых в любой размерностной системе. После пересчета при необходимости длину кривой линии (части окружности) можно измерять так же, как и длину прямой, т. е. при помощи образцовой (эталонной) единицы измерения длины. При измерениях плоского угла используют радиан — дугу окружности, длина которой равна радиусу этой же окружности.

Одной из отличительных особенностей табл. 2 является форма сокращенной записи наименования мер (единиц измерения) ряда физических величин, которая претерпела изменения в связи с введением качественной единицы. Краткая форма записи учитывает новые подходы и приведена в соответствии с содержанием. Например, сокращенная запись единицы измерения угловой скорости имеет вид $[1]/с$, что означает движение со скоростью радиан в секунду. Краткая форма записи $[1]/с$ является конечной, она несводимая к $с^{-1}$, поскольку качественная единица по своему внутреннему содержанию не является числом. Размерность таких понятий, как частоты колебания и вращения не может быть сведена к обратному времени T^{-1} , поскольку физические понятия «колебание» и «оборот» имеют самостоятельный понятийный статус. Поэтому в формульной трактовке размерность указанных физических величин следует определить как «колебание/время» и «оборот/время». Становится ненужным понятие угловой частоты колебаний, которое представляет собой не что иное, как угловую скорость.

Следующая особенность табл. 2 по сравнению с табл. 1 — устранение совпадения размерностей момента силы и работы (энергии), отмечаемое как недостаток [5, стр. 17]. В новой трактовке единица измерения момента силы будет являться отношением единицы измерения работы (энергии) к единице измерения длины дуги — радиану — т. е. $Н \cdot м/\text{рад} = Н \cdot м/[1]$, что следует из формулы $A = M\varphi$.

В табл. 1 приведен ряд физических величин, имеющих одинаковую размерность, обусловленную единицей измерения метр в минус первой степени (обратный метр), сокращенно $м^{-1}$. К ним относятся волновое число, кривизна ли-

Таблица 1

Оригинальная форма записи основных единиц СИ

Величина		Единица				
наименование	размерность	наименование	обозначение		выражение через основные и производные единицы СИ согласно	
			русское	международное	[11]	[12]
Длина	L	Метр	м	m	—	—
Время	T	Секунда	с	s	—	—
Плоский угол	l	Радан	рад	rad	$m \cdot m^{-1}$	$m \cdot m^{-1}$
Частота	T^{-1}	Герц	Гц	Hz	c^{-1}	s^{-1}
Частота вращения	T^{-1}	Оборот в секунду	об/с	r/s	c^{-1}	s^{-1}
Угловая скорость	T^{-1}	Радан в секунду	рад/с	rad/s	$рад \cdot c^{-1}$	$рад/s = s^{-1}$
Угловая частота гармонических колебаний	T^{-1}	Радан в секунду	рад/с	rad/s	$рад \cdot c^{-1}$	$рад/s = s^{-1}$
Момент силы	L^2MT^{-2}	Ньютон-метр	Н · м	N · m	$m^2 \cdot кг \cdot c^{-2}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	L^2MT^{-2}	Джоуль	Дж	J	$m^2 \cdot кг \cdot c^{-2}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Волновое число	L^{-1}	Метр в минус первой степени	m^{-1}	m^{-1}	—	—
Оптическая сила	L^{-1}	Диоптрия (метр в минус первой степени)	дптр	m^{-1}	m^{-1}	$1 \cdot m^{-1}$
Кривизна линии	L^{-1}	Метр в минус первой степени	m^{-1}	m^{-1}	—	—

П р и м е ч а н и е. Впервые в мировой практике подготовки нормативных документов по метрологии в [11] указана размерность плоского угла — длина, сокращенно l .

Таблица 2

Новая форма записи основных единиц СИ

Величина		Основная мера (единица измерения)		
наименование	символ	наименование основной меры (единицы измерения)	сокращенная запись основной меры (единицы измерения)	
			на русском языке	на латинском языке
Длина				
прямой линии	L	Метр	м	m
кривой линии (дуги окружности)	L	Радан; метр	рад; м	rad; m
Время	T	Секунда	с	s
Плоский угол	α	Радан	рад	rad
Частота колебания	f	Колебание в секунду := Гц	кол/с := Гц	Hz
Частота вращения	n	Оборот в секунду	об/с	rot/s
Угловая скорость	ω	Радан в секунду	рад/с := [1]/с	rad/s := [1]/s
Скорость прямолинейного движения	v	Метр в секунду	м/с	m/s
Момент силы	M	Ньютон-метр/радиан	$H \cdot м/рад := H \cdot м/[1]$	$N \cdot m/rad := N \cdot m/[1]$
Энергия, работа, количество теплоты	E, A, Q	Ньютон-метр := джоуль	$H \cdot м := Дж$	$N \cdot м := J$
Волновое число	v	Радан/метр	рад/м := [1]/м	rad/m := [1]/m
Оптическая сила	D	Диоптрия	$1/m_F := m_F^{-1}$	$1/m_F := m_F^{-1}$
Кривизна линии	ρ	Обратный метр	$1/m_R := m_R^{-1}$	$1/m_R := m_R^{-1}$

П р и м е ч а н и я. Радан — часть окружности, длина которой равна ее радиусу. Поскольку π содержит 6,283 ... радиуса-радиана, то измерение плоского угла может осуществляться также в долях π . Процедура измерения плоского угла заключается в определении величины раскрытия (раствора, степени непараллельности) двух прямых линий.

