

## Неопределенность измерения температуры и разности температур с учетом корреляции

Н. П. МОИСЕЕВА

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева, С.-Петербург, Россия, e-mail: N.P.Moiseeva@vniim.ru

Рассмотрен метод оценивания неопределенности измерения температуры в рабочем диапазоне платинового термометра сопротивления, учитывающий корреляцию неопределенностей поверки термометра в градуировочных точках. Показано, что в случае превышения суммарных коррелированных неопределенностей над некоррелированными для расчета неопределенности измерения можно использовать линейную интерполяцию. Предложен способ уменьшения неопределенности измерения разности температур двумя термометрами, градуированными с использованием одной и той же аппаратуры, при учете корреляции входных величин.

**Ключевые слова:** термометр сопротивления, корреляция, методика калибровки, комплекты термометров, измерения разности температур, уравнение интерполяции.

*The method for measurement uncertainty estimation in the working range of platinum resistance thermometer with taking into account the correlation of calibration uncertainties is considered in this paper. It is shown that if the sum of correlated uncertainties exceeds that of uncorrelated, it is to calculate the measurement uncertainty using a linear interpolation. The uncertainty in the temperature difference measured with two thermometers calibrated with the same instruments can be considerably reduced at taking into account the correlation of the input values.*

**Key words:** resistance thermometer, correlation, calibration method, set of thermometers, temperature difference measurement, interpolation equation.

В настоящее время практически все поверочные центры России уже столкнулись с необходимостью расчета неопределенности измерений при поверке термометров сопротивления (ТС), как этого требуют международные нормы. Новый российский стандарт [1] рекомендует упрощенный алгоритм расчета. Фактически неопределенность поверки термометров является оценкой измерительных возможностей лабораторий, поскольку зависит, прежде всего, от используемых оборудования и образцовых средств измерений (СИ). Сейчас расширенные неопределенности поверок двух лабораторий могут отличаться в десятки раз. Однако выбор оборудования зависит от измерительной задачи, требуемой точности поверяемого ТС и необходимого соотношения цена — качество.

Оценка неопределенности измерений, выполненных при поверке, безусловно повышает качество поверочных работ. И все же необходимо иметь в виду, что потребителей поверяемых термометров интересуют их погрешность и неопределенность во всем интервале рабочих температур при эксплуатации. Если для рабочих ТС погрешность обусловлена классом допуска, то для термометров с индивидуальными градуировкой и требованиями к точности неопределенность измерения зависит от неопределенности градуировочных коэффициентов и условий измерения, обеспечиваемых самим потребителем. Поскольку условия измерений могут быть самыми разными и не зависеть от поверителя, будем обсуждать влияние именно неопределенности поверки ТС на неопределенность измерения температуры в его рабочем диапазоне.

Расчет неопределенности измерения температуры рабочим ТС с индивидуальной градуировкой, на первый взгляд, не является сложной задачей, поскольку сама функция преобразования Каллендара Ван Дюзена (КВД) имеет довольно простой вид и в диапазоне выше нуля представляет собой полином второй степени. Во многих случаях для прибли-

зительной оценки неопределенности в интервале температур допускается ее простая линейная интерполяция между градуировочными точками. Однако всякая приблизительность должна быть обоснована. Ниже предложено наиболее точное решение этой задачи с использованием методов, установленных в Руководстве [2]. Будет рассмотрена модель, в которой для поверки ТС в градуировочных точках применяется одно и то же измерительное оборудование, что приводит к взаимозависимости (или так называемой корреляции) неопределенностей поверки в разных точках. Особенно важно учесть корреляцию при поверке термометров для измерения разности температур с целью существенного уменьшения расширенной неопределенности измерения, как будет показано ниже.

**Индивидуальная градуировка рабочего ТС.** Индивидуальную градуировочную функцию для рабочих платиновых ТС можно строить по методике МТШ-90 или на основе зависимости КВД. Полученные кривые будут несколько различаться. Для прецизионных ТС, по возможности, рекомендуется использовать методику МТШ-90, при которой требуется градуировка в реперных точках затвердевания металлов или при температурах, близких к этим точкам. Для термометров низших разрядов, в том числе входящих в комплекты для измерения разности температур, применение МТШ-90 экономически невыгодно, и обычно вполне достаточно простой квадратичной зависимости КВД, полученной методом сличения с эталонным термометром в жидкостном термостате.

