

Вероятностное прогнозирование остаточного ресурса измерительной техники по результатам параметрического контроля

В. В. ПИЦЫК

Академия государственной противопожарной службы МЧС России,
Москва, Россия, e-mail: pitsyk43@mail.ru

Исследована задача вероятностного прогнозирования остаточного ресурса измерительной техники с параметрическими отказами. Дано аналитическое решение задачи для произвольного конечного числа определяющих параметров. Приведен пример практического использования полученного решения.

Ключевые слова: вероятность состояния измерительной техники, параметрический отказ, остаточный ресурс, вероятностное прогнозирование.

The problem of probabilistic forecast of residual operating life of the measuring equipment having parametric failures. A general analytical solution of the problem with arbitrary final number of defining parameters is presented. An example of practical implementation of the obtained solution is given as an illustration.

Key words: state-of-equipment probability, parametric fault, residual operating life, probabilistic forecast.

Опыт эксплуатации измерительной техники (ИТ) показывает, что в отдельных случаях продолжительность использования превышает указанные в технической документации нормативы. Поэтому оценить возможность продления этих сроков, т. е. спрогнозировать остаточный ресурс ИТ, проводя профилактические мероприятия по её обслуживанию, очень важно. Результаты исследований, по которым можно априорно проанализировать остаточный ресурс, приведены в [1, 2], однако некоторые вопросы не рассмотрены. В их числе: исчерпан ли полностью ресурс техники при достижении некоторого, наперед заданного значения вероятности её состояния; целесообразно ли в дальнейшем вкладывать материальные средства для продления сроков эксплуатации ИТ; каким может оказаться остаточный ресурс при ограничениях на дополнительно выделяемые средства? Для обоснования ответов на эти и другие важные вопросы рассмотрим задачу о вероятностном прогнозировании остаточного ресурса ИТ.

Введем условия (основные допущения) задачи.

Рассмотрим измерительную систему (ИС) как объект ИТ, где имеется набор определяющих параметров U_k , для которых задано номинальное значение U_k^0 , $k = 1, 2, \dots, m$, где m — общее число параметров. Наблюдая за поведением параметров, можно судить о развитии процессов в системе.

Предположим, что при функционировании в системе происходят медленно текущие деградационные процессы, в результате чего может наблюдаться отклонение определяющих параметров от номинальных значений. Следовательно, в фиксированные моменты времени t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, определяющие параметры $U_k(t)$ не возрастают, т. е. $U_k(t_1) > U_k(t_2) > \dots > U_k(t_m)$, если $t_1 < t_2 < \dots < t_m$.

Допустим, что определяющие параметры U_k не выходят за пределы заданного интервала допустимых значений

$S_k = (U_k^{\min} < U_k^0 < U_k^{\max})$, где $U_k^{\min}$, $U_k^{\max}$ — соответственно ниж-

няя и верхняя границы интервала, тогда ИС функционирует нормально. Отклонение параметра U_{ik} от допустимых значений приводит к параметрическому отказу. Как правило, параметрический отказ не выводит ИС из рабочего состояния, а лишь снижает качество функционирования. Вероятность внезапных отказов в системе относительно мала, но имеются параметрические отказы, устраняемые в ходе ремонтно-восстановительных работ. Таким образом, данная ИС отнесена к классу восстанавливаемых с конечным числом возможных состояний.

Обозначим через $v_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$ состояние системы в момент времени t . Состояние $v_0(t)$ означает, что в системе не отказал ни один определяющий параметр из общего числа m . Символ $v_1(t)$ указывает, что произошёл отказ одного определяющего параметра, $v_k(t)$ соответствует отказу k параметров, а $v_m(t)$ — отказу всех m определяющих параметров в системе. Причём допускается переход системы из одного состояния лишь в соседнее, не допуская пропуска промежуточных состояний, т. е. из $v_0(t)$ нельзя сразу перейти в $v_2(t)$, миновав $v_1(t)$ [3].

Будем считать, что к моменту времени t суммарные затраты на поддержание системы в состоянии $v_k(t)$ составляют $C_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Предположим, что эксплуатационные расходы ΔC_v в единицу времени одинаковы для каждого из состояний, а средние издержки ΔC_v на восстановление единицы для каждого отказавшего параметра, причём параметр, отказавший в момент времени t , подлежит восстановлению с этого же мо-

мента. За время перехода определяющего параметра из состояния отказа в состояние восстановления затраты на систему не увеличиваются, так как средства на восстановление выделяются (или расходуются) в момент отказа определяющих параметров.

