

Обратные задачи теории средних в случае малых выборок

Л. А. МИРОНОВСКИЙ*, В. А. СЛАЕВ**

* С.-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, С.-Петербург, Россия, e-mail: miron@aanet.ru

** Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: v.a.slaev@vniim.ru

Сформулированы обратные задачи измерений для средних, полученных из малых выборок. В качестве исследуемых оценок выбраны классические средние: арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и контрагармоническое. Найдены формулы для оценивания неизвестных величин по известным средним в случае двух и трех измерений.

Ключевые слова: обработка измерительных данных, классические средние, малые выборки, обратные задачи теории средних, восстановление данных по результатам косвенных измерений.

The inverse problems of measurements for means from small samplings are formulated. As the means under study the classical means are chosen: arithmetic, geometric, harmonic, quadratic and contraharmonic. The equations for unknown quantities estimation from known means in cases of two and three measurements are received.

Key words: measurements data processing, classical means, small samplings, inverse problems of means theory, data reconstruction from indirect measurements results.

Обработка результатов многократных измерений неизвестной величины относится к числу классических задач метрологии. Для получения оценки этой величины используются соответствующие алгоритмы. При решении практических задач часто вычисляют средние: арифметическое, геометрическое, гармоническое и др. [1–4]. В случае малых выборок, когда число измерений невелико, возможна обратная постановка задачи, когда по известным значениям нескольких средних требуется восстановить результаты измерений. Такая задача встречается в теории косвенных измерений, при разработке систем технической диагностики и проектировании информационно-измерительных систем. Как правило, решение подобных обратных задач сводится к отысканию корней некоторых полиномов, степень которых определяется объемом оцениваемой выборки [4].

Цель статьи — нахождение указанных полиномов, когда в качестве исходных данных выступают значения пяти классических средних: арифметического, геометрического, гармонического, контрагармонического и квадратического. При этом основное внимание уделяется случаю малых выборок, содержащих два или три значения измеряемой величины.

Постановка задачи. Прямая задача теории средних величин состоит в том, чтобы по заданному набору измеренных значений $x_1, \dots, x_n$ неизвестной величины x найти оценку этой величины. К средним оценкам, известным еще Пифагору, относятся средние арифметическое (A), геометрическое (G) и гармоническое (H). Позже ввели ряд других средних, в частности контрагармоническое (C) и квадратическое (Q). Формулы для перечисленных средних приведены в [5]. В настоящее время в научной литературе описано более ста различных средних [1, 4, 5, 8, 9]. Все они представляют симметричные, однородные функции и удовлетворяют условиям Коши и Колмогорова, предъявляемым к средним [1, 3–8]. В случае малых выборок, когда n невелико, например равно двум

или трем, представляет интерес обратная задача, состоящая в вычислении (восстановлении) неизвестных величин x_i по известным значениям их средних.

В метрологии это соответствует случаю косвенных измерений, когда известны показания приборов, измеряющих различные средние значения физических величин (например средние арифметическое, квадратическое), и требуется определить значения самих физических величин. В качестве другого примера можно привести задачу определения геометрических размеров тела, если известны его объем, площадь поверхности или другие характеристики, имеющие смысл средних.

Ясно, что для разрешимости обратной задачи необходимо, чтобы число известных средних было не меньше числа неизвестных величин. В общем случае обратную задачу можно сформулировать следующим образом: известны m различных средних некоторой совокупности $n \leq m$ величин, надо найти значения этих величин. В частности, если $n = m$, то для n аргументов $x_1, \dots, x_n$ имеем совокупность n средних величин

$$y_i = F_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

Решив систему алгебраических уравнений (1) относительно переменных $x_1, \dots, x_n$, получим их оценки $f(y_1, \dots, y_m) = 0$. Например, исключив пару a, b из трех пифагоровых средних найдем инвариантное соотношение $AH - G^2 = 0$ [4, 5]. Остановимся подробнее на восстановлении неизвестных данных по известным средним для случаев двух и трех измерений.

