

## Оценивание параметров нелинейных моделей на основе метода сеток с привлечением априорной информации о весах узлов

С. Б. БЕРКОВИЧ<sup>1</sup>, Н. И. КОТОВ<sup>1</sup>, Р. Н. САДЕКОВ<sup>1</sup>, Ю. И. МИНКИН<sup>2</sup>,  
А. В. ШОЛОХОВ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Институт инженерной физики, Серпухов, Россия, e-mail: naviserp@gmail.com, sadekovlar@mail.ru, y.minkin@cognitive.ru  
<sup>2</sup> ЗАО «Когнитив», Москва, Россия, e-mail: sholav@mail.ru

Предложен подход к снижению методической погрешности, возникающей в нелинейных задачах оценивания параметров вследствие неточного выбора границ интервалов для построения сетки. Показано, что выбор границ затрудняют малое число доступных измерений и их низкая точность. Повышение точности искомых оценок параметров достигается в результате привлечения априорной информации о вероятностях, относящихся к узлам сетки на краях интервалов, в целях коррекции апостериорных вероятностей, получаемых согласно методу сеток.

**Ключевые слова:** метод сеток, оценка параметров нелинейных моделей, априорная информация, узлы сетки.

An approach to decrease a methodical error arising in non-linear estimation problems of parameters due to inadequate choice of limits of intervals for finding of parameters estimates for net structure is proposed. The small number and low accuracy of available measurements are the reasons of an incorrect choice of these limits. Reduction of an error is reached due to using of a priori information on the probabilities relating to grid knots at edges of intervals to correct the a posteriori probabilities obtained in accordance with net-point method. The simple example of estimation of a correlation interval of errors of digital relief map is given.

**Key words:** net-point method, nonlinear model parameter estimation, a priori information, nodes.

В нелинейных задачах обработки навигационной информации для нахождения оценок параметров часто используют метод сеток или методы, аналогичные по структуре [1—4]. При этом предполагается, что истинные значения искомых параметров находятся внутри интервалов. Границы этих интервалов выбирают так, что за их пределами узлы сетки можно не принимать в расчёт практически без снижения точности получаемых оценок. Однако значения весов узлов сетки за пределами интервалов при небольшом числе и низкой точности доступных измерений не всегда можно полагать достаточно малыми. Расширение границ интервалов также не гарантирует быстрого уменьшения значений этих весов. Следовательно, оценки самих параметров и их характеристики точности зависят от априорного и эвристического выбора границ интервалов, что увеличивает погрешность метода сеток в конечных субоптимальных оценках.

В настоящей статье авторы предлагают корректировать получаемые традиционным способом апостериорные веса узлов сетки, привлекая дополнительную информацию о значениях вероятностей в отдельных узлах. Применение границ интервалов в качестве таких узлов позволяет уменьшить рассмотренную методическую погрешность. Вероятности узлов можно определить, например, из физического смысла оцениваемых параметров. Найденные методом сеток апостериорные вероятности коррелированы и рассматриваются как система случайных чисел, так как используемые для их нахождения данные являются счётными, содержат погрешности, а оцениваемые параметры характеризуются неопределённостью. Если известна информация о вероятностях в отдельных узлах сетки независимо от измерений, то такие вероятности можно корректировать.

Дополнительную информацию о вероятностях задействуют на этапе формирования априорных или начальных значений весов узлов. Однако на практике объективно обосновать связь (в виде корреляции или иначе) для априорных весов достаточно сложно. Дополнительную информацию о вероятностях нужно привлекать для коррекции апостериорных весов (апостериорных вероятностей), а не на этапе формирования их априорных значений. Таким образом, предлагаемый подход состоит в нахождении условной функции плотности распределения вероятностей. Аргументы этой функции — получаемые методом сеток веса узлов, которые дополнительно корректируются по известным значениям вероятностей в отдельных узлах.

В статье обоснованы ограничения, служащие для нахождения указанной условной функции плотности. Предложен экономичный вычислительный вариант коррекции апостериорных вероятностей, основанный на допущении, что их плотность является гауссовой. Решена задача нахождения интервала корреляции погрешностей карты высот рельефа местности.