Переход каждой ИС из одного состояния в другое рассматривается как случайное событие [4].

Предположим, что интенсивность λ_k отказа k -го определяющего параметра U_k одинакова для всех определяющих параметров. Примем аналогичное допущение по отношению к параметру μ_k — интенсивности восстановления k -го определяющего параметра. Это позволит в дальнейшем пользоваться суммарными интенсивностями отказов, рав-

ными соответственно $\lambda = \sum_{k=1}^m \lambda_k$, $\mu = \sum_{k=1}^m \mu_k$. Для удобства вы-

полнения расчетов предположим, что поток отказов определяющих параметров — простейший, а функции плотности потоков отказов и восстановления описывают показательными законами с параметрами λ , μ , соответственно [4]. При введенных допущениях требуется определить остаточный ресурс ИС при ограничениях на расход материальных средств на эксплуатацию.

Решение задачи. Определим расход материальных средств, выраженный в условных единицах, на поддержание ИС в состоянии $v_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. Рассмотрим состояние $v_0(t)$, когда к моменту времени $t + \Delta t$ в системе не будет отказа. Это состояние можно рассматривать как сумму двух несовместных событий A_0, B_1 . Событие A_0 состоит в том, что в момент времени t система находилась в состоянии $v_0(t)$, и за время Δt не отказал ни один параметр. Вероятность этого случайного события определяется выражением $P(A_0) = e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события A_0 с вероятностью $P(A_0)$ можно выразить соотношением $C(A_0) = [C_0(t) + \Delta C_3 \Delta t] (1 - \lambda \Delta t)$. Символ B_1 означает событие, при котором в момент времени t система находилась в состоянии $v_1(t)$, и за время Δt один параметр восстановился. Вероятность этого события определяется выражением $P(B_1) = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события B_1 с вероятностью $P(B_1)$ можно выразить как $C(B_1) = C_1(t) \mu \Delta t$. Тогда состояние $v_0(t)$ можно рассматривать как сумму двух несовместных событий A_0, B_1 . Запишем уравнение для случайной функции расхода материальных средств $C_0(t)$ на интервале $t + \Delta t$ для поддержания этого события:

$$C_0(t + \Delta t) = C(A_0) + C(B_1) = [C_0(t) + \Delta C_3 \Delta t] (1 - \lambda \Delta t) + C_1(t) \mu \Delta t. \quad (1)$$

Перепишем выражение (1) иначе:

$$C_0(t + \Delta t) - C_0(t) = -\lambda \Delta t C_0(t) + \mu \Delta t C_1(t) + \Delta C_3 \Delta t - \lambda \Delta t \Delta C_3. \quad (2)$$

Разделим обе части (2) на Δt , перейдем к пределу при условии $\Delta t \rightarrow 0$ и получим дифференциальное уравнение

$$dC_0(t)/dt = -\lambda C_0(t) + \mu C_1(t) + \Delta C_3.$$

Составим аналогичные уравнения для состояний системы $v_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m-1$. Состояние $v_k(t)$ означает, что к

моменту времени $t + \Delta t$ число отказавших определяющих параметров в системе станет равным k , $v_k(t)$ можно рассматривать как сумму трех несовместных событий A_k, B_{k+1}, C_{k-1} , а событие A_k — что в момент времени t система находится в состоянии $v_k(t)$, и за время Δt не отказал и не восстановился ни один параметр. Вероятность этого случайного события определяется выражением $P(A_k) = e^{-\lambda \Delta t} e^{-\mu \Delta t} \approx 1 - (\lambda + \mu) \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события A_k с вероятностью $P(A_k)$ можно выразить соотношением $C(A_k) = [C_k(t) + \Delta C_3 \Delta t] [1 - (\lambda + \mu) \Delta t]$.

Символом B_{k+1} обозначено событие, при котором в момент времени t система была в состоянии $v_{k+1}(t)$, и за время Δt один параметр восстановился. Вероятность в этом случае определяется как $P(B_{k+1}) = 1 - e^{-\mu \Delta t} \approx \mu \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события B_{k+1} с вероятностью $P(B_{k+1})$ составит $C(B_{k+1}) = C_{k+1}(t) \mu \Delta t$.

