

Упрощённый алгоритм обработки результатов парных сравнений

Ю. С. СЫСОЕВ

Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Волгодонск, Россия, e-mail: sysoev2004@mail.ru

Предложен алгоритм обработки результатов парных сравнений для оценки качества альтернатив. Показано, что применение построенного алгоритма позволяет отказаться от традиционного метода, использующего для указанных целей один из собственных векторов матрицы парных сравнений. Описанный алгоритм позволяет устранить дополнительные ограничения при ранжировании альтернатив методом парных сравнений.

Ключевые слова: субъективные измерения, экспертные оценки, ранжирование альтернатив, метод парных сравнений.

A simple and reliable algorithm for processing the results of paired comparisons is proposed to evaluate the quality of alternatives. Its application allows us to abandon the traditional method, which uses for this purpose one of the eigenvectors of the matrix of paired comparisons, and what leads to imposing additional requirements on this matrix. The proposed algorithm allows to remove additional, generated by the traditional method constraints in the ranking of alternatives when applying the method of paired comparisons.

Key words: subjective measurements, expert estimates, ranking of alternatives, method of paired comparisons.

Метод парных сравнений – один из наиболее часто встречаемых методов проведения субъективных измерений и ранжирования различного рода альтернатив [1, 2]. Решение задач методом парных сравнений осуществляется в два этапа: 1) собственно измерения, суть которых сводится к сравнению всех альтернатив друг с другом и построению матрицы парных сравнений; 2) обработка полученных результатов, внесённых в указанную матрицу.

Если процесс непосредственных измерений не вызывает трудностей, то существующие методы обработки результатов этих измерений порождают ряд проблем, которые автор предлагает рассмотреть прежде, чем приводить ещё один способ обработки [1–6]. Отметим, что все методы обработки результатов парных сравнений основаны на анализе и сравнении двух матриц. Первая из них является матрицей парных сравнений, построенной на основе заключений эксперта с возможными погрешностями при проведении экспертизы, а вторая написана при условии, что эксперт не допускал погрешностей в процессе экспертизы. Рассмотрим эти матрицы:

$$\nabla = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} v_1/v_1 & v_1/v_2 & \dots & v_1/v_n \\ v_2/v_1 & v_2/v_2 & \dots & v_2/v_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n/v_1 & v_n/v_2 & \dots & v_n/v_n \end{pmatrix},$$

где ∇ , Δ – соответственно первая и вторая матрицы; α_{ij} – элемент матрицы ∇ , указывающий на то, во сколько раз,

по мнению эксперта, i -я альтернатива превосходит j -ю, $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\dots=\alpha_{nn}=1$, $\alpha_{ij}=1/\alpha_{ji}$ для любых i, j ; $v_1, v_2, \dots, v_n$ – неизвестные оценки качества альтернатив, в соответствии со значениями которых должно проводиться ранжирование.

В работе [1] приведены предположения, что эксперт имеет достаточную квалификацию, он объективен (является лицом незаинтересованным), его погрешности случайны и математические ожидания этих погрешностей равны нулю. В этом случае можно считать, что матрица ∇ приближённо равна матрице Δ и, следовательно, для любых целых чисел i, j , $0 < i \leq n$, $0 < j \leq n$ справедливы приближённые равенства $\alpha_{ij} \approx v_i/v_j$. Тогда для любого i , $0 < i \leq n$ будут выполняться следующие приближённые равенства:

$$v_i \approx \alpha_{i1}v_1; v_i \approx \alpha_{i2}v_2; v_i \approx \alpha_{i3}v_3; v_i \approx \alpha_{in}v_n. \quad (1)$$

Определив из (1) среднее значение v_i , получим выражение

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}v_k \approx nv_i, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Так как корни любого многочлена (в том числе и характеристического) непрерывно зависят от его коэффициентов, то, основываясь на равенствах (2), предполагается, что вектор $\mathbf{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ можно считать близким к собственному вектору матрицы ∇ , соответствующему близкому к n собственному числу этой матрицы. Методом математической индукции доказано, что у матрицы Δ характеристический многочлен имеет вид

$$P(\lambda)=(-1)^n\lambda^{n-1}(\lambda-n).$$

Иными словами, все собственные числа матрицы Δ равны нулю, кроме одного числа, которое равно n . Поэтому самым

близким к числу n собственным числом матрицы ∇ считается её максимальное собственное число.

