

В ходе первичной аттестации были определены следующие составляющие бюджета неопределенности ВЭ-13—13:

НСП первичного эталона ГЭТ 49—80 по типу В . . . . .  $0,3 \cdot 10^{-2}$   
погрешность из-за неравномерности распределения  
давления в измерительной камере по типу В . . . . .  $0,15 \cdot 10^{-2}$   
погрешность, связанная с нестационарностью  
режима течения, по типу В . . . . .  $0,1 \cdot 10^{-2}$   
СКО по типу А . . . . .  $(1,4 \cdot 10^{-3}—3,7) \cdot 10^{-3}$   
Стандартная неопределенность [5, 6]:  
по типу А . . . . .  $(1,4—3,7) \cdot 10^{-3}$   
по типу В . . . . .  $2 \cdot 10^{-3}$   
Суммарная стандартная неопределенность . . . . .  $(2,4—4,2) \cdot 10^{-3}$   
Расширенная неопределенность  
( $k = 2$ ,  $P = 0,95$ ) . . . . .  $(4,8—8,4) \cdot 10^{-3}$

Результаты аттестации ВЭ-13—13 подтвердили его высокие метрологические характеристики, что создало условия для дальнейших исследований по совершенствованию и достижению предельных возможностей описываемого эталона давления, в частности, расширения диапазона хранения, воспроизведения и передачи единицы низкого абсолютного давления до  $1 \cdot 10^{-5}$  Па и уменьшения его погрешности.

Таким образом, новый вторичный эталон в области низкого абсолютного давления, созданный на основе новейших отечественных и зарубежных разработок, по техническим и

метрологическим характеристикам занимает достойное место в государственной системе обеспечения единства измерений.

## Литература

1. Горобей В. Н., Николаев Н. Г., Фомин Д. М., Чернышенко А. А. Установки вакуумметрические эталонные // Главный метролог. 2011. № 3. С. 42—44.
2. ГОСТ 8.381—2009. ГСИ. Эталоны. Способы выражения точности.
3. ГОСТ Р 8.736—2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.
4. Маринко С. В., Талалай А. В., Бойко И. Г., Викторко Ю. Т., Неворотин И. В. Новые вторичные эталоны единицы давления // Вестник метролога. 2013. № 1. С. 25—28.
5. РМГ 43—2001. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений».
6. Р. 50.2.038—2004. ГСИ. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результатов измерений.

Дата принятия 21.10.2013 г.

## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МЕТРОЛОГИИ И ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

53.083.91

# Выбор шкалы измерений при оценке соответствия вертикальной скорости приземления самолета установленным требованиям

Л. Н. АЛЕКСАНДРОВСКАЯ<sup>1</sup>, А. В. КИРИЛЛИН<sup>1</sup>, О. М. РОЗЕНТАЛЬ<sup>2</sup>,  
П. А. ИОСИФОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского (МАТИ), Москва, Россия, e-mail: kirillinav@mati.ru

<sup>2</sup> Институт водных проблем РАН, Москва, Россия

Предложена схема корректного анализа результатов измерений в концепции приемлемого риска. На примере измерений точностных характеристик автоматической посадки самолета дано сравнение трех основных методов оценивания вероятности нахождения измеряемой характеристики (непараметрического и параметрического доверительного интервалов и отдельного подтверждения требований к математическому ожиданию и дисперсии) в допуске при использовании различных шкал. Приведены рекомендации по применению предложенных методов и необходимому объему измерений.

**Ключевые слова:** показатель безопасности, приемлемый риск, доверительный интервал, шкала измерений.

The scheme of correct analysis of measurement results in the concept of acceptable risk is proposed. By the example of measurement of accuracy characteristics of airplane automatic landing the comparison of the three basic methods of estimating the probability of measurement characteristic in tolerance during use of different measurement scales. These methods are the non-parametric and parametric tolerance interval and separate confirmation of requirements to mathematical expectation and variance. The recommendations for proposed methods application and for the needed volume of measurements are presented.

**Key words:** safety index, acceptable risk, tolerance interval, scale of measurement.

Теория и практика метрологического обеспечения соответствия контролируемых показателей установленным требованиям часто опирается на концепцию абсолютной безо-

пасности. Между тем, из-за погрешностей измерений, а также их недостаточно репрезентативной выборки необходимо перейти к концепции приемлемого риска, обусловлен-

ного вероятностной природой контролируемых показателей [1]. Оценка риска при установлении соответствия результатов измерений нормативным требованиям рассмотрена ниже на примере обработки инструментальных данных, характеризующих скорость сближения самолета с землей при посадке — сложного маневра, на котором резко возрастают перегрузки, риск аварии и даже гибели экипажа [2].