Рассмотрим очень распространенный вариант градуировки платиновых термометров в трех градуировочных точках 0, 100, 180 °С. Бюджет неопределенности при поверке в данных точках с использованием типичного оборудования (ТС с номинальным сопротивлением 50 Ом) приведен в табл. 1—3, где не указаны конкретные СИ, но все погрешности термостатов и измерительных установок взяты из ре-

Таблица 1

Бюджет неопределенности градуировки ТС при температуре 0 °С

Источник неопределенности	Стандартная неопределенность, исходные ед.	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС	$10^{-3}$ Ом	$10^{-3}$
Случайные эффекты при измерении сопротивления эталонного ТС	$10^{-4}$ Ом	$10^{-4}$
Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний $\pm 0,0005$ °С в течение 15 мин)	$2,89 \cdot 10^{-4}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-4}$
Неоднородность температуры в рабочем объеме термостата (на длине чувствительного элемента ТС изменение температуры $\pm 0,001$ °С)	$5,78 \cdot 10^{-4}$ °С	$1,156 \cdot 10^{-3}$
Градуировка эталонного термометра 3-го разряда ЭТС-10 с доверительной погрешностью $\pm 0,02$ °С	$10^{-2}$ °С	$2 \cdot 10^{-2}$
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности $\pm 0,005$ Ом)	$1,67 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1,67 \cdot 10^{-3}$
Нестабильность эталонного ТС за межповерочный интервал (изменение сопротивления $\pm 0,05$ °С при $0,01$ °С за межповерочный интервал)	$2,89 \cdot 10^{-2}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Суммарная коррелированная неопределенность	—	<b>0,06119</b>
Суммарная некоррелированная неопределенность	—	0,00164
Суммарная неопределенность	—	0,06121

Таблица 2

Бюджет неопределенности градуировки ТС при температуре 100 °С

Источник неопределенности	Стандартная неопределенность, исходные ед.	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС	$10^{-3}$ Ом	$10^{-3}$
Случайные эффекты при измерении сопротивления эталонного ТС	$5 \cdot 10^{-4}$ Ом	$5 \cdot 10^{-4}$
Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний $\pm 0,0005$ °С в течение 15 мин)	$2,89 \cdot 10^{-4}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-4}$
Неоднородность температуры в рабочем объеме термостата (на длине чувствительного элемента ТС изменение температуры $\pm 0,001$ °С)	$5,78 \cdot 10^{-4}$ °С	$1,156 \cdot 10^{-3}$
Градуировка эталонного термометра 3-го разряда ЭТС-10 с доверительной погрешностью $\pm 0,03$ °С	$1,5 \cdot 10^{-2}$ °С	$3 \cdot 10^{-2}$
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности $\pm 0,005$ Ом)	$1,67 \cdot 10^{-3}$ Ом	$1,67 \cdot 10^{-3}$
Нестабильность эталонного ТС за межповерочный интервал (изменение сопротивления $\pm 0,05$ °С при $0,01$ °С за межповерочный интервал)	$2,89 \cdot 10^{-2}$ °С	$5,78 \cdot 10^{-2}$
Суммарная коррелированная неопределенность	—	<b>0,06515</b>
Суммарная некоррелированная неопределенность	—	0,00600
Суммарная неопределенность	—	0,06542

альной практики. Предполагается, что измерения сопротивления проводятся на одной и той же установке для образцовых и рабочих ТС.

Полужирным шрифтом в табл. 1—3 выделены общие для всех градуировочных точек значения неопределенностей, которые коррелированы с коэффициентом корреляции 1. Неопределенности, возникающие при случайных эффектах, а также от нестабильности температуры в термостатах, не являются коррелированными. Для подобных градуировок ТС характерно, что сумма коррелированных стандартных неопределенностей в несколько раз превышает сумму некоррелированных.