На основании изложенных эвристических соображений приводятся рекомендации по ранжированию альтернатив на основании матрицы парных сравнений, которые оформим в виде следующего традиционного алгоритма [1]:

найти максимальное собственное число матрицы ∇ и соответствующий этому числу собственный вектор;

применить координаты собственного вектора, найденного в предыдущем пункте, для ранжирования альтернатив (чем больше координата, тем «лучше» альтернатива).

Вместе с тем, переход к использованию для ранжирования собственных векторов создаёт дополнительные требования к матрице ∇ , которые заключаются в том, что оценка согласованности (отношение индекса согласованности к случайному индексу) матрицы ∇ не должна превышать значение 0,1 [1]. Однако на практике это требование чаще всего не выполняется. Тем не менее, приведённая рекомендация является достаточно серьёзной, поэтому появились оригинальные работы [3, 4], в которых предложены методы корректировки матрицы парных сравнений ∇ , позволяющие добиться нужного уровня согласованности. Однако проводимые процедуры улучшения согласованности, по мнению автора, не вполне корректны, поскольку сотрудники, занимающиеся обработкой оценок экспертов, не являются специалистами в областях, в которых проводятся экспертизы и, следовательно, не могут влиять на оценки экспертов.

Отметим, что определитель матрицы коэффициентов системы, из которой находят собственные векторы, чаще всего не равен нулю, так как собственные числа находят не точно, а приближённо. Следовательно, указанная матрица не является вырожденной, но она оказывается плохо обусловленной [7]. Поэтому при решении соответствующей системы методом исключения Гаусса даже последовательность операций в процессе исключения переменных влияет на конечный результат, что может привести к неоднозначным результатам при определении собственного вектора. Этот факт можно проверить на матрицах третьего порядка.

Необходимо учесть и тот факт, что корни многочленов обладают высокой чувствительностью к изменению коэффициентов. В работе [7] рассмотрена ситуация, когда изменение одного коэффициента многочлена со значения (-210) на значение $(-210+2^{-23})$ привело к тому, что 10 действительных корней превратились в комплексные. Конечно, в обсуждаемом в настоящей статье случае речь идёт не о произвольном многочлене, а о характеристическом многочлене для обратносимметрической матрицы. Однако и для этой ситуации нет гарантии, что корни характеристического многочлена при небольших погрешностях экспертов могут превратиться в комплексные числа. Такой пример приведён в работе [6] для обратносимметрической матрицы третьего порядка. При погрешности эксперта, равной $-1/20$ (что является вполне реальным при решении практических задач) два из трёх корней характеристического многочлена матрицы стали комплексными. Следовательно, выбирать в такой ситуации наибольший корень (наибольшее собственное число) бессмысленно.

Объяснение указанных проблем лежит не в области выбора алгоритма для нахождения корней характеристического многочлена и даже не в области погрешностей вычислений, а в чувствительности значений корней к изменению коэффициентов многочлена, а значит и в чувствительности значений собственных чисел к изменению элементов матрицы парных сравнений. Тогда получается, что процедуру ранжирования (методику обработки результатов), предложенную Саати, нельзя считать устойчивой по отношению к колебаниям исходных данных [1, 7]. В этом и состоит уязвимость методики Саати, вследствие чего возникла необходимость отказаться от использования собственных векторов матрицы парных сравнений для ранжирования альтернатив.

Такие попытки уже предпринимались ранее [5]. Однако рассмотренный в указанной работе метод оптимальных групповых стратегий оказался достаточно сложным для широкого применения на практике. В нём предложено перебрать законы распределения случайных величин методом наибольшего правдоподобия и установить закон распределения погрешностей эксперта (или экспертов) с последующим применением найденного закона для построения оптимальной стратегии в виде вектора. Координаты этого вектора задействованы для ранжирования альтернатив (так же, как в предыдущем случае, применялись координаты собственного вектора). Каждая из указанных проблем, а именно определение закона распределения погрешностей экспертов и построение математической модели оптимальной стратегии в виде оптимизационной задачи для нахождения указанной стратегии с последующим её решением является самостоятельной, технически сложной задачей.

В настоящей работе автор предлагает чрезвычайно простую и надёжную методику, а также соответствующий методике алгоритм обработки результатов парных сравнений. Такие методика и алгоритм не обременяют матрицу парных сравнений дополнительными требованиями, кроме естественных, сформулированных выше. Для построения анонсированной методики будем использовать матрицы ∇ , Δ . Простой анализ матрицы Δ показывает, что каждый её столбец представляет собой оценки альтернатив, построенные в различных единицах измерения. Например, при построении первого столбца за эталон выбирается первая альтернатива, и именно с нею сравниваются другие альтернативы. В этом случае оценка качества первой альтернативы является единицей измерения для оценок качества других альтернатив. Подобный смысл имеют и столбцы матрицы ∇ , с той лишь разницей, что все указанные оценки носят приближённый характер.

