

Обработка сигналов и анализ погрешности измерений электромагнитных параметров радиопоглощающих материалов во временной области

К. Ю. САХАРОВ, А. В. СУХОВ, В. А. ТУРКИН, О. В. МИХЕЕВ, А. И. АЛЕШКО

Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия, sukhov@vniiofi.ru

Предложена математическая модель обработки измерительной информации при определении коэффициентов отражения и пропускания радиопоглощающих материалов посредством зондирования сверхкороткими электромагнитными импульсами. Обосновано использование метода ядерного сглаживания для устранения влияния шумов измерительного оборудования, а также оконного преобразования Фурье для перехода в частотную область. Проведена оценка случайной и систематической погрешностей измерений.

Ключевые слова: сверхкороткий импульс, зондирование, радиопоглощающие материалы, отражение, пропускание.

A mathematical model for processing the measurement data in the course of determining the reflectance and transmittance of the radar absorbent material characterization, by the ultra-short pulse sounding, is proposed. A kernel smoothing, for the measuring instrument noise elimination, and the window Fourier transform, for transition to the frequency domain, are substantiated. The random and systematic errors are expressed.

Key words: ultra-short pulse, sounding, radar-absorbent, reflectance, transmittance.

Аппаратно-методический комплекс для определения электромагнитных характеристик радиопоглощающих материалов (РПМ) рассмотрен в [1—3], там же описан метод получения частотных характеристик коэффициентов отражения и пропускания РПМ как частного от деления амплитудных спектров рассеянного и зондирующего импульсов электромагнитного поля сверхкороткой (единицы—десятки пикосекунд) длительности. Аппаратная реализация метода включает излучающие сверхширокополосные антенны и генераторы импульсов напряжения с фронтами пикосекундной длительности для их возбуждения. В качестве приёмных антенн используются измерительные преобразователи на основе полосковой линии, имеющие ступенчатую переходную характеристику длительностью до 5 нс с временем нарастания до 10 пс.

Настоящая работа является продолжением выше упомянутых исследований. В первой её части описаны методы обработки зарегистрированных импульсных сигналов, а во второй — рассмотрен вопрос вычисления погрешности измерений.

Методы обработки сигналов. Сигналы на выходе измерительного преобразователя (ИП) регистрируются с помощью цифрового стробоскопического осциллографа. Будем считать, что в результате измерений получены две последовательности U_3 , U_p , соответствующие зондирующему (или отражённому от эталонной пластины) и рассеянному сигналам:

$$U_3 = (a_i)_{i=0}^{N-1}; U_p = (b_i)_{i=0}^{N-1}, \quad (1)$$

где a_i , b_i — элементы последовательности; N — количество элементов последовательности. Шаг по времени между элементами последовательности известен и составляет τ .

При регистрации сигналов оператором последовательности U_3 , U_p должны быть сформированы таким образом, чтобы по первым элементам можно было определить базовый уровень, от которого в дальнейшем будут вычислены амплитудные спектры. Установим, что число этих элементов должно составлять $N_0 \geq 20$.

Каждый элемент последовательностей U_3 , U_p имеет высокочастотную шумовую составляющую, вносящую вклад в результирующую погрешность. Для устранения шумовой составляющей можно применять известные методы и алгоритмы, например цифровой фильтр нижних частот, сглаживающий фильтр Савицкого—Голея, ядерное сглаживание и т. п. Необходимо найти оптимальный уровень фильтрации (или сглаживания), при котором амплитудно-временные параметры обработанного сигнала (длительность, длительность фронта, амплитуда) будут минимально отличаться от амплитудно-временных параметров исходного сигнала.