Событие C_{k-1} заключается в том, что в момент времени t система находилась в состоянии $v_{k-1}(t)$, и за время Δt произошел отказ еще одного параметра. Вероятность этого события $P(C_{k-1}) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события C_{k-1} с вероятностью $P(C_{k-1})$ можно выразить следующим образом: $C(C_{k-1}) = C_{k-1}(t) \lambda \Delta t$. Тогда состояние $v_k(t)$ можно рассматривать как сумму трех несовместных событий A_k, B_{k+1}, C_{k-1} . Запишем уравнение для случайной функции расхода материальных средств $C_k(t)$ на интервале $t + \Delta t$ для поддержания этого события:

$$\begin{aligned} C_k(t + \Delta t) &= C(A_k) + C(B_{k+1}) + C(C_{k-1}) = \\ &= [C_k(t) + \Delta C_3 \Delta t] [1 - (\lambda + \mu) \Delta t] + C_{k+1}(t) \mu \Delta t + C_{k-1}(t) \lambda \Delta t. \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем выражение (3) аналогично равенству (1) и получим дифференциальное уравнение

$$dC_k(t)/dt = \lambda C_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) C_k(t) + \mu C_{k+1}(t) + \Delta C_3 + \lambda \Delta C_3.$$

Составим уравнение для состояния $v_m(t)$, когда к моменту времени $t + \Delta t$ в системе произойдет отказ всех m определяющих параметров. Это состояние можно рассматривать как сумму двух несовместных событий A_m, C_{m-1} . Первое из них — событие $A_m = \{ \text{в момент времени } t \text{ система находилась в состоянии } v_m(t), \text{ и за время } \Delta t \text{ не отказал ни один параметр} \}$. Вероятность этого случайного события определяется выражением $P(A_m) = e^{-\mu \Delta t} \approx 1 - \mu \Delta t$. Расход ресурсов на поддержание события A_m с вероятностью $P(A_m)$ можно выразить соотношением $C(A_m) = [C_m(t) + \Delta C_3 \Delta t] (1 - \mu \Delta t)$. Второе событие — $C_{m-1} = \{ \text{в момент времени } t \text{ система находилась в состоянии } v_{m-1}(t), \text{ и за время } \Delta t \text{ произошел отказ ещё одного параметра} \}$. Вероятность этого события определяется как $P(C_{m-1}) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t$, а расход ресурсов на поддержание C_{m-1} с вероятностью $P(C_{m-1})$ можно выразить как $C(C_{m-1}) = C_{m-1}(t) \lambda \Delta t$.

Состояние $v_m(t)$ можно рассматривать как сумму двух несовместных событий A_m, C_{m-1} . Уравнение для функции расхода материальных средств $C_m(t)$ на интервале $t + \Delta t$ для поддержания этого события имеет вид:

$$\begin{aligned} C_m(t + \Delta t) &= C(A_m) + C(C_{m-1}) = \\ &= [C_m(t) + \Delta C_3 \Delta t] (1 - \mu \Delta t) + [C_{m-1}(t) + \Delta C_3] \lambda \Delta t. \end{aligned} \quad (4)$$

Преобразуем выражение (4) и запишем дифференциальное уравнение:

$$dC_m(t)/dt = \lambda C_{m-1}(t) - \mu C_m(t) + \Delta C_3 + \lambda \Delta C_B.$$

Таким образом, расход материальных средств, выраженный в условных единицах, на поддержание ИТ в состоянии $v_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$ можно описать системой дифференциальных уравнений относительно неизвестных случайных функций расхода материальных средств $C_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$:

$$\left. \begin{aligned} dC_0(t)/dt &= -\lambda C_0(t) + \mu C_1(t) + \Delta C_3; \\ &\dots \\ dC_k(t)/dt &= \lambda C_{k-1}(t) - (\lambda + \mu) C_k(t) + \mu C_{k+1}(t) + \Delta C_3 + \lambda \Delta C_B; \\ &\dots \\ dC_m(t)/dt &= \lambda C_{m-1}(t) - \mu C_m(t) + \Delta C_3 + \lambda \Delta C_B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для решения системы уравнений (5) перейдем к операторной форме её записи:

$$A(p) \times \mathbf{X}(p) = \mathbf{B}^{(c)}(p), \quad (6)$$

где $A(p)$ — трёхдиагональная матрица коэффициентов системы уравнений размерности $(m+1) \times (m+1)$; p — комплексная переменная в полуплоскости существования изображений функций $C_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$.

