

Формфакторы плоских колец

В. М. КУЛИК¹, А. В. БОЙКО^{2, 3}¹ Институт теплофизики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: vkulik@itp.nsc.ru² Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия, e-mail: boiko@itam.nsc.ru³ Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия

Представлены результаты расчётов формфактора плоского кольца в линейной постановке теории упругости. Формфактор учитывает влияние размеров образца и коэффициента Пуассона на реально измеряемый модуль упругости. Решена двухмерная задача упругого деформирования кольца при задании граничных условий на всей его поверхности. Для аттестации результатов вычислений изготовлены шесть плоских колец различных размеров, измерен их модуль упругости. Разброс значений модуля Юнга, скорректированный рассчитанным формфактором, не превысил 2,5 %, что соответствует диапазону погрешностей метода измерений модуля упругости.

Ключевые слова: модуль упругости, коэффициент Пуассона, плоское кольцо, формфактор.

Results of form factor computations for a flat ring using linear elasticity theory formulation, which take into account the influence of sample sizes and Poisson's ratio on the measured modulus of elasticity are presented. The noslip conditions at the ring plane faces are assumed. The results are based on a numerical solution of two-dimensional elastic deformation problems for the rings with given boundary conditions over its entire surface. Six flat rings with different sizes were manufactured and their elastic modulus was measured to validate the results of computations. The scattering of Young's modulus corrected with the help of the form factor does not exceed 2.5%, which is within the range of errors of the elastic modulus measurement technique.

Key words: modulus of elasticity, Poisson's ratio, plane ring, form factor.

Плоские кольца из вязкоупругих материалов используют в различных технических целях, например, при гашении вибраций, герметизации, гидроизоляции и т. д. При этом необходимы расчёты требуемого усилия для заданной деформации или, наоборот, вычисление деформации по заданной геометрии образца и его упругим свойствам. Плоские кольца также можно использовать для определения модуля

Юнга методом сжатия [1]. При малой относительной высоте таких образцов уменьшается вероятность радиальных смещений и перекосов, что обеспечивает плоское деформирование данных экземпляров. Формфактор цилиндрического образца при его сжатии-растяжении, а также формфактор полого цилиндра при его сдвиговом деформировании были вычислены в [2, 3]. Настоящая работа посвящена определению формфактора плоского кольца толщиной H , внутренним и внешним радиусами R_1 , R_2 , соответственно. Предполагается, что скольжение плоских граней кольца отсутствует.

Формфактор можно найти из формулы $\alpha = E_0/E$, где E_0 — модуль Юнга, независимый от размеров образца; E — модуль, измеренный по закону Гука. Алгоритм определения формфактора основан на численном решении двухмерной задачи упругого деформирования вертикально расположенного цилиндрического образца [4–6]:

$$\Delta \xi + \frac{1}{1-\mu} \nabla (\nabla \xi) = 0,$$

где ξ — вектор деформации, состоящий из осевой $\zeta(z, r)$ и радиальной $\eta(z, r)$ компонент; μ — коэффициент Пуассона; z, r — соответственно осевая и радиальная координаты цилиндрической системы координат.

Рассмотрим граничные условия, описывающие всю поверхность образца:

отсутствуют радиальные смещения на верхней и нижней поверхностях, а именно

$$\eta = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = H; \quad (1)$$

на нижней грани нет осевого смещения, т. е. $\zeta = 0$ при $z = 0$;

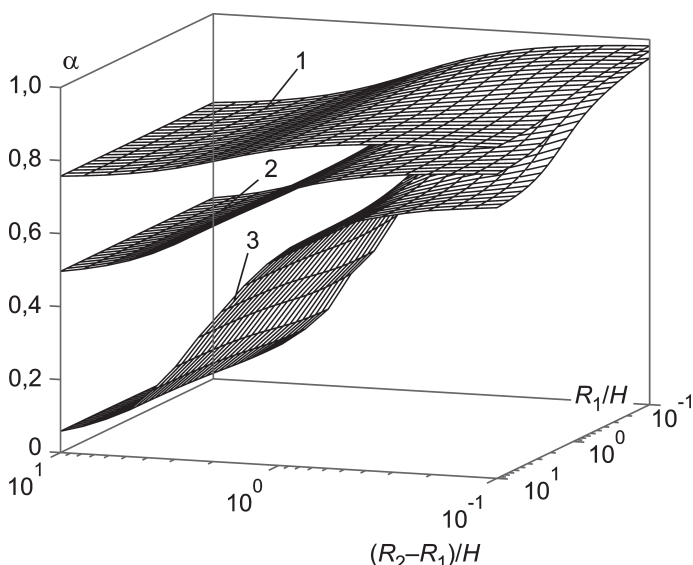


Рис. 1. Зависимости формфактора от геометрических пропорций образца:

1, 2, 3 — $\mu = 0,3; 0,4; 0,495$, соответственно

осевое смещение на верхней грани задано по закону Гука

$$\zeta = mgH / \pi(R_2^2 - R_1^2)E, \quad (2)$$

где m — масса груза (гири), расположенного на верхнем торце образца; g — ускорение свободного падения;

на боковых поверхностях отсутствуют нормальные к поверхности и касательные напряжения

$$\sigma_{rz} = 0; \sigma_{rr} = 0 \text{ при } r = R_1, r = R_2. \quad (3)$$

При этом надо учитывать условие равенства внутренних напряжений на верхней кромке образца давлению от гири массой m :

$$mg = - \int_{R_1}^{R_2} 2\pi r \sigma_{zz}(H, r) dr, \quad (4)$$

где σ_{zz} — напряжение на площадке, перпендикулярной оси z , направленное вдоль z .

В цилиндрических координатах (см. [4])

$$\sigma_{zz} = \frac{E_0 \mu}{(1-2\mu)(1+\mu)} \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{\eta}{r} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \frac{E_0}{1+\mu} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (5)$$

Таким образом, существует связь между измеренным в эксперименте модулем E (в уравнении (2)) и модулем Юнга (см. (5)).

Используя условия (1), (2), получим уравнение для формфактора

$$\alpha = - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)} \frac{(R_2^2 - R_1^2) \zeta}{H} \left[\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial \zeta}{\partial z}(H, r) r dr \right]^{-1}.$$

Один из возможных методов решения системы уравнений (1)–(4) описан в [6, 7].

На рис. 1 приведены зависимости формфактора от геометрических пропорций образца при трёх значениях коэффициента Пуассона. При $(R_2 - R_1)/H > 10$ формфактор приближается к предельному значению, определяемому объёмным модулем упругости K материала, и не зависит от R_1/H [4]:

$$\alpha \rightarrow (1 + \mu) (1 - 2\mu) / (1 - \mu). \quad (6)$$

Для представленных данных из формулы (6) можно найти $\alpha \approx 0,74; 0,47; 0,03$ при $\mu = 0,3; 0,4; 0,495$, соответственно.

В случае $(R_2 - R_1)/H < 0,5$ и $R_1 > H$ получаемое значение формфактора объясняется тем, что данное кольцо можно представить как прямоугольную призму высотой H с гори-

Измеренные и скорректированные модули Юнга образцов указанных размеров

№	R_2 , мм	R_1 , мм	H , мм	$(R_2 - R_1)/H$	R_2/H	$E_{\text{изм}}$, МПа	α	E_0 , МПа
1	13,00	10,00	2,65	1,11	4,79	1,77	0,54	0,96
2	20,00	14,85	2,50	2,06	5,94	2,58	0,38	0,98
3	20,00	14,85	5,30	0,97	2,80	1,69	0,57	0,97
4	20,00	14,85	7,50	0,69	1,98	1,53	0,64	0,97
5	25,00	20,05	10,60	0,47	1,89	1,38	0,68	0,94
6	25,00	20,05	5,50	0,90	3,65	1,60	0,60	0,96

зонтальными размерами $R_2 - R_1$ и $\pi(R_2 + R_1)$. Кольцо зажато стенками в месте предполагаемого разреза. Модуль упругости зажато таким образом образца равен $E/(1 - \mu)^2$, поэтому $\alpha \rightarrow 1 - \mu^2$. Для левой границы представленных на рис. 1 данных, из (6) можно определить следующие значения: $\alpha \approx 0,91; 0,84; 0,76$ при $\mu = 0,3; 0,4; 0,495$, соответственно.

В случае $(R_2 - R_1)/H < 0,5$ и $R_1 < H$ (когда плоское кольцо приближается по виду к цилиндру с маленьким отверстием в центре) формфактор стремится к единице, что согласуется с прежними результатами [2].

Для аттестации и проверки предложенной методики из силиконовой резины «Пента 720» изготовили шесть плоских колец, размеры которых приведены в таблице.

Сверху и снизу к кольцам приклеили металлические диски. В качестве клея использовали тот же материал, что и для изготовления колец. Формфактор рассчитывали для $\mu = 0,495$. Модуль упругости колец измеряли на установке, схематически показанной на рис. 2. Установка состоит из измерителя перемещений 3, закреплённого на жёсткой раме 1. Один конец

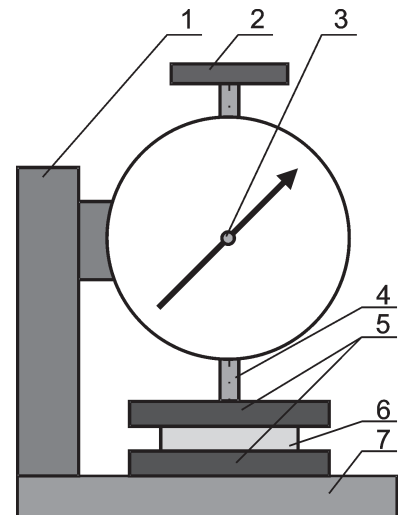


Рис. 2. Схема измерений модуля упругости:

1 — жёсткая рама; 2 — гиря; 3 — измеритель перемещений; 4 — подвижный шток; 5 — диски; 6 — плоское кольцо; 7 — опора

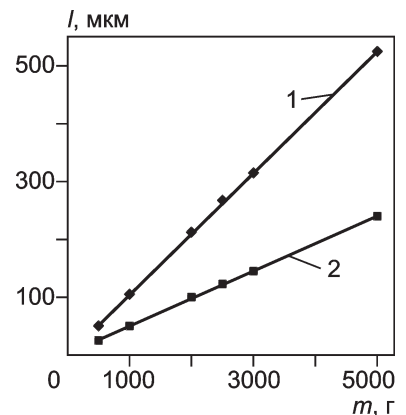


Рис. 3. Зависимость величины деформации от нагрузки для колец № 5 (1) и № 6 (2) и линейные аппроксимации измерений

подвижного штока 4 с некоторым начальным усилием упирается в центр конструкции 5, состоящей из двух жёстких дисков с приклеенным внутри плоским кольцом 6. На верхний конец штока 4 прикреплен площадка 2, на которую устанавливали стандартные гири в диапазоне от 500 г до 5 кг. Одно деление шкалы индикатора измерителя перемещений соответствовало смещению 5 мкм. На рис. 3 представлены результаты измерений деформации плоского кольца от нагрузки. В указанном диапазоне нагрузок деформирование происходит по линейному закону. При расчёте модулей упругости учитывают только наклон кривой, поэтому начальная нагрузка не оказывает влияния на результаты измерений.

Параметры образцов выбраны из соображений технологичности изготовления так, чтобы их диаметры и высоты изменялись в широких пределах, оставаясь в заданном диапазоне параметров (см. рис. 1). Из таблицы следует, что отклонения от среднего значения скорректированного по предложенной методике значения модуля Юнга не превышают 2,5 %. Дополнительные тесты, основанные на вычислениях формфакторов при варьировании измеренных геометрических размеров в пределах точности измерений 0,01 мм, приводят к изменению скорректированного модуля Юнга, не превышающего 0,02 МПа, т. е. тоже находятся в пределах 2,5 %. Поэтому увеличение рассматриваемого количества образцов признано излишним.

На основе полученных данных выведена эмпирическая формула, описывающая поведение формфактора с относительной точностью около 5 % в диапазоне $\mu = 0,05 \dots 0,475$; $(R_2 - R_1)/H \approx 0,5 \dots 1,5$ и $R_1/H \approx 0,5 \dots 2,0$:

$$\alpha = (1 - \mu^{7/4})/[A (R_2 - R_1)/H + B],$$

где $A = 2 (C - 1)/3$; $B = (4 - C)/3$; $C = 2/[1 + (1 - 4\mu^2)^{1/2}]$.

Заключение. На основе численного решения двумерной задачи о деформировании плоского кольца определены формфакторы, связывающие измеренные по закону Гука модули упругости образцов произвольных размеров с моду-

лем Юнга. Это позволяет точнее стандартизировать методику измерений модуля упругости материалов, исключив зависимость результатов измерений от размеров образцов. Для удобства использования формфакторов предложена интерполяционная формула в важном для практического применения диапазоне коэффициентов Пуассона и размеров колец: $\mu = 0,05 \dots 0,475$; $(R_2 - R_1)/H \approx 0,5 \dots 1,5$ и $R_1/H \approx 0,5 \dots 2,0$. Верификация предложенного метода, произведённая на шести плоских кольцах с различными толщинами и диаметрами, показала, что модуль Юнга материала колец, скорректированный формфактором, действительно не зависит от размеров образцов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00052, 16-08-00354).

Л и т е р а т у р а

1. **ГОСТ 9550—81.** Пластмассы. Методы определения модуля упругости при растяжении, сжатии и изгибе.
2. **Кулик В. М., Бойко А. В.** Формфактор сжатого цилиндрического образца // Измерительная техника. 2014. № 8. С. 36—38.
3. **Кулик В. М., Бойко А. В.** Формфактор полого цилиндрического образца при сдвиговой деформации // Измерительная техника. 2015. № 6. С. 15—17.
4. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теория упругости. М.: Наука, 1987.
5. **Sadd M. H.** Elasticity: Theory, applications, and numerics. Elsevier, 2005.
6. **Бойко А. В., Кулик В. М.** Об одном методе экспериментального нахождения динамических вязкоупругих свойств цилиндрического образца // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 77. № 1. С. 138—142.
7. **Kulik V. M., Semenov B. N., Boiko A. V., Seoudi B. M., Chun H. H., Lee I.** Measurement of dynamic properties of viscoelastic materials // Experimental Mechanics. 2009. V. 49. N. 3. P. 417—425.

Дата принятия: 11.04.2016.