нии, оптическая сила. Как установлено в [15], волновое число представляет собой количество радиан виртуальной окружности, укладываемых в длине волны, поэтому размерностью волнового числа является не обратный метр, а отношение радиуса виртуальной окружности к единице измере-

ния длины — метру, что в сокращенном виде записывается [1]/м. Термин «виртуальный» использован в связи с тем, что при математической интерпретации колебательного движения решение уравнения осуществляется через круговые (тригонометрические) функции с участием параметра ω — угло-

вой скорости, которой в реальном колебательном процессе не существует.

Из анализа двух оставшихся физических величин следует, что для определения кривизны линии в качестве контрольного отрезка длины служит радиус, а для определения оптической силы — фокусное расстояние линзы, измеряемые в метрах. Поэтому единицами измерения этих физических величин будут соответственно $1/m_R := m_R^{-1}$ и $1/m_F :=$

$= m_F^{-1}$ — диоптрия, где 1 — числовая единица. В качестве примера рассмотрим [16], где отрицается возможность для физических величин иметь такие единицы измерения, как m^{-1} и s^{-1} , т. е. метр в минус первой степени (обратный метр) и секунда в минус первой степени. Действительно, согласно действующим нормативным документам в метрологии к указанным единицам измерения можно предъявить ряд претензий. Однако после введения в сферу размерностного анализа качественной единицы ситуация существенно проясняется. Так, обратный метр на законных основаниях можно применять при выражении кривизны линии и оптической силы линзы. Здесь может смущать заимствованная из алгебры чисел степенная форма записи этой единицы измерения. Как уже отмечалось, алгебра размерностей совсем другая. Что касается секунды в минус первой степени (обратного времени), то результаты, полученные в данной статье, также подтверждают неправомерность ее использования для таких физических величин, как частоты колебания, вращения и гармонических колебаний, а также угловая скорость.

Остановимся далее на анализе одной физико-математической зависимости, рассмотренной в [15], относящейся к изучению волновых процессов, которая в теоретической физике имеет вид

$$\Delta\omega\Delta t \approx 1, \quad (2)$$

где $\Delta\omega$ — интервал частот (вокруг средней частоты ω), s^{-1} ; Δt — промежуток времени, с.

Произведение физических величин характеризуется числовой единицей. Основанием для такого результата согласно алгебраическим правилам является сокращение с и s^{-1} . Проанализируем (2) с учетом полученных результатов. Первый сомножитель представляет интервал угловых скоростей $\Delta\omega$. Из табл. 2 следует, что угловая скорость измеряется в радианах в секунду, сокращенно — $[1]/с$, следовательно, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ будет иметь размерность $[1]/с$. Аналогично для

интервала времени $\Delta t = t_1 - t_2 = \Delta t [с]$. Перепишем (2) с указанием размерности сомножителей

$$\Delta\omega [[1]/с] \cdot \Delta t [с] = ? \quad (3)$$

В (3) выполняется умножение скорости движения на время, значит в результате получается пройденное расстояние. Поэтому (2) согласно физико-математическим правилам приобретает вид

$$\Delta\omega [[1]/с] \Delta t [с] = \Delta s [1]. \quad (4)$$

Полученная в виде формулы трактовка известной зависимости пройденного пути от времени и скорости, независимо от того, что хочет выразить тот или иной автор, соответствует общеизвестным понятийным формам записи, невзирая на уровень изучения проблемы — будь это учебник физики для средней школы или самые современные труды по проблемам квантовой механики. Произведение скорости движения и времени всегда будет результироваться не безликой безразмерной единицей, а пройденным расстоянием. В данном случае речь идет о диапазонах скорости $\Delta\omega$, времени Δt и пройденного пути Δs по окружности, измеренного в радианах. В этом и кроется истинный смысл соотношения (2), когда неопределенности времени и скорости соответствуют неопределенности пройденного расстояния. Некорректность формулы (2) вызвана двумя обстоятельствами, а именно: тем, что ω согласно существующим научным положениям имеет размерность s^{-1} , а также тем, что качественная единица не является элементом размерностного анализа. Поэтому можно считать заблуждением утверждение ряда работ по теории колебаний, что ω (угловая скорость) — это частота.