Условием безопасного приземления является верификация вертикальной составляющей скорости, достоверность результатов измерений которой снижается, поскольку обычно она не превышает 0,5 % полной скорости самолета [2, 3]. В этом случае соответствие измеряемой величины допустимому нормативу можно оценить путем сравнения результата каждого единичного измерения с последним (допусковой контроль) или оценкой по результатам измерений среднего значения контролируемого показателя и его сопоставления с допуском.

В рамках концепции приемлемого риска корректна следующая вероятностная форма задания требований к искомому показателю безопасности (ПБ) при его ограничении сверху (ПБ<sub>доп</sub>):

$$P\{PБ \leq PБ_{доп}\} \geq R_3,$$

где  $R_3$  — заданное значение вероятности;  $(1 - R_3)$  — приемлемый риск.

Задание требований в виде ПБ  $\leq PБ_{доп}$  без указания погрешности измерений соответствует концепции абсолютной безопасности, а с указанием погрешности — нелинейной шкале измерений, что также некорректно, и не позволяет учесть (при необходимости) нерепрезентативность данных. Поэтому для метрологического обеспечения проверки соответствия (несоответствия) измеренного показателя нормативу необходимо следовать правилу, которое основано на контроле выполнения условия, определяющего так называемый толерантный интервал. Например, при ограничении сверху

$$P\left\{\int_A^B f(x)dx \geq R_3\right\} = \gamma, \quad (1)$$

где  $f(x)$  — плотность распределения вероятности измеряемого ПБ  $x$ ;  $\gamma$  — доверительная вероятность.

Различают непараметрические и параметрические толерантные интервалы.

**Непараметрический толерантный интервал.** Если  $A = x_{(l)}$ ,  $B = x_{(s)}$ , где  $x_{(l)}$ ,  $x_{(s)}$  — порядковые статистики, то интеграл (1) не зависит от  $f(x)$  и можно перейти к непараметрическому толерантному интервалу [4]:

$$P\{P(x_{(s)}) - P(x_{(l)}) \geq R_3\} = \gamma,$$

основанному на использовании биномиального распределения.

Дискретное биномиальное распределение описывает результаты измерений контролируемого показателя в номинальной шкале: 1 (в допуске), 0 (вне допуска). Эта шкала в метрологической терминологии самая простая, а результаты, полученные при обработке данных измерений, наименее точные.

Минимально необходимой информацией для выборочной оценки вероятности  $R$  (или оценки приемлемого риска

$1-R$ ) этим методом служит число событий пребывания измеряемого ПБ в допуске  $m$  или выхода за его границы  $d = n - m$ . При единичном измерении этот показатель будет находиться в допуске с вероятностью  $R$ , а вне поля допуска — с вероятностью  $(1-R)$ . При проведении  $n$  независимых измерений имеем соответственно  $R^n(1-R)^{n-m}$  или  $R^{n-d}(1-R)^d$ .

Учитывая, что  $d$  случаев нарушения установленной скорости снижения самолета среди  $n$  летных испытаний могут реализоваться различными способами, приходим к биномиальному распределению вероятности получения  $d$  отказов при  $n$  измерениях с постоянной вероятностью  $R$ :

$$p(d/n, R) = \frac{n!}{d!(n-d)!} R^{n-d} (1-R)^d.$$

При проведении выборочных исследований наблюдаемое число  $\hat{d}$  — случайная величина, на основе которой можно построить интервальную оценку  $[R_n, R_b]$  исследуемой вероятности  $R$ , где  $R_n$ ,  $R_b$  — соответственно нижняя и верхняя доверительные границы. Процедура нахождения доверительных границ — общая для всех экспериментальных оценок: необходимо определить такие значения  $R_n$ ,  $R_b$ , при которых вероятности нахождения случайной величины  $d$ , меньшие или большие наблюдаемой статистики  $\hat{d}$ , будут малыми величинами.