Покажем, что предпочтительным является метод ядерного сглаживания. Пусть существует последовательность, которую необходимо сгладить, так называемая обучающая выборка $U = (x_i, y_i)_{i=0}^{N-1}$ с элементами x_i , y_i . Тогда сглаженная оценка $f_c(x)$ определяется по формуле Надрая—Ватсона [4]:

$$f_c(x, U, h) = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} y_k K[(x - x_k)/h]}{\sum_{k=0}^{N-1} K[(x - x_k)/h]}, \quad (2)$$

где $K(z)$ — гладкая ограниченная невозрастающая функция (ядро сглаживания); x — аргумент сглаженной оценки (абсцисса); h — параметр, называемый шириной окна сглаживания.

На практике чаще всего используют следующие ядерные функции: ядро Гаусса, ядро Епанечникова и кватрическую (подробнее см. [4]). На степень сглаживания влияет ширина окна h . При малых значениях h функция f_c стремится пройти через все значения обучающей выборки, устранения шумовой составляющей не происходит. По мере увеличения ширины окна h функция f_c все более сглаживается, что приводит к удлинению фронта импульса, увеличению его длительности и уменьшению амплитуды. Оптимальная ширина окна сглаживания h определяется по принципу максимального правдоподобия с исключением по одному элементу из обучающей выборки [4]. Для этого вводится следующая функция:

$$s(h, U) = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ f_c[x_i, U \setminus (x_i, y_i), h] - y_i \right\}^2, \quad (3)$$

где $U(x_i, y_i)$ — обучающая последовательность с исключённым элементом (x_i, y_i) ($\setminus$ — разность множеств). Значение h , соответствующее минимуму функции $s(h, U)$, является оптимальным. Диапазон, в котором варьируется h , выбирается эмпирически (например, 0,1—10).

На рис. 1 представлен выбор оптимальной ширины сглаживания для некоторого модельного импульсного сигнала (i — номер отсчёта). При ширине окна $h = 1$; 2 шумовые составляющие не устраняются, а при $h = 20$ заметно искажается форма импульса. Минимум функции $s(h, U)$ соответствует ширине окна $h = 5,4$, что является в данном случае оптимальным значением (расчёты проводили с ядром сглаживания Гаусса).

Значения первых и последних элементов последовательностей U_3, U_p определяют некоторый базовый уровень, от которого производятся вычисления. Так как коэффициенты отражения и пропускания вычисляются в относительных единицах, то абсолютные значения сигналов несущественны. Более того, непреднамеренно внесённое смещение при регистрации сигналов может исказить результаты измерений. Для компенсации смещения после выполнения сглаживания необходимо привести базовый уровень к нулевому.

Возможны две модели измерений коэффициента отражения. В первом случае процессы измерений зондирующего и рассеянного импульсов разделяются, по дискретным

сигналам напряжения U_3, U_p вычисляются соответствующие дискретные сигналы напряжённости электрического поля с учётом коэффициента преобразования ИП. При анализе погрешностей необходимо учитывать составляющие неисключенной систематической погрешности (НСП), связанные с преобразованием приёмной антенны, установкой приёмной и передающей антенн, измерениями посредством осциллографа.

Другой подход (метод приведения, описанный в [5]) состоит в том, чтобы рассматривать нахождение коэффициента отражения (пропускания) как результат деления сумм мгновенных значений зарегистрированных сигналов U_3 ,

U_p , т. е. как прямое измерение, не пересчитывая зарегистрированное напряжение в напряжённость электрического поля. Этот подход справедлив при соблюдении следующих условий: ИП является полностью пассивным устройством (коэффициент преобразования не зависит от напряжённости измеряемого поля); положение образца и ИП не изменяется на каждом шаге измерений; сигналы U_3, U_p регистрируются с неизменным шагом по времени τ ; число отсчётов сигналов N совпадает.

Разработанный авторами метод измерений коэффициента отражения РПМ во временной области предполагает выполнение всех указанных условий.