Обратные задачи для $n = 2$. Рассмотрим пять средних двух чисел a и b :

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad G = \sqrt{ab}, \quad H = \frac{2ab}{a+b}, \quad C = \frac{a^2+b^2}{a+b}, \quad Q = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \quad (2)$$

Для определения неизвестных a, b достаточно знать значения каких-нибудь двух средних. Перебирая все пары из пяти средних (2), получаем $C_5^2 = 10$ обратных задач для $n = 2$. В табл. 1 для каждой из них приведены алгебраические уравнения, корни которых дают значения искомых величин a, b .

Таблица 1

Обратные задачи при $n = 2$ для определения величин a, b

№	Средние	Алгебраическое уравнение
1	A, G	$x^2 - 2Ax + G^2 = 0$
2	A, H	$x^2 - 2Ax + AH = 0$
3	A, C	$x^2 - 2Ax + A(2A - C) = 0$
4	A, Q	$x^2 - 2Ax + 2A^2 - Q^2 = 0$
5	G, H	$x^2 - 2G^2x/H + G^2 = 0$
6	G, C	$2x^2 - (C + r)x + 2G^2 = 0,$ $r = \sqrt{C^2 + 8G^2}$
7	G, Q	$x^2 - x\sqrt{2G^2 + 2Q^2} + G^2 = 0$
8	H, C	$x^2 - (C + H)x + H(C + H)/2 = 0$
9	H, Q	$4x^2 - 2(H + r)x + H(H + r) = 0,$ $r = \sqrt{H^2 + 8Q^2}$
10	C, Q	$C^2x^2 - 2CQ^2x + Q^2(2Q^2 - C^2) = 0$

Заметим, что табл. 1 можно использовать не только для вычислений a, b по их средним, но и для вывода инвариантных соотношений, связывающих эти средние. Дело в том, что корни всех квадратных уравнений табл. 1 равны одним и тем же числам a, b . Следовательно, коэффициенты этих уравнений при одинаковых степенях x также должны быть равны друг другу. Приравнивание их дает совокупность инвариантных соотношений между средними при $n = 2$. В частности, условия равенства свободных членов уравнений дают шесть инвариантных соотношений. Три из них $G^2 = AH$, $G^2 = A(2A - C)$, $G^2 = 2A^2 - Q^2$, остальные соотношения можно получить, приравнявая коэффициенты при x ; их полный список приведен в [4, 5], где он получен иным путем.

Обратные задачи для $n = 3$. Рассмотрим задачу восстановления трех величин a, b, c по известным значениям тех же пяти средних:

$$A = (a + b + c) / 3, \quad G = \sqrt[3]{abc}, \quad H = 3 / (a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}),$$

$$C = (a^2 + b^2 + c^2) / (a + b + c), \quad Q = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2) / 3}.$$

(3)

Для восстановления трех величин a, b, c надо знать, по крайней мере, три из этих средних. Перебирая все тройки из пяти средних (3), получаем $C_5^3 = 10$ обратных задач для

$n = 3$. В табл. 2 для каждой из 10 задач приведены алгебраические уравнения, корни которых дают значения искомых величин a, b, c .