Таким образом, выполняются условия:  $P\{d \leq \hat{d}\} = 1 - \gamma_2$ ;

$P\{d \geq \hat{d}\} = 1 - \gamma_1$ , где  $\gamma_1 + \gamma_2 - 1 = \gamma$  — доверительная вероятность. В общем случае  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ , так как биномиальное распределение несимметрично, однако часто принимают  $\gamma_1 = \gamma_2 = (1 - \gamma)/2$ .

Вероятность  $P\{d \leq \hat{d}\}$  определяется интегральным законом биномиального распределения, т. е. должно выполняться условие

$$\sum_{r=0}^{\hat{d}} \frac{n!}{r!(n-r)!} R_n^{n-r} (1-R_n)^r = 1 - \gamma_2.$$

Принимая во внимание, что для дискретного распределения  $P\{r \leq d\} + P\{r \geq d+1\} = 1$ , получаем:  $P\{d \geq \hat{d}\} = 1 - P\{d \leq \hat{d}-1\} = 1 - \gamma_1$ , откуда  $P\{d \leq \hat{d}-1\} = \gamma_1$  или

$\sum_{r=0}^{\hat{d}-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} R_b^{n-r} (1-R_b)^r = \gamma_1$ . При изменении значений непрерывной случайной величины  $R$  от  $R_n$  до  $R_b$  можно добиться выполнения этих равенств для фиксированных  $n$ ,  $\hat{d}$ . В результате для интервальной оценки  $\hat{R} = 1 - \hat{d}/n$  приходим к известным уравнениям Клоппера—Пирсона

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^{\hat{d}} \frac{n!}{r!(n-r)!} R_n^{n-r} (1-R_n)^r &= 1 - \gamma_2; \\ \sum_{r=0}^{\hat{d}-1} \frac{n!}{r!(n-r)!} R_b^{n-r} (1-R_b)^r &= \gamma_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

используемых в дальнейшем для построения процедур оценки соответствия.

Относительно оцениваемого неизвестного значения  $R$  можно сформировать гипотезы, представленные в табл. 1.

Гипотезы, сформулированные относительно оцениваемого неизвестного значения  $R$ 

| Вариант | Нулевая гипотеза<br>$H_0$ | Альтернативная гипотеза $H_1$ | Решающее правило принятия |             | Ошибки                 |                       |
|---------|---------------------------|-------------------------------|---------------------------|-------------|------------------------|-----------------------|
|         |                           |                               | $H'_0$                    | $H'_1$      | $P\{H'_0/H_0\}=\alpha$ | $P\{H'_0/H_1\}=\beta$ |
| I       | $R \leq R_3$              | $R > R_3$                     | $R_H \leq R_3$            | $R_H > R_3$ | $1 - \gamma_2$         | $\gamma_2$            |
| II      | $R \geq R_3$              | $R < R_3$                     | $R_B \geq R_3$            | $R_B < R_3$ | $1 - \gamma_1$         | $\gamma_1$            |

Для односторонних решающих правил принимается либо  $\gamma_1 = 1$  для  $R_H$ , либо  $\gamma_2 = 1$  для  $R_B$ .

Выбор нулевой  $H_0$  гипотезы имеет важное значение. Так, в случае варианта I (гипотезы «недоверия») и выполнении условия  $R_H > R_3$  вероятность ошибки 1-го рода  $\alpha$  (т. е. вероятность  $R \leq R_3$ ) мала. Однако из первого уравнения системы (2) следует, что при подстановке  $R_H = R_3$  вероятность получить комбинацию  $(n, \hat{d})$ , необходимую для выполнения условия  $R_H > R_3$ , также мала, т. е. будет признано несоответствие контролируемого показателя нормативу. Чтобы иметь высокую вероятность требуемой комбинации  $(n, \hat{d})$ , нужно при фиксированном  $n$  либо располагать «запасом», типа  $R_1 \gg R_3$ , либо допускать большее число нарушений требований к контролируемому показателю (скорости снижения самолета).

**Пример 1.** Оценим число измерений, необходимых для гарантированно безопасного приземления транспортного самолета, если риск превышения вертикальной составляющей скорости движения на этом этапе не больше 1 % при доверительной вероятности  $\gamma = 0,9$ . Проверим при приведенных условиях нулевую гипотезу  $R \leq R_3$  нарушения установленных требований.