Рассмотрим классическое уравнение распространения (или транспонирования) неопределенностей на интервал:

$$u_c^2(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u_{x_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \rho_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u_{x_i} u_{x_j}, \quad (1)$$

где  $f(x_i)$  — интерполяционная функция;  $u_{x_i}$ ,  $u_{x_j}$  — неопределенности аргументов функции;  $\rho_{i,j}$  — коэффициент корреляции аргументов.

В данном случае  $f(x_i)$  представляет собой функцию КВД  $R(t) = R_0(1 + At + Bt^2)$ , коэффициенты  $R_0$ ,  $A$ ,  $B$  которой вычисляются исходя из измеренных в трех точках градуировки  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Аналитическое выражение для  $R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$  довольно громоздкое, поэтому здесь не приводится. Для удобства расчетов все стандартные неопределенности в табл. 1—3 были представлены в единицах электрического сопротивления (омах). Таким образом, аргументы  $x_i$  функции  $f(x_i)$ , по которым выполняется дифференцирование в (1), представляют собой сопротивления  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , а их неопределенности  $u_{x_i}$  — суммарные стандартные неопределенности измерения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  в точках градуировки (см. табл. 1—3). Коэффициенты корреляции  $\rho_{i,j}$  должны отражать взаимозависимость между результатами измерений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , основанную на использовании одних и тех же измерительной аппаратуры и образцового термометра. Вычислить точное значение коэффициента корреляции довольно сложно, но, учитывая аддитивный характер суммарной неопределенности, можно полностью разделить некоррелированные и коррелированные неопределенности.

Таблица 3

**Бюджет неопределенности градуировки ТС при температуре 180 °С**

Источник неопределенности	Стандартная неопределенность, исходные ед.	Стандартная неопределенность, Ом
Случайные эффекты при измерении сопротивления ТС	10 <sup>-3</sup> Ом	10 <sup>-3</sup>
Случайные эффекты при измерении сопротивления эталонного ТС	5 · 10 <sup>-4</sup> Ом	5 · 10 <sup>-4</sup>
Нестабильность температуры в термостате (пределы колебаний ± 0,01 °С в течение 15 мин)	5,78 · 10 <sup>-3</sup> °С	1,156 · 10 <sup>-2</sup>
Неоднородность температуры в рабочем объеме термостата (на длине чувствительного элемента ТС изменение температуры ± 0,001 °С)	5,78 · 10 <sup>-4</sup> °С	1,156 · 10 <sup>-3</sup>
Градуировка эталонного термометра 3-го разряда ЭТС-10 с доверительной погрешностью ± 0,04 °С	<b>2,0 · 10<sup>-2</sup> °С</b>	<b>4,0 · 10<sup>-2</sup></b>
Электроизмерительная установка (предел допустимой погрешности ± 0,005 Ом)	<b>1,67 · 10<sup>-3</sup> Ом</b>	<b>1,67 · 10<sup>-3</sup></b>
Нестабильность эталонного ТС за межповерочный интервал (изменение сопротивления ± 0,05 °С при 0,01 °С за межповерочный интервал)	<b>2,89 · 10<sup>-2</sup> °С</b>	<b>5,78 · 10<sup>-2</sup></b>
Суммарная коррелированная неопределенность	—	<b>0,07031</b>
Суммарная некоррелированная неопределенность	—	0,01167
Суммарная неопределенность	—	0,07127

ти ( $\rho_{i,j} = 1$ ), отдельно рассчитать их вклад в  $u_c^2(t)$ , затем сложить. Для некоррелированных неопределенностей второй член выражения (1) исчезает.

Оценим расхождение между функциями распространения стандартных неопределенностей на интервал температур, рассчитанными без учета и с учетом корреляции неопределенностей в точках градуировки.

Формула для расчета  $u_c(t)$  без учета корреляции имеет вид

$$u_c^2(t) = (\partial R / \partial R_1)^2 u_1^2 + (\partial R / \partial R_2)^2 u_2^2 + (\partial R / \partial R_3)^2 u_3^2, \quad (2)$$

где  $R = R(t, t_1, t_2, t_3, R_1, R_2, R_3)$ .