**Постановка и общее решение задачи оценивания.** Рассмотрим задачу оценивания параметра  $\theta$ , нелинейно связанного с измерениями  $\mathbf{y}^T = [y_1, \dots, y_k]$ :

$$\mathbf{y} = H(\theta) + \mathbf{v}, \quad (1)$$

где  $H(\theta)$  — нелинейная функция оцениваемого параметра  $\theta$ ;  $\mathbf{v}^T = [v_1, \dots, v_k]$  — вектор центрированных нормально распределённых измерительных погрешностей, характеризующихся ковариационной матрицей  $P_v$ .

Для упрощения изложения ограничимся оцениванием скалярного случая  $\theta$ . Дополним постановку задачи предположением, что параметр  $\theta$  внутри интервала  $[\theta_1, \theta_n]$  может принимать только дискретные значения  $\theta_i$  при  $i = 1, \dots, n$  узлах сетки, причём на краях интервала соответствующие вероятности равны  $P_1^*, P_n^*$ .

Согласно методу сеток, искомая субоптимальная оценка может быть найдена из плотности [1]:

$$f(\theta/\mathbf{y}) = f(\theta)f(\mathbf{y}/\theta) / \int f(\theta)f(\mathbf{y}/\theta)d\theta,$$

где  $f(\theta) = \sum_{i=1}^n P_i^0 \delta(\theta - \theta_i)$  — аппроксимация априорной плотности  $\theta$ , в которой априорные вероятности обычно полагают одинаковыми  $P_1^0 = P_2^0 = \dots = P_n^0 = 1/n$ ;  $f(\mathbf{y}/\theta)$  — функция правдоподобия;  $\delta$  — дельта-функция.

С учётом аппроксимации

$$f(\theta/\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n P_i \delta(\theta - \theta_i),$$

где  $P_i = f(\mathbf{y}/\theta = \theta_i) / \sum_{i=1}^n f(\mathbf{y}/\theta = \theta_i)$ .

При предположениях, часто используемых в решении подобных задач [1], можно записать:

$$f(\mathbf{y}/\theta = \theta_i) = 1 / [2\pi |P_V(\theta_i)|]^{1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{y} - H(\theta_i)]^T P_V(\theta_i)^{-1} [\mathbf{y} - H(\theta_i)] \right\}. \quad (2)$$

Апостериорные вероятности  $P_i$  являются коррелированными случайными числами, поскольку функционально зависят от результатов измерений  $\mathbf{y}$ , содержащих погрешности. На краях интервала вероятности  $P_1, P_n$  в общем случае не равны соответственно  $P_1^*, P_n^*$ . Для коррекции апостериорных вероятностей объединим их в векторе  $\mathbf{P} = [P_1, \dots, P_n]^T$  и введём в рассмотрение соответствующую функцию плотности  $f_P(\mathbf{P})$ . Она может быть найдена приближённо с требуемой точностью, например, методом Монте—Карло. Тогда вероятности, которые назовём скорректированными

$\mathbf{P}^k = [P_1^k, \dots, P_n^k]^T$ , можно получить из условной плотности

$$f_P(\mathbf{P}^k / \mathbf{P}_1^k = P_1^*, P_n^k = P_n^*, 0 \leq \mathbf{P}^k \leq 1). \quad (3)$$

Ограничение (3) в форме двойного неравенства выполняется по каждому элементу вектора  $\mathbf{P}^k$ . Окончательно искомую оценку параметра  $\theta$  и её характеристику точности вычислим по формулам:

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i^k \theta_i; \quad P_\theta = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i^k \theta_i \theta_i^T - \hat{\theta} \hat{\theta}^T. \quad (4)$$