В данном случае  $R_3 = 1 - 0,01 = 0,99$ . Тогда при  $\hat{d}=0$ , используя одностороннее решающее правило, из уравнений Клоппера — Пирсона (2) находим условие  $R_3^n = 1 - \gamma$ , откуда  $n=230$ . Однако при столь большом числе измерений выборка с отсутствием отказов возможна примерно в одном случае из десяти ( $1 - \gamma = 0,1$ ). Получить же  $\hat{d}=0$  с высокой вероятностью (например 0,9) можно из условия  $R_1^n = \gamma$  (для верхней доверительной границы при  $\hat{d}=1$ ), в результате  $R_1=0,9995$ . Таких «запасов» по вероятности на практике достичь трудно, следовательно, нужно допустить большее число случаев принятия решений о нарушении норматива.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены для гипотезы варианта II (гипотезы «доверия»). При выполнении условия  $R_B < R_3$  вероятность ошибки 1-го рода  $\alpha$  (т. е. вероятность  $R \geq R_3$ ) также мала, однако из второго уравнения системы (2) следует, что при подстановке  $R_B = R_3$  вероятность получить комбинацию  $(n, \hat{d}-1)$  велика, откуда следует, что при наблюдении повышенного числа несоответствий  $(\hat{d}-1)$  с большой вероятностью будет принята нулевая  $H_0$  гипотеза и, следовательно, результат испытаний не будет отрицательным. Для признания несоответствия необходим «недобор» по вероятности  $R_{II} \ll R_3$  либо большее число

наблюдаемых несоответствий. Заметим, что для гипотез «доверия» и «недоверия» ошибки 1-го и 2-го рода имеют разный смысл. Для гипотезы «доверия»  $\alpha$  — вероятность  $R \leq R_3$  при принятии решения  $R > R_3$  (признание соответствия контролируемого показателя установленным требованиям);  $\beta$  — вероятность  $R > R_3$  при принятии решения  $R \leq R_3$ . Для гипотезы «недоверия»  $\alpha$  — это вероятность  $R \geq R_3$  при решении  $R < R_3$  (признание несоответствия),  $\beta$  — вероятность  $R < R_3$  при решении  $R \geq R_3$ .

**Пример 2.** Пусть опять риск превышения вертикальной составляющей скорости самолета при приземлении не превышает 1 %, т. е.  $R_3 = 0,99$ ,  $\gamma = 0,9$ . Проверим нулевую гипотезу  $R \geq R_3$  выполнения установленных требований.

Используя одностороннее решающее правило, из уравнений (2) при  $\hat{d}=0$  находим условие  $R_B \equiv 1$ , т. е. всегда принимается нулевая гипотеза  $R \geq R_3$ . При  $\hat{d}=1$  и  $R_B = R_3$  получим условие  $R_3^n = \gamma$ , откуда  $n=10$ . Для такого объема испытаний гипотеза  $R < R_3$  будет принята либо при повышенном числе нарушений установленных требований, либо при  $R_{II} \ll R_3$ , где  $R_{II}$  определяется из соотношения  $R_{II}^n = 1 - \gamma$  (вы-

ражение для нижней доверительной границы при  $\hat{d}=0$ ), откуда  $R_{II} = 0,811$ , что существенно меньше  $R_3 = 0,99$ . Такой «недобор» вероятности также недопустим.

Таким образом, если истинное значение исследуемой вероятности  $R$  близко к заданному значению  $R_3$ , то по результатам измерений не будет принято решение ни о соответствии, ни о несоответствии искомой скорости установленным требованиям.

В заключение рассмотрения данного метода заметим, что измерения здесь выполняются по простейшей номинальной шкале. При этом фиксируется лишь число выходов за границы допуска и не учитывается удаленность результатов измерений от границ допуска, что, несомненно, является важной информацией. Переход к более «сильной» шкале отношений позволит учесть такую информацию и сократить необходимое число измерений.

**Параметрический толерантный интервал.** Если известен закон распределения исследуемой характеристики  $x$ , то соблюдение требований к вероятности ее нахождения в допуске подтверждается аналитически без выполнения специальных измерений. Так, при одностороннем допуске  $P\{x \leq x_{\text{доп}}\} > R_3$  и нормальном законе распределения характеристики  $x \sim N(m, \sigma^2)$  для признания соответствия существует решающее правило  $m + U_{R_3} \sigma < x_{\text{доп}}$ , где  $U_{R_3}$  — квантиль стандартного нормального распределения с нулевым

математическим ожиданием и единичной дисперсией;  $x_{\text{доп}}$  — допустимое значение характеристики.