Частотную характеристику коэффициента отражения (пропускания) K_0 можно представить в виде частного от деления амплитудных спектров U_3, U_p , полученных в комплексной форме:

$$K_0 = \left(\frac{M_p(n)}{M_3(n)} \right)_{n=0}^{N-1} = \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} w_k b_k \exp(-2\pi j k n / N)}{\sum_{k=0}^{N-1} w_k a_k \exp(-2\pi j k n / N)} \right)_{n=0}^{N-1}, \quad (4)$$

где $M_p(n), M_3(n)$ — модули комплексных чисел, являющихся результатом преобразования Фурье на n -й частоте; w — последовательность, задающая временное окно; a_k, b_k — элементы выборок U_3, U_p , соответственно; j — мнимая единица.

Частота, соответствующая n -му элементу коэффициента K_0 , вычисляется с шагом Δf :

$$f_n = \Delta f n = n / (\tau N). \quad (5)$$

Уменьшение шага по частоте увеличивает информативность коэффициента K_0 . Однако при осциллографической регистрации сигналов шаг по времени и число отсчётов, очевидно, являются связанными величинами. Уменьшение шага по времени вдвое во столько же раз увеличивает число отсчётов. Предположим, что сигнал был дискретизирован с шагом $\tau = 0,2$ пс при длине выборки $N_0 = 500$ точек, а рассматриваемый частотный диапазон условно составляет 0—40 ГГц. В этом случае шаг по частоте между значащими точками частотной характеристики составляет 10 ГГц, т. е. всего четыре точки на диапазон (см. (5)). Улучшить частотное разрешение можно, добавив в исходную выборку L

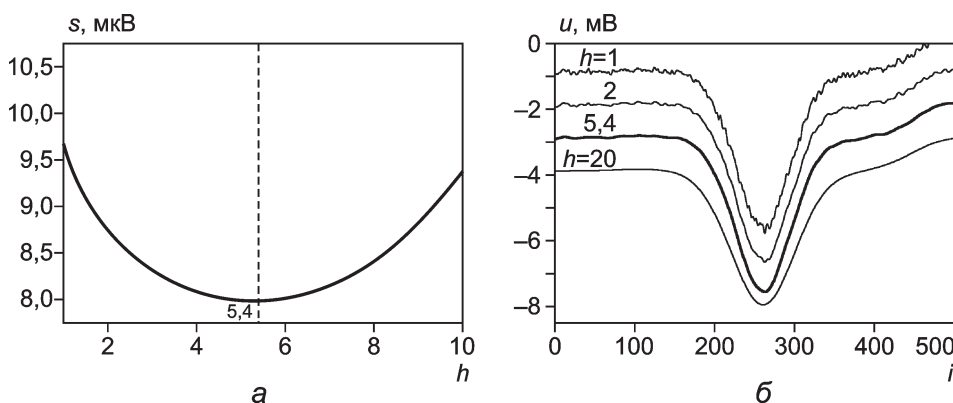


Рис. 1. Выбор оптимальной ширины сглаживания для модельного импульсного сигнала: а — определение минимума функции $s(h)$; б — влияние ширины сглаживания на форму сигнала

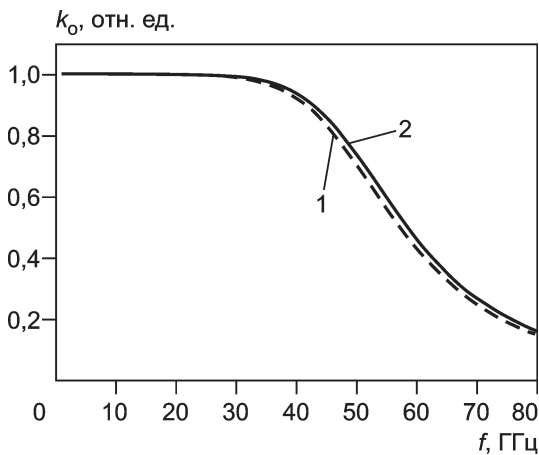


Рис. 2. Амплитудно-частотная характеристика фильтра нижних частот Баттерворта (1) и частотная характеристика коэффициента отражения (пропускания) K_0 (2)

нулевых отсчётов. Такое действие не приводит к искажению спектральной плотности сигналов, так как не вносятся никаких изменений в форму сигнала. Если условие, налагаемое на L , соответствует выражению

$$N + L = 2^k \geq 100N, \quad (6)$$

то улучшить частотное разрешение (уменьшить шаг по частоте) можно по крайней мере в 100 раз.