**Приближенный подход к коррекции апостериорных вероятностей.** Нахождение априорной и условной плотностей  $f_P$  — трудоёмкая операция. Один из путей уменьшения вычислительных затрат при нахождении  $\mathbf{P}^k$  основан на предположениях, что апостериорные вероятности  $\mathbf{P}$  содержат погрешности  $\Delta \mathbf{P}$ , вызванные погрешностями  $\mathbf{v}$  измерений (1). В общем случае плотность распределения  $\Delta \mathbf{P}$  не является гауссовой, однако для облегчения изложения предлагаемого подхода и выведения простых аналитических выражений для оценок вероятностей допустим, что эта плотность аппроксимируется нормальной плотностью  $N(\Delta \mathbf{P}, 0, R_P)$ . Вероятности  $\mathbf{P}$  и их погрешности  $\Delta \mathbf{P}$  можно линейно связать с заданными в условии задачи вероятностями  $P_1^*, P_n^*$ . В качестве дополнительного ограничения выступает выражение  $\sum \Delta P_i = 0$ , вытекающее из того, что сумма вероятностей  $\sum P_i = 1$ . Эти ограничения можно представить системой из трёх линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_1 &= P_1 - P_1^*; \\ \Delta P_n &= P_n - P_n^*; \\ \Delta P_1 + \dots + \Delta P_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В векторно-матричной форме система (5) имеет вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \dots \\ \Delta P_n \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{P}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 - P_1^* \\ P_n - P_n^* \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Delta \tilde{\mathbf{P}}}. \quad (6)$$

Скорректированные вероятности вычислим по формуле

$$\mathbf{P}^k = \mathbf{P} - R_P M (M^T R_P M)^{-1} \Delta \tilde{\mathbf{P}}. \quad (7)$$

Формула (6) принципиально не исключает получение отрицательных или превосходящих единицу значений вероятностей в векторе  $\mathbf{P}^k$ , поэтому необходим контроль выполнения неравенства  $0 \leq \mathbf{P}^k \leq 1$ , где  $i = \overline{1, n}$ . При невыполнении неравенства в отношении отдельных элементов  $\mathbf{P}_i^k$  система уравнений (6) может быть дополнена соответствующими ограничениями, например,  $\mathbf{P}_i^k = 0$  для отрицательной оценки  $i$ -го элемента вектора  $\mathbf{P}^k$ . Полученные таким образом скорректированные вероятности  $\mathbf{P}^k$  используют для нахождения субоптимальной оценки параметра  $\theta$  согласно (4).

*Пример использования априорной информации о весах узлов в задаче оценивания интервала корреляции случайного процесса.* Проиллюстрируем предложенный подход примером нахождения оценки интервала корреляции параметра  $\theta$  погрешностей цифровой карты высот рельефа местности. Аналогичные задачи рассмотрены в [5]. На практике знание  $\theta$  требуется в задачах навигации по геофизическим

ким полям [1, 6, 7] и статистического интерполирования параметров [8]. Доступными являются высоты  $h_j^T$ , точно измеренные в  $j = 1, \dots, k$  точках, и высоты  $h_j^K$ , вычисленные в этих же точках по карте. Всего  $k = 7$  таких точек, расположенных на произвольном прямолинейном 10-километровом отрезке. Все погрешности предположим нормально распределёнными и центрированными с ковариационными матрицами  $P^T$  и  $P^K$ , соответственно. Матрица  $P^T$  является диагональной и зависит от средней квадратической погрешности (СКП) измерений высот, принятой равной 3 м. Элементы матрицы  $P^K$  определяются простейшей функцией ковариации

$$K(r) = (\sigma^K)^2 \exp(-r/\theta), \quad (8)$$

где  $r$  — расстояние между точками (узлами);  $\sigma^K = 10$  м — известная СКП высот карты [9];  $\theta$  — искомый интервал корреляции.

Невязки  $h_j^T - h_j^K$  высот в рассматриваемом примере не зависят от параметра  $\theta$ , в отличие от их матрицы ковариации  $P_V(\theta) = P^T + P^K(\theta)$ . Основываясь на физическом смысле параметра  $\theta$ , введём ограничения, что он положителен и известно его максимальное значение  $\theta_n$ . Исходя из этого, зададим нулевые вероятности  $P_1^* = P_n^* = 0$  того, что  $\theta$  примет значение на любой из границ интервала  $[\theta, \theta_n]$ .