Однако при выполнении измерений количественные значения параметров  $m$ ,  $\sigma^2$  неизвестны и их оценивают при обработке результатов измерений:  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ;  
 $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$ .

Для получения решающих правил признания и отрицания соответствия контролируемого показателя установленному требованию необходимо знать распределение случайной величины  $\hat{z} = \bar{X} + kS$ , где коэффициент  $k \neq U_{R_3}$  и учитывает отличие статистических оценок от истинных значений оцениваемых параметров.

В [5] показано, что случайная величина  $k = (x_{\text{доп}} - \bar{X}) / S$  при  $n \geq 5$  приблизительно нормальна с математическим ожиданием  $M[k] = U_R$  и дисперсией  $D[k] = \frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}$ . Таким образом можно построить двухсторонние

$$k_H = U_R - U_{1-\gamma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}}; k_B = U_R + U_{1-\gamma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}}$$

или односторонние доверительные границы

$$k_H = U_R + U_{1-\gamma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}}; k_B = U_R + U_{\gamma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}}.$$

При подстановке  $U_R = U_{R_3}$  получим значения коэффициента, определяющего толерантный интервал для признания соответствия или несоответствия контролируемого показателя установленным требованиям:

$$\bar{X} + k_B S \leq x_{\text{доп}}; \bar{X} + k_H S \geq x_{\text{доп}}.$$

Для  $R_3 = 0,99$ ,  $\gamma = 0,9$ ,  $U_{R_3} = 2,327$  находим, что коэффициент  $k_B$  меняется от 4,6 при  $n = 5$  до 2,4 при  $n = 1000$ , а коэффициент  $k_H$  от 1,25 до 2,26 при тех же  $n$ .

**Пример 3.** Сравним число измерений, необходимых для обеспечения достоверной оценки соответствия (несоответствия) скорости приземления самолета установленным требованиям непараметрическим и параметрическим методами при условиях примера 1.

Рассчитаем «запасы» вероятности выполнения задачи при числе летных испытаний  $n = 230$  (см. пример 1) и получим  $R = 0,995$  при признании соответствия и  $R = 0,986$  при его отрицании. В этом случае «запасы» оказываются существенно меньше или достигаются при следующих объемах эквивалентных биномиальных испытаний:  $d = 0$ ,  $n = 35$  при признании соответствия и  $d = 1$ ,  $n = 16$  при его отрицании.

Значения толерантных множителей  $k_B$  табулированы [6]. Необходимый объем измерений можно рассчитать исходя из допустимого отклонения  $k$  от предельного значения  $U_{R_3}$ . Результаты расчетов, приведенные в табл. 2, показывают, что с ростом  $R_3$  относительное значение этого отклонения уменьшается, что объясняется снижением скорости изменения интегральной функции распределения в области больших вероятностей.

Заметим, что необходимый объем измерений определяется только точностью оценок  $\bar{X}$ ,  $S^2$  и незначительно возрастает с увеличением  $R_3$ , что позволяет рекомендовать использование параметрического толерантного интервала для подтверждения требований к безопасности при нормальном законе распределения исследуемых характеристик.

Таким образом, преимущества параметрического подхода растут с увеличением требуемой вероятности выполнения задачи. В случае признания соответствия при  $R_3 = 0,95$ ,  $\gamma = 0,9$  имеем  $d = 0$ ,  $n_{H,n} = 46$  для непараметрического метода и  $n_n = 14$  для параметрического, т. е.  $n_{H,n}/n_n = 3,3$ . Если же  $R_3 = 0,99$ ,  $\gamma = 0,9$ , то  $d = 0$ ,  $n_{H,n} = 230$ ,  $n_n = 35$  соответственно для непараметрического и параметрического методов, т. е.  $n_{H,n}/n_n = 6,8$ . Следовательно, параметрический метод оценки соответствия позволяет сократить необходимый объем измерений. К сожалению, хотя этот метод регламентирован стандартом ISO 16269-6:2014 [7] он пока не нашел широкого применения.