Таблица 2

Обратные задачи при $n = 3$ для определения величин a, b, c

№	Средние	Алгебраическое уравнение
1	A, G, H	$x^3 - 3Ax^2 + 3G^3x/H - G^3 = 0$
2	A, G, C	$x^3 - 3Ax^2 + 3A(3A - C)x/2 - G^3 = 0$
3	A, G, Q	$x^3 - 3Ax^2 + 3(3A^2 - Q^2)x/2 - G^3 = 0$
4	A, H, C	$x^3 - 3Ax^2 + 3A(3A - C)x/2 - AH(3A - C)/2 = 0$
5	A, H, Q	$x^3 - 3Ax^2 + 3(3A^2 - Q^2)x/2 - H(3A^2 - Q^2)/2 = 0$
6	A, C, Q	Определить a, b, c невозможно
7	G, H, C	$x^3 - \left[CH + \sqrt{H(C^2H + 24G^3)} \right] x^2 / (2H) + 3G^3x/H - G^3 = 0$
8	G, H, Q	$x^3 - \sqrt{(6G^3 + 3Q^2H)} x^2 / H + 3G^3x/H - G^3 = 0$
9	G, C, Q	$x^3 - 3Q^2x^2/C + 3Q^2(3Q^2 - C^2)x/(2C^2) - G^3 = 0$
10	H, C, Q	$x^3 - \frac{3Q^2}{C}x^2 + \frac{3Q^2}{2C^2}(3Q^2 - C^2)x - \frac{HQ^2}{2C^2}(3Q^2 - C^2) = 0$

Табл. 2, как и табл. 1, можно использовать для вывода инвариантных соотношений, связывающих средние, поскольку корни всех кубических уравнений равны одним и тем же числам a, b, c . В частности, условия равенства свободных членов уравнений дают соотношения $2G^3 = AH(3A - C)$, $2G^3 = H(3A^2 - Q^2)$, $2G^3C^2 = HQ^2(3Q^2 - C^2)$, а другие можно получить, приравняв коэффициенты при x либо x^2 . Иной способ вывода этих соотношений описан в [4, 5].

Обратные задачи при наличии априорной информации. Уравнения и формулы, приведенные в табл. 1 и 2, справедливы при любых значениях аргументов и не требуют априорной информации об оцениваемых величинах. Подобная информация приводит к появлению новых вариантов обратных задач. Пусть известно, что оцениваемые величины связаны некоторой функциональной зависимостью

$$h(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (4)$$

Знание функции h позволяет уменьшить на единицу число средних, необходимых для восстановления искомых величин. При этом можно исключить аргументы из системы уравнений (1), дополненной (4). Проиллюстрируем соответствующую процедуру для $n = 3$ и классических средних, если дополнительно известно, что измеряемые величины a, b, c являются членами арифметической или гармонической прогрессий.

Случай арифметической прогрессии. Пусть априори известно, что числа a, b, c являются соседними членами некоторой арифметической прогрессии $\{a, b, c\} = \{b - q, b, b + q\}$. Отсюда следует, что они связаны зависимостью $b = (a + c)/2$, т. е. уравнение (4) имеет вид $a + c - 2b = 0$. Для определения неизвестных величин a, b, c достаточно знать любые два средних из рассматриваемых пяти классических. Всего получаем $C_5^2 = 10$ обратных задач, соответствующих десяти различным парам средних. Наиболее простые результаты получаются для четырех пар, в которые входит среднее арифметическое: (A, G) , (A, H) , (A, C) , (A, Q) . Рассмотрим каждую из них.

Для пары (A, G) искомые величины равны корням кубического уравнения

$$Ax^3 - 3A^2x^2 + (2A^3 + G^3)x - AG^3 = 0$$

или $(x - A)(Ax^2 - 2A^2x + G^3) = 0$.

Для пары (A, H) — корням кубического уравнения

$$(3A - H)x^3 - 3A(3A - H)x^2 + 6A^3x - 2A^3H = 0$$

или $(x - A)[(3A - H)x^2 - 2A(3A - H)x + 2A^2H] = 0$.

Для пары (A, C) — корням кубического уравнения

$$2x^3 - 6Ax^2 + 3A(3A - C)x - A^2(5A - 3C) = 0$$

или $(x - A)[2x^2 - 4Ax + (5A - 3C)A] = 0$.

Для пары (A, Q) задача сводится к предыдущей при замене $C = Q^2/A$.

Случай гармонической прогрессии. Пусть априори известно, что величины a, b, c являются соседними членами прогрессии, в которой величина b равна среднему гармоническому величин a и c , т. е. они связаны соотношением [8]: $b^{-1} = (a^{-1} + c^{-1})/2$. Для рассматриваемых пяти средних вновь получаем десять вариантов обратных задач. В этом случае наиболее простые выражения получаются для пар средних (A, H) (G, H) .