Элементы этой матрицы запишем в следующем виде:

$$A_{00}(p) = -(\lambda + \mu); \quad A_{kk}(p) = -(\lambda + \mu), \quad k = 1, 2, \dots, m-1;$$

$$A_{k, k-1}(p) = \lambda; \quad k = 1, 2, \dots, m; \quad A_{k, k+1}(p) = \mu, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Компоненты $x_k(p)$ вектора $\mathbf{X}(p)$ являются изображениями соответствующих функций $C_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$. Вектор $\mathbf{B}^{(c)}(p)$ имеет компоненты: $B_0^{(c)}(p) = -\Delta C_3/p$; $B_k^{(c)}(p) = -(\Delta C_3 + \lambda \Delta C_B)p$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Следуя [5], построим оценку $X^*(p)$ неизвестного вектора $\mathbf{X}(p)$ системы уравнений (6), воспользовавшись процедурой оценки матричных коэффициентов многомерной модели регрессионного анализа с произвольным конечным числом регрессоров. Для этого представим систему (6), опуская для упрощения записи переменную p и вводя её, при необходимости, без специальных оговорок, в следующей форме:

$$\sum_{k=1}^{m+1} A_k X_k = \mathbf{B}^{(c)}, \quad (7)$$

где A_k — блочные компоненты матрицы $A = \|A_1 \| A_2 \| \dots \| A_k \| \dots \| A_{m+1} \|$;

X_k — блочные компоненты вектора $\mathbf{X} = \|X_1 \| X_2 \| \dots \| X_k \| \dots \| X_{m+1} \|^T$.

Запишем выражения для компонент A_k, X_k , входящих в (7):

$$A_1 = \begin{pmatrix} -(p + \lambda) \\ \lambda \\ O_{m-1} \end{pmatrix}; \quad A_k = \begin{pmatrix} O_{k-2} \\ \mu \\ -(p + \lambda + \mu) \\ \lambda \\ O_{m-k} \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ -(p + \lambda + \mu) \\ \lambda \\ O_{m-2} \end{pmatrix}; \quad A_{m+1} = \begin{pmatrix} O_{m-1} \\ \mu \\ -(p + \mu) \end{pmatrix},$$

где символом O_α обозначен нулевой вектор размерности α .

Воспользовавшись введенными обозначениями, можно найти оценку $\mathbf{X}^*$ вектора $\mathbf{X}$ неизвестных системы (6) из рекуррентного соотношения:

$$\mathbf{X}_k^* = C_{k-1}^* = M_k A_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{m+1} R_j B^{(c)}, \quad (8)$$

$$\text{где } M_k = \left(A_k^T \prod_{j=1}^{k-1} R_j A_k \right)^{-1}; \quad R_j = E - A_j M_j A_j^T \prod_{i=1}^{j-1} R_i,$$

где E — единичная матрица.

Применив к оценкам (8) обратное преобразование Лапласа [5], получим выражения для оригиналов случайных функций расхода материальных средств $C_k(t)$ на поддержание ИТ в состоянии $v_k(t)$, когда в момент времени t из общего числа, определяющих параметров может отказать некоторое их число $k = 0, 1, 2, \dots, m$. Средний расход материальных средств $\bar{C}(t)$ численно равен математическому ожиданию всевозможных значений случайных функций $C_k(t)$:

$$\bar{C}(t) = \sum_{k=1}^m C_k(t) P_k(t), \quad (9)$$

где $P_k(t)$ — вероятность наступления события $v_k(t)$.

Для нахождения вероятностей $P_k(t)$ можно воспользоваться преобразованием Лапласа для перехода к изображениям и затем решить описанным способом уравнение, полученное из (7), заменив в нём блочные компоненты вектора $\mathbf{X}$ соответствующими функциями вероятности: $X_k = P_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, а правую часть — вектором $\mathbf{B}^{(c)}$ с элементами $B_0^{(c)}(p) = -1$; $B_k^{(c)} = 0$, $k = 1, 2, \dots, m$. Для перехода от функций-изображений $P_k(p) = F_k(p)/G_k(p)$ к функциям-оригиналам $P_k(t)$ можно воспользоваться соотношением [2, 6]:

$$P_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{F_k(p_i)}{G_k'(p_i)} \exp\{p_i t\}, \quad (10)$$

где p_i , $i = 1, 2, \dots, n$ — простые корни знаменателя $G_k(p)$.