Таблица 2

Значения относительного отклонения  $Q = (k_B - U_{R_3}) / U_{R_3}$  при различных  $R_3$ ,  $\gamma = 0,95$

| $n$      | $R_3 = 0,95$ |               |       | $R_3 = 0,99$ |               |       | $R_3 = 0,999$ |               |       |
|----------|--------------|---------------|-------|--------------|---------------|-------|---------------|---------------|-------|
|          | $n$          | $k - U_{R_3}$ | $Q$   | $k$          | $k - U_{R_3}$ | $Q$   | $k$           | $k - U_{R_3}$ | $Q$   |
| 5        | 4,209        | 2,564         | 1,55  | 5,746        | 3,42          | 1,47  | 6,112         | 3,012         | 0,971 |
| 10       | 2,911        | 1,266         | 0,769 | 3,981        | 1,655         | 0,707 | 4,629         | 1,529         | 0,493 |
| 20       | 2,396        | 0,751         | 0,456 | 3,294        | 0,968         | 0,416 | 4,009         | 0,909         | 0,319 |
| 50       | 2,065        | 0,42          | 0,255 | 2,862        | 0,536         | 0,23  | 3,604         | 0,504         | 0,162 |
| 100      | 1,927        | 0,282         | 0,171 | 2,684        | 0,358         | 0,153 | 3,426         | 0,326         | 0,105 |
| 500      | 1,763        | 0,118         | 0,071 | 2,475        | 0,149         | 0,064 | 3,232         | 0,132         | 0,042 |
| 1000     | 1,727        | 0,082         | 0,049 | 2,430        | 0,104         | 0,044 | 3,189         | 0,089         | 0,028 |
| $\infty$ | 1,645        | 0             | 0     | 2,326        | 0             | 0     | 3,1           | 0             | 0     |

**Раздельные подтверждения требований.** Часто требования к математическому ожиданию и дисперсии задаются отдельно:  $m = m_3$ ,  $\sigma^2 = \sigma_3^2$ . При этом задача проверки статистических гипотез становится двухмерной, что означает применение доверительной вероятности в соответствии с правилом  $\gamma_{\text{общ}} = \gamma_1 \gamma_2$ . Поэтому  $\gamma_{\text{общ}} = 0,9$  можно получить при  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,95$ . Тогда проверку статистической гипотезы  $m = m_3$  осуществляем по решающему правилу [5]:

$$\sqrt{n}|\bar{X} - m_3|/S \leq t_{1-\frac{\alpha_1}{2}}(n-1), \quad (3)$$

где  $t_{1-\frac{\alpha_1}{2}}(n-1)$  — квантиль распределения Стьюдента с  $(n-1)$  степенями свободы;  $\alpha_1 = 1 - \gamma_1$ .

Статистическая гипотеза  $\sigma^2 = \sigma_3^2$  проверяется по решающему правилу

$$S^2(n-1)/\sigma_3^2 \leq \chi_{1-\alpha_2}^2(n-1) \quad (4)$$

в предположении  $S^2 > \sigma_3^2$ , где  $\chi_{1-\alpha_2}^2(n-1)$  — квантиль  $\chi^2$ -распределения Пирсона с  $(n-1)$  степенями свободы.

Для расчета необходимого объема выборок формируем альтернативные гипотезы  $m = m_3 + \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\sigma^2 = \delta_2 \sigma_3^2$ ,  $\delta_2 > 1$

в предположении  $\bar{X} > m_3$ . Тогда, заменяя в (3), (4) неравенства на равенства (граничные значения) и учитывая одно-сторонность решающих правил, получаем для математического ожидания

$$\sqrt{n}(\bar{X} - m_3 - \delta_1)/S = t_{\beta_1}; \quad \sqrt{n}(\bar{X} - m_3)/S = t_{1-\alpha_1}(\sqrt{n} \delta_1/\sigma),$$

где  $\alpha_1 = 1 - \gamma_1$ ,  $\beta_1$  — соответственно вероятности ошибки 1-го и 2-го рода;  $t_{1-\alpha_1}(\sqrt{n} \delta_1/\sigma)$  — квантиль нецентрального  $t$ -рас-

пределения с параметром нецентральности  $\sqrt{n} \delta_1/\sigma$ .

Используя нормальную аппроксимацию нецентрального  $t$ -распределения, найдем

$$\delta_1/\sigma = \left\{ t_{1-\alpha_1} - U_{\beta_1} \sqrt{1 + t_{1-\alpha}^2/[2(n-1)]} \right\} / \sqrt{n},$$

а при  $n > 50$  можно использовать упрощенную формулу:  $\delta_1/\sigma = (U_{1-\alpha_1} - U_{\beta_1})/\sqrt{n}$ .