Значение L выбирается таким, чтобы результирующее количество элементов последовательностей было равно степени двойки. Это позволяет ускорить вычисления амплитудных спектров посредством применения быстрого преобразования Фурье.

Использование известных последовательностей w , задающих временное окно, позволяет дополнительно сгладить возможные скачки на границах последовательностей U_s , U_p . Выражения, задающие такие последовательности, в данной статье не приведены, они определены в [6]. Импульсные сигналы достаточно хорошо локализованы во времени, поэтому при их регистрации целесообразно удостовериться, что скачки на границах последовательностей отсутствуют. В таком случае можно использовать прямоугольное окно $w = 1$.

Совокупность выражений (1)–(6) легла в основу математической модели обработки измерительной информации при экспресс-диагностике электромагнитных параметров РПМ. Для проверки адекватности модели был проведён численный эксперимент. При рассеянии на РПМ зондирующий сигнал в спектральном отношении может быть фильтром нижних частот, верхних частот или полосовым фильтром (характерно для тонкоплёночных покрытий). Гауссовый сигнал U_3 аналитически задавали в дискретном виде:

$$U_3 = \left\{ 100 \exp \left[-0,015^2 (k - 420)^2 \right] \right\}_{k=0}^{N-1=999}.$$

Затем данный сигнал пропускали через аналитически заданный фильтр нижних частот (ФНЧ) Баттерворта 4-го порядка. Данный тип фильтра был выбран потому, что его амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) максимально глад-

кая в пределах полосы пропускания. Далее предполагали, что шаг по времени составляет $\tau = 0,1$ пс, и выбирали частоту среза 60 ГГц.

Исходный и отфильтрованный сигналы подавались на вход математической модели. В результате вычислений получена частотная характеристика коэффициента отражения (пропускания) K_0 , приведённая на рис. 2, в сравнении с АЧХ ФНЧ Баттерворта. В верхней части частотного диапазона расхождение между значениями аналитической АЧХ ФНЧ и результатами вычислений коэффициента K_0 составляет более 5 %, начиная со значения условной частоты $f_{\text{усл}} = 6,8 \cdot 10^{-3}$. Однако если предположить, что шаг по времени между отсчётами исходных сигналов составляет 0,1 пс (тогда длительность фронта исходного сигнала — 8 пс), то данной условной частоте соответствует физическая частота $f = 68$ ГГц, что находится за пределами рассматриваемого частотного диапазона 40 ГГц. В пределах диапазона до 40 ГГц расхождение не превышает 1,0 %.

Точно так же при увеличении шага по времени частота, при которой вычисленный коэффициент K_0 существенно отличается от аналитической АЧХ ФНЧ, будет лежать за пределами диапазона измерений, определяемого длительностью фронта зондирующего импульса: $\Delta F = 0,4/t_{\text{ф}}$.

Таким образом, показано, что в пределах рассматриваемого частотного диапазона аналитическая форма АЧХ ФНЧ Баттерворта 4-го порядка совпадает с вычисленной частотной зависимостью коэффициента K_0 с погрешностью до 5 %. Это подтверждает адекватность разработанной математической модели обработки измерительной информации.

Анализ погрешности измерений. В соответствии с предложенной моделью измерений результат определяется выражением (4). Оценкой коэффициента преобразования $\bar{K}_0(n)$ является среднее арифметическое значение коэффициента преобразования по результатам нескольких независимых наблюдений (на каждой n -й частоте в рассматриваемом диапазоне). Случайная погрешность измерений соответственно может быть охарактеризована максимальным значением среднеквадратичного отклонения (СКО) в рассматриваемом диапазоне. Уменьшение СКО возможно в результате увеличения количества наблюдений.