Результаты вычислений по формулам (2), (4), (6)–(8) приведены на рисунке, где значения  $\theta$  в узлах сетки отложены с шагом 0,25 км. Истинное значение  $\theta_n = 3$  км. Сплошная линия 1 соответствует расчётным апостериорным вероятностям  $P_i$ , прерывистая линия 2 — скорректированным  $P_i^K$ . Оценка интервала корреляции без коррекции апостериорных вероятностей в данном примере  $\hat{\theta} = 3,9$  км, что соответствует относительной погрешности  $\approx 25\%$ . При этом оценка существенно зависит от выбора правой границы  $\theta_n$ . С увеличением  $\theta_n$  искомая оценка приближается к  $0,5\theta_n$ , а апостериорная дисперсия оценки неограниченно возрастает. Поэтому искомая оценка интервала корреляции непосредственно определяется выбором правой границы  $\theta_n$  интервала. В случае коррекции апостериорных вероятностей в соответствии с предлагаемым подходом искомая оценка составляет  $\hat{\theta}^K = 3,2$  (погрешность составляет примерно 7 %), а увеличение  $\theta_n$  на погрешность практически не влияет, что является наиболее значимым фактом, показанным в данном примере.

Таким образом, предложенный подход обеспечивает уменьшение методической погрешности в оценках параметров, вызываемой неадекватным выбором границ интервалов, внутри которых предполагаются истинные значения искомых параметров. Снижение погрешности достигается методом коррекции апостериорных вероятностей, получаемых

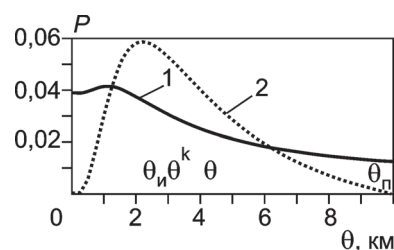
методом сеток. Для коррекции необходима дополнительная информация о вероятностях, относящихся к узлам сетки на краях интервалов. Данный подход востребован при решении нелинейных задач оценивания с малым числом и низкой точностью доступных измерений.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (государственное задание № 14.579.21.0119 от 27.10.2015 г.), уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI57915X0119.

#### Л и т е р а т у р а

1. **Степанов О. А.** Применение теории нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации / СПб.: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электронприбор», 2003.
2. **Беркович С. Б., Котов Н. И., Шолохов А. В.** Оценивание параметров методом сеток с привлечением априорной информации о весах узлов // Сб. материалов XXII Санкт-Петербургской международной конференции по интегрированным навигационным системам. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2015. С. 89–92.
3. **Курдюков А. П., Степанов О. А.** Современные методы теории фильтрации // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 3–4.
4. **Степанов О. А., Торопов А. Б.** Методы нелинейной фильтрации в задаче навигации по геофизическим полям. Ч. 1. Обзор алгоритмов // Гироскопия и навигация. 2015. № 3 (90). С. 102–125.
5. **Степанов О. А., Моторин А. В., Васильев В. А., Торопов А. Б.** Применение методов нелинейной фильтрации в задачах построения моделей ошибок измерителей и погрешностей карты // Материалы XXIX конф. памяти выдающегося конструктора гироскопических приборов Н. Н. Острякова. СПб.: ОАО «Концерн «ЦНИИ «Электронприбор», 2014. С. 293–302.
6. **Белоглазов И. Н., Джанджгава Т. И., Чигин Г. П.** Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985.
7. **Дмитриев С. П., Колесов Н. В., Осипов А. В.** Информационная надёжность, контроль и диагностика навигационных систем. СПб.: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электронприбор», 2003.
8. **Шолохов А. В., Котов Н. И., Дружинин И. М.** Оценка шага сетки узловых точек в задаче интерполирования высот методами коллокации // Геодезия и картография. 2014. № 8. С. 17–20.
9. **ГОСТ Р 51608—2000.** Карты цифровые топографические. Требования к качеству.

Дата принятия: 28.09.2016.



Зависимость вероятностей  $P$  для узлов сетки от оцениваемого параметра до и после проведения коррекции: 1 — расчётные апостериорные вероятности  $P_i$ ; 2 — скорректированные вероятности  $P_i^K$