Для дисперсии имеем  $S^2(n-1)/\sigma_3^2 = \chi_{1-\alpha_2}^2(n-1)$ ;

$$S^2(n-1)/(\delta_2 \sigma_3^2) = \chi_{\beta_2}^2(n-1), \text{ откуда } \delta_2 = \chi_{1-\alpha_2}^2/\chi_{\beta_2}^2.$$

Переход к вероятности  $R_1$ , например, при признании соответствия осуществляется по формуле

$$R_3 = \Phi\left[(x_{\text{доп}} - m_3 - \delta_1)/(\sqrt{\delta_2} \sigma_3)\right],$$

где  $\Phi[(x_{\text{доп}} - m_3)/\sigma_3] = R_1 > R_3$ , — функция стандартного нормального распределения.

**Пример 4.** Сравним метод раздельного подтверждения требований с параметрическим толерантным интервалом

при  $R_3 = 0,99$ ,  $\gamma = 0,9$ . Использование алгоритма приводит к следующим результатам. При признании соответствия параметрический толерантный интервал дает  $n = 35$ , а раздельное подтверждение требований —  $n = 65$ ; при отрицании соответствия  $n = 16$ , а в случае раздельного подтверждения требований —  $n = 25$ .

**Пример 5.** Рассмотрим достоверность оценки соответствия (несоответствия) вертикальной составляющей скорости снижения самолета при приземлении, если по результатам шестидесяти испытаний получено  $\bar{X} = 0,8$  м/с,  $S = 0,4$  м/с. Сопоставим эффективность предложенных методов оценки.

Рассчитаем, какое максимально допустимое значение подтверждается с приемлемым риском  $0,05$  ( $R_3 = 0,95$ ,  $U_{R_3} = 1,645$ ) и  $\gamma = 0,9$ . Без учета объема выборки  $x_{\text{max}} = \bar{X} + U_{R_3} S = 0,8 + 1,645 \cdot 0,4 = 1,458$  м/с. С использованием параметрического толерантного интервала  $k$  ( $R_3 = 0,95$ ,  $\gamma = 0,9$ ,  $n = 60$ ) =  $1,933$ ; оценка  $x_{\text{max}} = \bar{X} + kS = 0,8 + 1,933 \cdot 0,4 = 1,573$  м/с.

При допустимом значении вертикальной скорости  $x_{\text{доп}} = 1,6$  м/с и  $x_{\text{max}} = 1,7$  м/с имеется один отказ: для подтверждения требований непараметрическим методом недостаточно объема выборки  $n = 60$  (необходимо  $n = 77$ ). Действительно, при  $n = 60$  и одном отказе нижняя 90 %-я доверительная граница, определенная из уравнений (2), составляет  $R_n = 0,9367$ , т. е. риск  $0,0633 > 0,05$ .

Раздельное оценивание математического ожидания и дисперсии дает

$$m \approx \bar{X} + \delta_1 S = 0,8 + \frac{2 \cdot 1,645}{\sqrt{60}} \cdot 0,4 = 0,97 \text{ м/с}, \quad \alpha_1 = \beta_1 = 0,05;$$

$$\sigma \approx \sqrt{\delta_2} S = \sqrt{\chi_{1-\alpha_2}^2/\chi_{\beta_2}^2} S = \sqrt{77,93/42,34} \cdot 0,4 = 0,54 \text{ м/с},$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = 0,05;$$

$$x_{\text{max}} = m + U_{R_3} \sigma = 0,97 + 1,645 \cdot 0,54 = 1,86 \text{ м/с}.$$

Получаем  $R_n = 0,88$  и риск увеличивается до  $0,12$ . Чтобы этот риск снизить, требования к математическому ожиданию и дисперсии надо ужесточить — понизить их оценки и в то же время удовлетворить условиям (3), (4). Например, пусть  $m_3 = 0,75$  м/с,  $\sigma_3 = 0,35$  м/с, тогда  $m = 0,75 + 0,15 = 0,9$  м/с,  $\sigma = 1,35 \cdot 0,35 = 0,47$  м/с и  $x_{\text{max}} = 0,9 + 1,645 + 0,47 = 1,673$  м/с и риск составляет  $0,07 > 0,05$ .