Таким образом, соотношения (8)–(10) позволяют рассчитать средний расход материальных средств на поддержание ИТ в каждом из возможных её состояний. Если при этом окажется, что к моменту времени $t = t^*$ средний расход $\bar{C}(t=t^*)$ окажется близок к дополнительно выделяемым на эксплуатацию материальным средствам C_0 , то время t^* можно принимать в качестве остаточного ресурса используемой ИТ и формально находить решение исследуемой задачи о прогнозировании остаточного ресурса из соотношения $t^* = \operatorname{argmin}_{t \in T} \{C_0 - \bar{C}(t)\}$, где $e\{C_0 - \bar{C}\}$ — выбранная мера

близости C_0 к $\bar{C}(t^*)$; T — множество всевозможных положительных значений переменной t .

Рассмотрим применение решения исследуемой задачи на практическом примере. Пусть исследуемое средство ИТ характеризуется следующими показателями: параметры отказа и восстановления $\lambda = 0,05$, $\mu = 0,14$, соответственно. Число определяющих параметров $m = 1$. Эксплуатационные расходы в течение года составляют $\Delta C_3 = 1000$ руб., а средний расход на восстановление отказавшего параметра — $\Delta C_6 = 10000$ руб.

Для введенных исходных данных требуется рассчитать остаточный ресурс средства в предположении, что для его эксплуатации выделено $C_0 = 50000$ руб. В данном примере уравнение (6) принимает вид

$$A_1 X_1 + A_2 X_2 = B^{(c)},$$

$$\text{где } A_1 = \begin{pmatrix} -(p+\lambda) \\ \lambda \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ -(p+\mu) \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix}; B^{(c)} = \begin{pmatrix} -\Delta C_3/p \\ -(\Delta C_3 + C_6)/p \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся (8) для нахождения изображений X^* :

$$C_0^*(p) = \frac{(p+2\mu)\Delta C_3 + \lambda\mu C_6}{p^2(p+\lambda+\mu)}; C_1^*(p) = \frac{(p+2\lambda)\Delta C_3 + \lambda(p+\lambda)C_6}{p^2(p+\lambda+\mu)}.$$

Их оригиналами являются функции $C_k^*(t) = A_k t + B_k(\lambda + \mu)t$, $k = 1, 2$, где $A_0 = (\mu/\lambda + \mu)(2\Delta C_3 + \lambda C_6)$; $A_1 = A_0\lambda/\mu$; $B_0 = [(\lambda - \mu)\Delta C_3 - \lambda\mu C_6]/(\lambda + \mu)^2$; $B_1 = -B_0$.

Применим полученные в [6] выражения для вероятностей $P_k(t)$ и получим из (9) формулы для расчёта среднего

расхода материальных средств:

$$\bar{C}(t) = \frac{2\Delta C_3 + \lambda C_6}{(\lambda + \mu)^2} \left[\lambda^2 + \mu^2 - \lambda(\lambda - \mu)e^{-(\lambda + \mu)t} \right] t - \frac{[(\lambda - \mu)\Delta C_3 - \lambda\mu C_6]}{(\lambda + \mu)^3} \left(\lambda - \mu - 2\lambda e^{-(\lambda + \mu)t} \right) (1 - e^{-(\lambda + \mu)t}). \quad (11)$$

Используя приближённое равенство $e^{-(\lambda + \mu)t} \approx 1 - (\lambda + \mu)t$ в (11) и решая затем для $C_0 = 50000$ уравнение $676,44t^2 - 17582,92t + 50000 = 0$, можно определить остаточный ресурс $t^* = 3,25$. Таким образом, в результате решения задачи для исходных данных примера установлено, что с учётом выделенной для эксплуатации средств ИТ суммы в $C_0 = 50000$ руб. остаточный ресурс его может быть продлен до трёх лет и трёх месяцев.

Заключение. Предложенный метод прогнозирования остаточного ресурса по результатам параметрического контроля применим также для ИТ с резервными элементами, каждый из которых может рассматриваться как определяющий параметр.

Л и т е р а т у р а

1. **Пицык В. В.** Математическая модель прогнозирования страховых запасов для профилактики измерительной техники // Метрология. 2006. № 7. С. 3—29.
2. **Пицык В. В.** Модель прогнозирования нестационарного состояния измерительной техники с параметрическими отказами // Метрология. 2010. № 3. С. 3—15.
3. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2002.
4. **Барлоу Р., Прошан Ф.** Статистическая теория надёжности и испытания на безотказность / Пер. с англ. М.: Наука, 1984.
5. **Письменный Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс. М.: Айрис-пресс, 2010.
6. **Пицык В. В.** Многомерная задача нелинейного оценивания систематических погрешностей в измерительных системах со структурной избыточностью // Метрология. 1999. № 12. С. 3—17.

Дата принятия 05.06.2015 г.