В работе [7] проведён анализ неопределённости измерений при вычислении модулей спектральных составляющих дискретизированных сигналов. Данные результаты использованы авторами при оценивании НСП измерений.

Для оценки данной погрешности рассмотрим модель измерений в виде (4). Тогда доверительные границы НСП измерений коэффициента K_0 на каждой n -й частоте определяются как

$$\Theta_{K_0(n)} = k \sqrt{\left(\frac{\partial K_0(n)}{\partial M_p(n)} \right)^2 \Theta_{M_p(n)}^2 + \left(\frac{\partial K_0(n)}{\partial M_s(n)} \right)^2 \Theta_{M_s(n)}^2}, \quad (7)$$

где Θ_{M_p} , Θ_{M_s} — доверительные границы НСП измерений модулей M_p , M_s , соответственно; k — коэффициент охвата ($k = 1,1$ при доверительной вероятности $P = 0,95$).

Выражение для модуля M_p , M_s можно записать в тригонометрической форме следующим образом (положим, что рассматривается сигнал в прямоугольном окне):

$$M(n) = \sqrt{\text{Re}^2(n) + \text{Im}^2(n)}; \text{Re}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cos\left(\frac{2\pi}{N} in\right);$$

$$\text{Im}(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \sin\left(\frac{2\pi}{N} in\right),$$

где $x_i = a_i$ или $x_i = b_i$.

Соответственно доверительные границы НСП измерений модуля $M(n)$ могут быть найдены из формулы

$$\Theta_{M(n)}^2 = \left(\frac{\partial M(n)}{\partial \text{Re}(n)}\right)^2 \Theta_{\text{Re}(n)}^2 + \left(\frac{\partial M(n)}{\partial \text{Im}(n)}\right)^2 \Theta_{\text{Im}(n)}^2.$$

После выполнения преобразований доверительные границы НСП $\Theta_{\text{Re}(n)}$, $\Theta_{\text{Im}(n)}$ составляют

$$\Theta_{\text{Re}(n)}^2 = \left(\frac{\partial \text{Re}(n)}{\partial x(i)}\right)^2 \Theta_{x(i)}^2 = \Theta_{\text{Im}(n)}^2 = \left(\frac{\partial \text{Im}(n)}{\partial x(i)}\right)^2 \Theta_{x(i)}^2 = \frac{\Theta_{x(i)}^2}{2N^2}.$$

Тогда доверительные границы НСП измерений модуля $M(n)$ также составляют

$$\Theta_{M(n)}^2 = \frac{1}{M^2(n)} \left[\text{Re}^2(n) \Theta_{\text{Re}(n)}^2 + \text{Im}^2(n) \Theta_{\text{Im}(n)}^2 \right] = \frac{\Theta_{x(i)}^2}{2N^2}. \quad (8)$$

В результате выражение (7) принимает вид

$$\Theta_{K_o(n)} = k \sqrt{\left(\frac{M_p(n)}{M_s^2(n)}\right)^2 \Theta_{M_p}^2 + \left(\frac{1}{M_s(n)}\right)^2 \Theta_{M_s}^2}.$$

Если используется не прямоугольное окно $w(i)$, то (8)

можно записать как $\Theta_{M(n)}^2 = \frac{\Theta_{x(i)}^2}{2N^2} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} w^2(i)$, а дальнейшие вычисления аналогичны.

Границы НСП измерения напряжения $\Theta_{x(i)}$ являются композицией следующих составляющих:

$$\Theta_{x(i)} = k \sqrt{\Theta_{\text{кв}}^2 + \Theta_{\text{осц}}^2 + \Theta_{\text{ген}}^2},$$

где $\Theta_{\text{кв}}$ — погрешность квантования сигнала; $\Theta_{\text{осц}}$ — погрешность измерений осциллографом; $\Theta_{\text{ген}}$ — нестабильность сигнала возбуждающего генератора. Значения $\Theta_{\text{осц}}$, $\Theta_{\text{ген}}$ определяются при проверке или калибровке осциллографа и генератора.