Таким образом, в столбцах матрицы ∇ парных сравнений эксперт фактически приводит n наборов приближённых оценок альтернатив, но в различных единицах измерения. Поскольку работать с оценками, заданными в различных единицах измерения неудобно, то в указанных оценках эксперта, представленных в столбцах матриц ∇ и Δ , целесообразно перейти к единым безразмерным единицам измерения. Этого можно добиться, если пронормировать каждый столбец матрицы, разделив его на сумму элементов этого столбца.

Непосредственной проверкой легко устанавливается, что нормирование каждого столбца матрицы Δ приведёт к тому, что каждый вектор-столбец матрицы будет иметь вид

$$\gamma = \left(v_1 / \sum_{k=1}^n v_k, v_2 / \sum_{k=1}^n v_k, \dots, v_n / \sum_{k=1}^n v_k \right)^T.$$

Координаты вектора γ для краткости обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Тогда

$$\gamma_i = v_i / \sum_{k=1}^n v_k, i=1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, векторы γ также ранжируют альтернативы, как и координаты вектора v .

Итак, матрица Δ превратится в матрицу

$$\Delta' = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_1 & \dots & \gamma_1 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \dots & \gamma_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n & \gamma_n & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

Но тогда матрицу ∇ (поскольку она близка к матрице Δ) после нормировки её столбцов можно представить в виде матрицы ∇' :

$$\nabla' = \begin{pmatrix} \gamma_1 + \mu_{11} & \gamma_1 + \mu_{12} & \dots & \gamma_1 + \mu_{1n} \\ \gamma_2 + \mu_{21} & \gamma_2 + \mu_{22} & \dots & \gamma_2 + \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_n + \mu_{n1} & \gamma_n + \mu_{n2} & \dots & \gamma_n + \mu_{nn} \end{pmatrix},$$

где $\mu_{ij}, i, j=1, \dots, n$ – числа, определяемые погрешностями экспертов (для краткости будем называть их нормированными погрешностями экспертов).

Заметим, что соответствующие элементы матриц Δ' , ∇' близки друг к другу, что следует из близости соответствующих элементов матриц ∇ , Δ . Обозначим через ξ случайную величину, определяющую нормированные погрешности экспертов. Тогда каждая строка матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{pmatrix}$$

будет представлять собой реализацию (выборку значений) случайной величины ξ . Если допустить выполнение предположения, что математическое ожидание $M[\xi]$ случайной величины ξ равно нулю, т. е. эксперт не совершает систематических ошибок, то можно считать справедливыми следующие приближённые равенства:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_{ik} \approx 0, i=1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Найдём средние значения элементов строк матрицы ∇' , приняв эти значения соответствующими координатами вектора Λ . Тогда запишем выражение

$$\Lambda = \left(\gamma_1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_{1k}, \gamma_2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_{2k}, \dots, \gamma_n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mu_{nk} \right)^T.$$

С учётом равенства (3) можно считать, что координаты вектора Λ ранжируют альтернативы так же, как и координаты вектора γ , а следовательно, и вектора $v=(v_1, v_2, \dots, v_n)^T$. Из приведённых рассуждений следует простой алгоритм ранжирования альтернатив на основе матрицы парных сравнений.

1. Пронормировать столбцы матрицы ∇ , разделив каждый элемент столбца этой матрицы на сумму элементов столбца, в котором стоит указанный элемент; построить матрицу ∇' , состоящую из нормированных столбцов.

2. Найти средние по строкам значения элементов, полученной в п. 1 матрицы ∇' , и построить вектор Λ , координаты которого выбирать далее для ранжирования альтернатив.

Эффективность метода была проверена на достаточно большом количестве задач. Результаты, полученные при реализации представленного алгоритма, полностью совпали с результатами, вычисленными с помощью традиционного алгоритма, использующего собственный вектор в тех случаях, когда он применим (оценка согласованности матрицы парных сравнений не превышала 0,1), и при условии, что максимальное собственное число матрицы определяется с погрешностью, не превышающей 0,0001.