Формула для вычисления  $u_c(t)$  с учетом корреляции состоит из двух частей: первая аналогична (2), вторая содержит дополнительные члены, учитывающие корреляцию сопротивлений:

$$u_c^2(t) = \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2 u_{n1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2 u_{n2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3}\right)^2 u_{n3}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_1}\right)^2 u_{k1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_2}\right)^2 u_{k2}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial R_3}\right)^2 u_{k3}^2 + 2 \left[ \frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_2} u_{k1} u_{k2} + \frac{\partial R}{\partial R_1} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k1} u_{k3} + \frac{\partial R}{\partial R_2} \frac{\partial R}{\partial R_3} u_{k2} u_{k3} \right], \quad (3)$$

где  $u_{n1}, u_{n2}, u_{n3}, u_{k1}, u_{k2}, u_{k3}$  — суммарные некоррелированные и коррелированные стандартные неопределенности измерения сопротивлений в точках градуировки.

Функция  $u_c(t)$  была рассчитана по (2) и (3) и графически представлена на рис. 1, откуда, с одной стороны, следует однозначный вывод о сильном влиянии корреляции неопределенностей поверки ТС в точках градуировки на неопределенность измерений температуры в интервале между точками. С другой стороны, данный график подтверждает возможность применения простой линейной интерполяции для определения распространения неопределенности на интервал температур, что также является важным и находит применение на практике. Однако линейная модель близка к реальности только при сильной корреляции измеренных сопротивлений, если суммарные коррелированные неопределенности намного превышают суммарные некоррелированные неопределенности. Если коррелированные и некоррелированные части равны, то сглаживания кривой не происходит, что можно видеть на рис. 2, на котором представлена теоретическая модель для неопределенностей, равных между собой и значению 0,01 Ом.

**Учет корреляции при измерении разности температур.**

Рассмотрим наиболее распространенный случай, когда два термометра для измерения разности температур градуируются в одних и тех же термостатах с использованием одних и тех же измерительного моста и образцового термометра. Корреляция градуировочных значений в этом случае очевидна. Оценим, как она влияет на суммарную неопределенность измеренной разности температур. Функция этой разности имеет вид

$$U(r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3, t) = R(R_1, R_2, R_3, T) - R(r_1, r_2, r_3, t), \quad (4)$$

где  $r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3$  — градуировочные сопротивления «холодного» и «горячего» термометров.

Суммарные стандартные неопределенности сопротивлений для обоих термометров примем равными  $u_1, u_2, u_3$

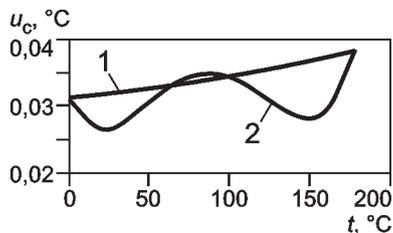


Рис. 1. Неопределенность измерения температуры в интервале с учетом и без учета корреляции — кривые 1, 2, соответственно

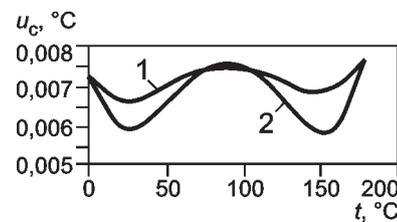


Рис. 2. Неопределенность измерения температуры в интервале при равных 0,01 Ом коррелированных и некоррелированных суммарных стандартных неопределенностях во всех градуировочных точках; 1, 2 — те же, что на рис. 1

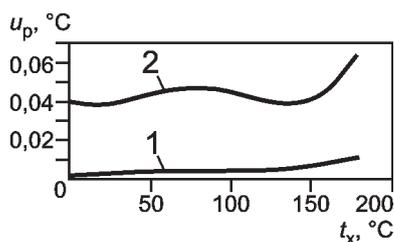


Рис. 3. Неопределенность измерения разности температур двумя термометрами в зависимости от температуры «холодного» ТС; 1, 2 — те же, что на рис. 1, 2