Для пары (A, H) искомые величины равны корням кубического уравнения

$$2x^3 - 6Ax^2 + H(3A - H)(3x - H) = 0$$

или $(x - H)[2x^2 - (3A - H)(2x - H)] = 0$.

Для пары (G, H) — корням кубического уравнения

$$H^2x^3 - (2G^3 + H^3)x^2 + 3G^3Hx - G^3H^2 = 0,$$

или $(x - H)(H^2x^2 - 2G^3x + G^3H) = 0$.

Полученные результаты для обеих прогрессий сведены в табл. 3.

Таблица 3

Обратные задачи при $n = 3$, когда измеряемые величины a, b, c являются членами арифметической или гармонической прогрессий

Средние	Формулы для определения величин a, b, c
Арифметическая прогрессия	
A, G	$a = A - \sqrt{(A^3 - G^3)/A}, b = A, c = A + \sqrt{(A^3 - G^3)/A}$
A, H	$a = A \left[1 - \sqrt{(3A - 3H)/(3A - H)} \right], b = A,$ $c = A \left[1 + \sqrt{(3A - 3H)/(3A - H)} \right]$
A, C	$a = A - \sqrt{3A(C - A)/2}, b = A, c = A + \sqrt{3A(C - A)/2}$
A, Q	$a = A - \sqrt{3(Q^2 - A^2)/2}, b = A, c = A + \sqrt{3(Q^2 - A^2)/2}$
Гармоническая прогрессия	
A, H	$a = (3A - H)/2 - \sqrt{3(A - H)(3A - H)}, b = H,$ $c = (3A - H)/2 + \sqrt{3(A - H)(3A - H)}$
G, H	$a = G \left[G^2 - \sqrt{G(G^3 - H^3)} \right] / H^2, b = H,$ $c = G \left[G^2 + \sqrt{G(G^3 - H^3)} \right] / H^2$

Пример. Определение сопротивлений по результатам косвенных измерений. При последовательном соединении трех резисторов их общее сопротивление оказалось равным $R = 11$ кОм, а при параллельном соединении оно составило $r = 1$ кОм. Требуется определить сопротивления R_1, R_2, R_3 резисторов, если известно, что их номиналы образуют гармоническую прогрессию.

В данном случае среднее арифметическое сопротивлений $A = R/3 = 11/3$ кОм, их среднее гармоническое $H = 3r = 3$ кОм, т. е. имеем задачу обратную паре (A, H) . В соответствии с ней искомые сопротивления находим по формулам, приведенным в табл. 3. После подстановки в них числовых значений A и H получаем $R_1 = 2$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_3 = 6$ кОм.

Заключение. Сформулированы обратные задачи измерений для средних, полученных из малых выборок. В качестве исследуемых оценок выбраны классические средние: арифметическое, геометрическое, гармоническое, квадратическое и контрагармоническое. На их основе получены алгебраические уравнения для определения искомых величин для случая двух и трех измерений. Результаты, представленные в табл. 1 и 2, могут быть полезны при обработке косвенных измерений и нахождении алгебраических инвариантов, связывающих различные средние. Отдельно рассмотрены варианты обратных задач при наличии априорной информации в виде алгебраических соотношений, связывающих оцениваемые величины. Анализ влияния погрешностей измерений на результаты вычислений представляет самостоятельную задачу.

Л и т е р а т у р а

1. Джини К. Средние величины. М.: Статистика, 1970.
2. Toader S., Toader G. Greek means // Automat. Comput. Appl. Math. 2002. V. 11. N. 1. P. 159—165.
3. Орлов А. И. Прикладная статистика. М.: Экзамен, 2006.
4. Slaev V. A., Chunovkina A. G., Mironovsky L. A. Metrology and Theory of Measurement. Berlin: De Gruyter, 2013.
5. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Инвариантные алгебраические соотношения между средними из малых выборок // Измерительная техника. 2014. № 2. С. 21—26.
6. Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 136—138.

7. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Оценивание результатов измерений по малым выборкам // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1. С. 69—78.

8. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Алгоритмы оценивания результата трех измерений. СПб.: Профессional, 2010.

9. Мироновский Л. А., Слаев В. А. Инварианты в метрологии и технической диагностике // Измерительная техника. 1996. № 6. С. 3—14; Mironovsky L. A., Slaev V. A. Invariants in metrology and technical diagnostics // Measurement Techniques. 1996. V. 39. N. 6. P. 577—593.

Дата принятия 02.12.2013 г.

629.7:389

О паритете динамических и статических погрешностей в информационно-измерительных системах

В. И. СОБОЛЕВ

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Москва, Россия, e-mail: mvs2354@rambler.ru

Проанализированы метод пошаговой коррекции динамической погрешности, факторы, определяющие возможность и точность коррекции, и условия ее паритета с точностью статических измерений.

Ключевые слова: динамическая погрешность, обратные задачи динамики, коррекция.

The analysis of dynamic stepwise error correction method and the factors which determine the correction precision, possibility and the conditions of its parity with the static measuring precision has been carried out.

Key words: dynamic error, inverse problems of dynamics, error correction.

Высокие требования к точности информационно-измерительных систем (ИИС), характерные для ряда направлений современной техники и, в первую очередь, аэрокосмической, инициировали разработку средств измерений (СИ), обеспечивающих измерения в статическом режиме с погрешностью, составляющей десятки доли процента. В то же время сложилось несоответствие между статической и динамической погрешностями. Во многих случаях использования высокоточных СИ динамическая погрешность на порядок превышает статическую, что обесценивает их метрологические качества. Последнее вызвало необходимость развития радикальных методов уменьшения динамических погрешностей до уровня малых статических. Очевидно, что наряду с совершенствованием существующих методов и поиском новых физических принципов построения СИ целесообразно разрабатывать алгоритмические пути решения задачи.

В данной статье рассмотрен алгоритмический метод коррекции динамической погрешности на каждом малом шаге временной дискретизации измеряемого процесса — метод пошаговой коррекции.

Средство измерений как непрерывную линейную динамическую систему представим в пространстве состояний в виде дискретной модели

$$x(k+1) = \Phi(k+1, k) x(k) + \Psi(k+1, k) u(k), \quad (1)$$

где $x(k+1)$, $x(k)$ — выходные сигналы СИ в моменты $k+1$, k с интервалом дискретизации T ; $u(k)$ — входной сигнал в момент k ; $\Phi(k+1, k)$, $\Psi(k+1, k)$ — матрицы дискретной модели, характеризующие динамические свойства СИ.

Для коррекции динамической погрешности СИ необходимо выполнить обратное преобразование сигнала $x(k+1)$ во входной сигнал $u(k)$.

Из (1) находим произведение $\Psi(k+1, k)u(k)$ как функцию от $x(k)$, $x(k+1)$:

$$\Psi(k+1, k)u(k) = x(k+1) - \Phi(k+1, k)x(k). \quad (2)$$

Уравнение (2) при определенных условиях позволяет вычислить неискаженное динамикой значение измеряемой величины $u(k)$ на каждом шаге дискретизации.

Решение (2) относят к обратным задачам динамики, которые в широком понимании рассматривают как некорректные [1], когда слабые изменения сигнала на входе обратного преобразования и коэффициентов динамической системы вызывают существенные изменения выходного сигнала. В то же время в некоторых ситуациях при определенных ограничениях обратное решение может успешно применяться.

Рассмотрим решение задачи на примере СИ с динамической характеристикой аperiodического звена. К ним принадлежит широкий класс измерителей температуры и СИ, динамику которых определяют такие преобразователи, как RC- и RL-цепи. В системах, измеряющих воздушно-скоростные параметры летательных аппаратов, запаздывание, вносимое подводными каналами давления с динамикой аperiodического звена, оказывает значительное влияние на качество их управления.