Погрешность квантования может быть найдена по следующей формуле:

$$\Theta_{\text{кв}} = A_{\text{шк}} / 2^B \cdot 12^{1/2},$$

где $A_{\text{шк}}$ — произведение коэффициента отклонения на число делений на экране; B — разрядность аналого-цифрового преобразователя осциллографа (в битах).

Результирующая погрешность может быть оценена из соотношения случайной и систематической погрешностей в соответствии с [8].

Оценку НСП можно сделать на основе рассмотренного выше примера с использованием фильтра Баттерворта. Предположим, что сигналы с амплитудой $U_{\text{max}} = 1$ В зарегистрированы с помощью стробоскопического осциллографа Tektronix CSA8000B (разрядность 14 бит, относительная погрешность измерений напряжения $\Theta_{\text{осц}} = 3\%$) с шагом $\tau = 0,1$ пс; зарегистрировано $N = 1000$ точек. Пусть коэффициент вертикального отклонения выбран таким образом, что $A_{\text{шк}} = 2$ В. Генератор TMG1010, возбуждающий передающую антенну, имеет нестабильность $\Theta_r = 1\%$. В этом случае предельное значение $\Theta_{x(i)}$ составит

$$\Theta_{x(i)} = 1,1 \sqrt{(3,5 \cdot 10^{-5})^2 + (0,03)^2 + (0,01)^2} = 0,035 \text{ В}.$$

Таким образом, на частотах до 40 ГГц НСП измерения коэффициента K_o не превышает 1 %. Вероятно, основной вклад в результирующую погрешность вносит случайная составляющая. При этом следует понимать, что при преобладании случайной составляющей результирующая погрешность может быть значительно снижена посредством увеличения числа наблюдений.

Закключение. Разработана математическая модель обработки измерительной информации при экспресс-диагностике электромагнитных параметров РПМ с помощью сверхкоротких электромагнитных импульсов. Для устранения шумовых составляющих сигнала предложено использовать метод ядерного сглаживания с определением оптимальной ширины окна по принципу максимального правдоподобия с исключением по одному элементу из обучающей выборки. Улучшение частотного разрешения характеристики коэффициента отражения (пропускания) осуществляется удлинением исходных последовательностей нулевыми отсчетами. Адекватность модели проверена и подтверждена в численном эксперименте при сравнении с ФНЧ Баттерворта.

Проведён анализ погрешностей измерений при использовании предлагаемого метода. Случайная погрешность может быть оценена напрямую по результатам нескольких наблюдений на каждом спектральном отсчёте. Показано, что систематическая погрешность фактически зависит только от погрешности измерений напряжения с помощью регистратора. По предварительным оценкам, при использовании имеющегося в распоряжении авторов оборудования систематическая погрешность измерений не превышает 1—2 % в диапазоне частот до 40 ГГц.

Исследования проведены при поддержке Минобрнауки России (соглашение № 14.624.21.0003 от 11.08.2014 г., уникальный идентификатор прикладных научных исследований RFMEFI62414X0003).

Л и т е р а т у р а

1. Сахаров К. Ю., Туркин В. А., Михеев О. В., Сухов А. В., Алешко А. И. Методы и средства зондирования радиопоглощающих материалов с помощью сверхкоротких электромагнитных импульсов // Измерительная техника. 2015. № 11. С. 60—63.
2. Sakharov K. Yu., Turkin V. A., Mikheev O. V., Aleshko A. I., Sukhov A. V. A measuring system for characterization of radar-absorbent materials by ultra-short electromagnetic pulse sounding over the range 0.1—40 GHz // Proc. 14th Conf. on Microwave Techniques COMITE. 2015. Pardubice, Czech Republic. P. 1—4.

3. Пат. 155117 РФ. Устройство для измерения коэффициента отражения радиопоглощающих материалов / К. Ю. Сахаров, В. А. Туркин, О. В. Михеев, А. В. Сухов // Изобретения. Полезные модели. 2015. № 26.