с коррелированными и некоррелированными суммарными неопределенностями, приведенными в табл. 1—3. Применим закон распространения неопределенности (1) к формуле (4), разделив коррелированные и некоррелированные неопределенности и учтя коэффициенты корреляции, равные 1, также между

сопротивлениями, измеренными двумя ТС во всех точках градуировки:

$$u_{\Delta}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_{r_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial R_j} u_{ki} u_{kj} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial U}{\partial r_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ki} u_{kj} + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N \frac{\partial U}{\partial R_i} \frac{\partial U}{\partial r_j} u_{ki} u_{kj},$$

(5)

где \$N = 3\$ — количество точек градуировки; \$u\_i\$ — суммарные неопределенности сопротивлений в точках градуировки; \$u\_{ki}\$, \$u\_{kj}\$ — коррелированные суммарные неопределенности сопротивлений в указанных точках.

Формула (5) является наиболее точным выражением зависимости неопределенности разности температур от измеряемой температуры. Чаще всего используют ее упрощения, связанные либо с игнорированием корреляции, либо с полным устранением коррелированных неопределенностей. Сравним эти упрощенные выражения для выяснения их правомерности.

Неучет корреляции неопределенности приводит к равенству

$$u_{\Delta 1}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_{r_i}^2,$$

(6)

а исключение коррелированных неопределенностей — к выражению

$$u_{\Delta 1}^2(t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial R_i} \right)^2 u_{ni}^2 + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial r_i} \right)^2 u_{ni}^2.$$

(7)

Для анализа расхождения формул (5) и (6) были выбраны две реальные градуировочные функции (рис. 3) двух термометров пленочного типа сопротивлением 500 Ом в точках 0, 100, 180 °С. Температура «холодного» ТС изменялась

от 0 до 160 °С, температура «горячего» всегда была выше на 20 °С. Из рис. 3 следует, что учет корреляции приводит к существенному снижению неопределенности измерения разности температур. Этот вывод очень важен при проведении оценки неопределенностей поверки комплектов термометров для измерения разности температур, используемых в теплосчетчиках.

Таким образом, если не учитывать коррелированные стандартные неопределенности (см. (7)), то даже для разности температур «холодного» и «горячего» термометра расхождение экспериментальных и рассчитанных по (5) данных составит менее 1 мК, что очень мало для данной измерительной задачи.

Выводы из приведенного выше анализа оптимистичны для поверителей и потребителей ТС для измерения разности температур. Поскольку расхождение между точным расчетом неопределенности разности в интервале температур очень мало по сравнению с абсолютным значением неопределенности, можно с успехом применять упрощенный вариант формулы (7), т. е. просто складывать некоррелированные неопределенности двух термометров для каждой градуировочной точки и проводить линейную интерполяцию между ними.

В рассмотренном примере для бюджета неопределенности градуировки каждого ТС (см. табл. 1—3) неопределенность разности температур в диапазоне 0—160 °С будет соответствовать нижней кривой на рис. 3. Еще раз отметим, что неопределенность этой разности не превышает 0,01 °С, в то время как суммарные неопределенности в градуировочных точках достигают 0,038 °С. Таким образом, учет корреляции при измерении разности температур является обязательным.

Сделана попытка теоретического обоснования двух важных моментов процедуры оценки неопределенности измерения температуры в рабочем диапазоне термометра из-за неопределенностей поверки в градуировочных точках. Установлено, что в случае превышения суммарных коррелированных неопределенностей над некоррелированными можно использовать линейную интерполяцию для получения неопределенностей ТС в диапазоне. Если в выражении для неопределенности разности температур, измеренной двумя термометрами, градуированными с помощью одной и той же аппаратуры, учесть корреляцию, это снизит суммарную неопределенность разности в несколько раз.

#### Л и т е р а т у р а

1. **ГОСТ Р 8.624—2006.** ГСИ. Термометры сопротивления из платины, меди и никеля. Методика поверки.
2. **Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement.** 1st ed. Geneva, Switzerland: ISO, 1993; **Руководство** по выражению неопределенности измерения. СПб: ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1999.

Дата принятия 05.04.2010 г.