Необходимо отметить, что можно также привлечь целую группу экспертов. Это позволит уменьшить погрешности оценок анализируемых альтернатив, так как с увеличением числа экспертов возрастает количество реализаций случайной величины ξ . Например, если в экспертизе участвуют m экспертов и каждый из них представляет свою матрицу парных сравнений, то длина выборок случайной величины ξ будет равна nm . В таком случае перепишем равенства (3) следующим образом:

$$(nm)^{-1} \sum_{k=1}^{nm} \mu_{ik} \approx 0, i=1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

Естественно ожидать, что в соответствии с законами больших чисел равенства (4) будут более точными, чем равенства (3) [8]. Следовательно, координаты вектора

$$\Lambda = \left(\gamma_1 + \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} \mu_{1k}, \gamma_2 + \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} \mu_{2k}, \dots, \gamma_n + \frac{1}{nm} \sum_{k=1}^{nm} \mu_{nk} \right)^T,$$

в свою очередь, будут более точно оценивать и ранжировать альтернативы.

Таким образом, предложен простой и надёжный алгоритм обработки результатов парных сравнений для оценки качества альтернатив. Построенный алгоритм позволяет отказаться от применения для указанных целей собственного вектора, соответствующего максимальному собствен-

ному числу матрицы парных сравнений, что приводит к обременению матрицы дополнительными требованиями. Предложенный алгоритм даёт возможность на практике исключить дополнительные ограничения при ранжировании альтернатив методом парных сравнений, которые возникают из-за использования традиционного алгоритма.

Л и т е р а т у р а

1. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.
2. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
3. Харитонов Е. В. Метод согласования результатов субъективных измерений // Измерительная техника. 2000. № 4. С. 45–48.
4. Харитонов В. А., Харитонов Е. В. Новые способы

преобразования форм представления субъективных измерений // Измерительная техника. 2002. № 1. С. 2–32.

5. Сысоев Ю. С., Гилт И. Ю., Винниченко С. М. Использование метода оптимальных групповых стратегий для согласования результатов субъективных измерений // Измерительная техника. 2006. № 2. С. 20–22.

6. Сысоев Ю. С., Магдеев В. Ш., Воронин Е. П. Исследования восприятия текстовой информации со световых взрывозащищенных табло методами субъективных измерений // Пожаровзрывобезопасность. 2012. Т. 21. № 6. С. 43–49.

7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980.

8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 2001.

Дата принятия: 10.04.2018.

ИЗМЕРЕНИЯ В ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЯХ

681.586.075

Метрологический самоконтроль интеллектуальных датчиков измерительных и управляющих систем

Е. М. БЕЛОЗУБОВ¹, В. А. ВАСИЛЬЕВ², П. С. ЧЕРНОВ²

¹Научно-исследовательский институт физических измерений, Пенза, Россия,
²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия, e-mail: pvlvp@yandex.ru

Рассмотрены основные структурные блоки и функциональные возможности интеллектуальных датчиков. Предложена реализация функции метрологического диагностического самоконтроля датчиков с мостовой измерительной схемой. Исследован адаптивный тензорезисторный датчик давления на основе нано- и микроэлектромеханической системы.

Ключевые слова: интеллектуальный датчик, наноэлектромеханическая система, микроэлектромеханическая система, самоконтроль, управление.

The various Russian and foreign definitions of smart (intellectual) sensor, its structure and functions are discussed. Implementation of metrological self-checking function in bridge-based sensors is given along with an example of adaptive strain gauge pressure sensor based on nano- and microelectromechanical system.

Key words: smart sensor, nanoelectromechanical systems, micro, self-monitoring, management.

В настоящее время информационные и коммуникационные технологии уверенно внедряются во все сферы жизнедеятельности человека. В связи с этим на мировых рынках на протяжении уже многих лет наблюдается увеличение спроса на датчики. Одновременно возрастают и предъявляемые к ним требования. Широкое распространение получают так называемые интеллектуальные датчики (ИД) (smart sensors). В зарубежной литературе существует несколько определений данного термина [1]. С технологической точки зрения ИД – это совокупность первичных и промежуточных измерительных преобразо-

вателей (сенсоров), вторичных преобразователей (усилителей, аналого-цифровых преобразователей (АЦП), мультиплексоров), блоков обработки сигнала (микроконтроллеров, цифровых сигнальных процессоров), цифрового интерфейса и других узлов, интегрированных в одном корпусе или системе на кристалле. С позиций функциональности под ИД понимают интеллектуальные функции самоидентификации, самоконтроля, самовосстановления, самокалибровки и автоматической компенсации погрешностей, реализацию алгоритмов совместной работы в сети датчиков, поддержку определённых цифровых