4. Кузнецов М. П., Мафусаилов А. А., Животовский Н. К., Зайцев Е. Ю., Сунгуров Д. С. Сглаживающие алгоритмы прогнозирования // Машинное обучение и анализ данных. 2011. Т. 1. № 1. С. 104—112.

5. Рабинович С. Г. Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.

6. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.

7. Novotny M., Slepicka D. Uncertainty Analysis of the Phase and RMS Value by Non-Coherent Sampling in the Frequency Domain // Proc. IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference. 2005. Ottawa, Canada. V. 3. P. 2114—2117.

8. МИ 2083-90 ГСИ. Измерения косвенные. Определение результатов измерений и оценивание их погрешностей.

Дата принятия: 01.04.2016.

АКУСТИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ

621.317.39

Волновая фильтрация пульсаций давления с помощью мелкоячеистых сеток

А. Ю. ГОЛУБЕВ

Центральный аэрогидродинамический институт им. профессора Н. Е. Жуковского, Жуковский, Россия, e-mail: alexeygolubev@yandex.ru

Представлены результаты экспериментальных исследований параметров элемента волнового фильтра, конструктивная реализация которого основана на расположении приёмника пульсаций давления в полости под мелкоячеистой сеткой. Приведены оптимальные размеры элемента, позволяющие реализовать максимальное усреднение малых длин волн. Предложен способ определения эффективности рассматриваемого фильтра.

Ключевые слова: мелкоячеистая сетка, пульсации давления, частотно-волновой спектр, коротковолновые компоненты.

The results of experimental studies are presented of testing the antenna element determining the long-wavelength components of wall pressure fluctuations, the design implementation of which is based on the receiver's location in a cavity under the fine mesh grid. The optimal size of the element is defined, at which the maximum averaging of short wavelengths is realized. A method for determining of its effectiveness is suggested.

Key words: fine mesh grid, pressure fluctuations, wave-frequency spectrum, short-wave components.

Колебания упругой конструкции под воздействием набегающего потока определяются структурой полей аэродинамических пульсаций давления турбулентного пограничного слоя. Случайный характер полей приводит к необходимости применения вероятностного подхода для их представления. В частотной области пульсации давления описывают спектральной плотностью $\Phi(\mathbf{x}, \omega)$, взаимной спектральной плотностью сигналов $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)$, задаваемых радиусами-векторами $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ на обтекаемой поверхности, а также нормированным спектром пространственных корреляций:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) &= \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega) / [\Phi(\mathbf{x}, \omega) \Phi(\mathbf{x}', \omega)]^{1/2} = \\ &= |\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)| e^{i \arg \varphi}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ω — циклическая частота.

С точки зрения цифрового анализа данных функция (1) соответствует нормированному взаимному спектру. Модуль функции определяет степень организованности пульсаций давления на обтекаемой поверхности, а аргумент — конвективные свойства.

При решении задач колебаний и акустического излучения упругих конструкций под действием аэродинамических

пульсаций давления, а также при расчёте акустического излучения во внешнее пространство требуется ещё одна характеристика — частотно-волновой спектр. Этот спектр для инвариантного в пространстве поля пристенных пульсаций давления турбулентного пограничного слоя в ортогональной системе координат на обтекаемой поверхности описывают выражением

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\xi, \omega) e^{-i\mathbf{k}\xi} d\xi, \quad (2)$$

где $\xi = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2)$ — радиус-вектор разнесения приёмников; $\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ — волновой вектор.

Волновым числом называют величину, обратно пропорциональную длине волны $k = 2\pi/\lambda$. Область малых волновых чисел соответствует длинноволновым компонентам и, напротив, область больших волновых чисел — коротковолновым. Волновой вектор непосредственно связан с волновым пакетом, распространяющимся в направлении, определяемом этим вектором. Как правило, для вектора $\mathbf{k}_1$ выбирают