При раздельном оценивании допустимое значение вертикальной скорости также не подтверждается. Объем выборки  $n = 60$  не слишком большой, чтобы пренебречь статистическим разбросом оценок. И только в случае использования параметрического толерантного интервала  $U_{R_n} =$

$$= k - U_{\gamma} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{k^2}{2(n-1)}} = 1,71 \text{ при } k = (x_{\text{доп}} - \bar{X})/S = 2, \text{ откуда } R = 0,956 \text{ и риск } 0,0044 < 0,05.$$

**Выводы.** Наиболее эффективным является метод параметрического толерантного интервала, обеспечивающий достоверную оценку соответствия результатов измерений скорости приземления самолета установленным требованиям. Универсальным, основанным на наиболее простой

номинальной шкале измерений является метод непараметрического толерантного интервала, не требующий информации о законе распределения вероятностей исследуемого показателя. Однако за универсальность метода приходится расплачиваться большим объемом измерений. Метод раздельного подтверждения требований к математическому ожиданию и дисперсии измеряемого показателя простой и наглядный, по необходимому объему измерений он занимает промежуточное положение.

Метод использования параметрического толерантного интервала и метод раздельного подтверждения требований к математическому ожиданию и дисперсии основаны на предположении о нормальности закона распределения показателя безопасности, что обычно справедливо для приемлемых рисков порядка 0,01—0,05. Для меньших рисков возможны отклонения от нормальности, что приводит к необходимости проведения дополнительных исследований.

Статья подготовлена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания № 2014/93 (тема № 1636/14) в сфере научной деятельности.

## Литература

1. Крюков С. П., Бодрунов С. Д., Александровская Л. Н. и др. Методы анализа и оценивания рисков в задачах менеджмента безопасности сложных технических систем. СПб: Аэрокосмическое оборудование, 2007.
2. Кощеев А., Платонов А., Хабров А. Аэродинамика самолетов семейства ТУ-204/214. М.: Полигон-пресс, 2009.
3. **Авиационные правила.** Часть 25. Нормы летной годности самолетов транспортной категории. Межгосударственный авиационный комитет, 1994.
4. Дейвид Г. Порядковые статистики. М.: Наука, 1979.
5. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. М.: Мир, 1980.
6. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
7. **ISO 16269-6:2014.** Статистические методы. Статистическое представление данных. Определение статистических толерантных интервалов.

Дата принятия 16.09.2014 г.

## ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

612.317

### Совершенствование алгоритмов сжатия-восстановления сигналов для систем телеизмерений

Е. А. ЛОМТЕВ, М. Г. МЯСНИКОВА, Н. В. МЯСНИКОВА, Б. В. ЦЫПИН

Пензенский государственный университет,  
Пенза, Россия, e-mail: cypin@yandex.ru

Рассмотрено сжатие-восстановление сигналов на основе метода Прони в реальном времени, и показана трудоемкость вычислений и сложность реализации данного алгоритма. Описан подход к сжатию-восстановлению сигналов на основе комбинации метода Прони и разложения на знакопеременные составляющие.

**Ключевые слова:** сжатие, восстановление, метод Прони, декомпозиция на эмпирические моды, экстремальная фильтрация.

*It is shown that the main disadvantage of the Prony method at the single-frame compression-restoration of signals is the complexity of algorithm real time realization due to the labour content of calculations. The approach to compression-restoration of signals based on the combination of Prony method and decomposition on the sign-variable components is considered.*

**Key words:** compression, restoration, Prony method, decomposition on empirical modes, extreme filtering.

Характерная черта современных телеизмерительных систем — многоканальная система сбора информации с последующей одновременной передачей большого числа измеряемых величин по одному каналу связи. Такие системы передачи информации являются многоканальными. Количество каналов системы определяется числом независимых информационных входов. Структурная схема многоканальной измерительной системы представлена на рис. 1.

Контролируемые параметры  $P_1(t), \dots, P_N(t)$  с помощью датчиков  $D$  преобразуются в цифровые сигналы  $S_1, \dots, S_N$ . Блок сбора и обработки данных БСОД формирует пакеты данных  $p_1, \dots, p_N$  в соответствии с выходным интерфейсом. Пакеты данных  $p_j$  могут представлять сжатые сигналы  $S_j, j = 1, \dots, N$ , по которым можно восстановить цифровые сигналы с требуемой точностью.