В современном анализе размерностей применяется такое преобразование, как рационализация уравнений, — ис-

Таблица 3

Фрагмент [12]

№ п/п	Наименование единицы	Международное обозначение	Определение	Переводные коэффициенты, замечания
3.24.а	Один	1	—	См. [12, п. 0.3.2]. Замечания по единицам величин с размерностью единица или безразмерным величинам

Таблица 4

Откорректированный фрагмент

№ п/п	Наименование единицы измерения	Сокращенная запись	Определение	Переводные коэффициенты, замечания
3.24.а	Качественная (размерностная) единица	[1]	Качественная (размерностная) единица—элемент размерностного анализа, являющийся результатом взаимодействия размерностей в математической операции деления однородных величин	Качественная (размерностная) единица является закономерным результатом проявления законов сохранения в математических преобразованиях. Возникает как результат математической операции деления однородных величин, в том числе не относящихся к физическим величинам. Исключает наличие безразмерных величин

Примечание. При сокращенной записи качественной (размерностной) единицы можно использовать $[1']$ (единицу с точкой), чтобы не путать со ссылкой на первый номер литературы в тексте.

ключение множителей 4π и 2π из уравнений, связывающих электромагнитные физические величины. При этом до и после рационализации название физических величин и понятий и их единиц измерения, как правило, сохраняется. Выше показано, что при делении какой-либо математической величины на физико-математическую константу π (заметим, кстати, что для выполнения этой математической операции нужны некоторые дополнительные условия, вытекающие из реального физического процесса) будут изменяться не только численные значения величин, но и их размерности. Одновременно будет меняться смысловое содержание физической величины, при этом будут образовываться новые понятия. Это можно проследить на примере угловой скорости ω с единицей измерения $[1]/с$, когда при делении на 2π она преобразуется в новую физическую величину — частоту вращения или колебания с единицами измерения «оборот в секунду» и «колебание в секунду». Поэтому специалистам в области электромагнитных величин следует обратить внимание на данное обстоятельство. Сказанное выше относится и к постоянной Планка — физической константе, которая в настоящее время имеет два обозначения: h и $\hbar$, отличающихся между собой множителем 2π . По сути, одна из этих физических величин должна иметь другое наименование.

В заключение приведем дополнительные примеры, дающие наглядное представление об отличиях, связанных с введением качественной (размерностной) единицы. Существующее положение согласно [12] проиллюстрировано табл. 3, а предлагаемая интерпретация с учетом материалов [15] — табл. 4.

Таким образом, по мнению автора статьи, качественная единица объективно отражает закономерности, существующие в сфере количественных отношений, ведущая роль в изучении которых принадлежит математике. Введение в сферу размерностного анализа нового термина-понятия, каким является качественная (размерностная) единица, а также расширенное толкование понятия размерности, дают основание утверждать, что безразмерных (безразмерностных) величин просто не существует. Этот вывод не покажется бездоказательным, если размерностный анализ, кстати, необоснованно исключенный из школьного курса математики, по поводу чего в свое время сетовал академик А. Н. Колмогоров, рассматривать как естественную часть математики и физики, а не в качестве особняком стоящей самостоятельной научной ветви.

Литература

1. **Бриджмен П. В.** Анализ размерностей / Пер. с англ. под ред. акад. С. И. Вавилова. Л., М.: Гостехтеоретиздат, 1934.
2. **Веников В. А.** Применение теории подобия и физического моделирования в электротехнике. М., Л.: Госэнергоиздат, 1949.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977.
4. **Dixon D. C.** Another viewpoint on plane angle // *Metrologia*. 1986. V. 22. P. 245—250.
5. **Основные термины** в области метрологии: Словарь-справочник / Под ред. Ю. В. Тарбеева. М.: Изд-во стандартов, 1989.
6. **Mills I. M.** Unity as a unit // *Metrologia*. 1994/95. V. 31. P. 537—541.
7. **Дайнеко В. И. и др.** Памятка для решения расчетных задач по химии (школьникам, учителям, абитуриентам). М.: Интеллект, 1997.
8. **Коган И. Ш.** К вопросу о размерности и единицах измерений безразмерных физических величин // Законодательная и прикладная метрология. 1998. № 4. С. 55—57.
9. **РМГ 29—99.** Метрология. Основные термины и определения.
10. **Mills I. M., Taylor B. N., Thor A. J.** Definitions of the units radian, neper, bel and decibel // *Metrologia*. 2001. V. 38. P. 353—361.
11. **ГОСТ 8.417—2002.** Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин.
12. **ISO 80000-3: 2006 (R).** Величины и единицы. Ч. 3. Пространство и время.
13. **ISO 80000-1:2009 (E).** Величины и единицы. Ч. 1. Общие положения.
14. **Международный словарь** по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины / Пер. с англ. и фр. / ВНИИМ им. Д. И. Менделеева. Изд. 2-е, испр. СПб.: НПО «Профессионал», 2010.
15. **Митрохин А. Н.** О взаимодействии размерностей в математических преобразованиях. М.: Транспорт, 1996.
16. **Коган И. Ш.** Физическая величина не должна иметь единицу $м^{-1}$ или $с^{-1}$ // Законодательная и прикладная метрология. 2011. № 5. С. 43—49.

Дата принятия 11.04.2012 г.