

Мощность k -выборочных критериев проверки однородности законов

Б. Ю. ЛЕМЕШКО, И. В. ВЕРЕТЕЛЬНИКОВА

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Россия, e-mail: ira-veterok@mail.ru

Построены модели предельных распределений k -выборочного критерия однородности Андерсона–Дарлингга. Предложены новые k -выборочные критерии однородности, базирующиеся на использовании двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблатта и Андерсона–Дарлингга. Приведены модели предельных распределений для предложенных критериев. Проведён сравнительный анализ мощности множества k -выборочных критериев, включая критерии Жанга.

Ключевые слова: k -выборочные критерии, критерии однородности, статистика критерия, распределение статистики, мощность критерия.

Models of limiting distributions of the k -sample Anderson–Darling homogeneity test have been made. New k -sample homogeneity tests based on the Smirnov, Lehmann–Rosenblatt and Anderson–Darling two-sample test have been proposed. Models of the limiting distributions for the proposed test have been made. Comparative analysis of the power of the set of k -sample tests, including the Zhang test, has been carried out.

Key words: k -samples tests, homogeneity tests, test statistic, distribution of statistics, power of test.

С необходимостью решения задач проверки гипотез о принадлежности двух (или более) выборок случайных величин одной и той же генеральной совокупности сталкиваются в различных областях. Такая проверка называется проверкой однородности. Данная задача возникает при сличениях результатов лабораторных измерений или аттестации средств измерений, когда необходимо убедиться, что закон распределения случайных ошибок не претерпел существенных изменений по истечении некоторого интервала времени.

Задача проверки однородности k выборок формулируется следующим образом. Пусть x_{ji} – j -е наблюдение i -й выборки, причём $j=1, \dots, n_i$, $i=1, \dots, k$. Предположим, что i -й выборке соответствует непрерывная функция распределения $F_i(x)$. Необходимо проверить гипотезу вида $H_0: F_1(x)=F_2(x)=\dots=F_k(x)$ без указания закона распределения, общего для анализируемых выборок.

Общий подход к построению k -выборочных критериев однородности законов, являющихся аналогами двухвыборочных критериев Колмогорова–Смирнова и Крамера–Мизеса (Лемана–Розенблатта), рассмотрен в работе [1]. При этом подходе статистика k -выборочного критерия представляет собой меру отклонения эмпирических распределений, которые соответствуют конкретным выборкам, от эмпирического распределения, построенного по совокупности анализируемых выборок. В работах [2, 3] говорится о k -выборочном варианте критерия Колмогорова–Смирнова, построенного по этому принципу, а в статье [4] предложен k -выборочный вариант критерия Андерсона–Дарлингга. Предложенные Жангом [5–7] критерии однородности являются развитием критериев однородности Смирнова [8], Лемана–Розенблатта [9, 10] и Андерсона–Дарлингга [11] и позволяют анализировать $k \geq 2$ выборок.

На практике применение k -выборочных критериев сдерживается тем, что для критерия, в лучшем случае, известны лишь критические значения статистик для соответствующих k (как в случае критерия Андерсона–Дарлингга [4]). А для кри-

териев Жанга, распределения статистик которых зависят от объёмов выборок, предлагается оценивать достигнутый уровень значимости p_{value} с помощью метода Монте-Карло [5].

В настоящей работе для ряда k -выборочных критериев однородности авторы построили модели предельных распределений статистик. Такие модели позволяют при использовании данных критериев вычислять оценки p_{value} и осуществлять корректные и информативные выводы.

k -выборочный критерий Андерсона–Дарлингга. Эмпирическую функцию распределения, соответствующую i -й выборке, обозначим $F_{ni}(x)$, а эмпирическую функцию распределения, соответствующую объединённой выборке объёмом $n = \sum_{i=1}^k n_i$, запишем как $H_n(x)$.

Статистика k -выборочного критерия Андерсона–Дарлингга определяется выражением

$$A_{kn}^2 = \sum_{i=1}^k n_i \int_{B_n} \frac{[F_{ni}(x) - H_n(x)]^2}{[1 - H_n(x)]H_n(x)} dH_n(x),$$

где $B_n = \{x \in R: H_n(x) < 1\}$.

В работе [11] в предположении о непрерывности $F_i(x)$ по упорядоченной объединённой выборке $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$ получено простое выражение для вычисления статистики:

$$A_{kn}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(nM_{ij} - jn_i)^2}{j(n-j)},$$

где M_{ij} – число элементов в i -й выборке, которые меньше X_j .

Проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях этой статистики.

Окончательный вид применяемой в критерии статистики можно записать как

$$T_{kn} = [A_{kn}^2 - (k-1)] / \sqrt{D[A_{kn}^2]}. \quad (1)$$

Дисперсия определяется выражением

$$D[A_{kn}^2] = \frac{an^3 + bn^2 + cn + d}{(n-1)(n-2)(n-3)},$$

где

$$a = (4g - 6)(k - 1) + (10 - 6g)H;$$

$$b = (2g - 4)k^2 + 8hk + (2g - 14h - 4)H - 8h + 4g - 6;$$

$$c = (6h + 2g - 2)k^2 + (4h - 4g + 6)k + (2h - 6)H + 4h;$$

$$d = (2h + 6)k^2 - 4hk;$$

$$H = \sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i}; h = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}; g = \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)j}.$$

Асимптотические (предельные) распределения статистики (1) зависят от числа сравниваемых выборок k и не зависят от n_i . С ростом k распределение статистики (1) медленно сходится к стандартному нормальному закону.

В статье [4] для статистики (1) приведена таблица критических значений при некоторых k . На основании результатов статистического моделирования в [12–14] построены модели предельных распределений статистики для $k=2, 11$. Лучшими моделями оказались законы семейства бета-распределений 3-го рода с плотностью

$$f(x) = \frac{\theta_0^{\theta_0}}{\theta_3 B(\theta_0, \theta_1)} \left(\frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_0 - 1} \times \\ \times \left(1 - \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right)^{\theta_1 - 1} / \left[1 + (\theta_2 - 1) \frac{x - \theta_4}{\theta_3} \right]^{\theta_0 + \theta_1}, \quad (2)$$

где $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ – параметры закона; $B(\theta_0, \theta_1)$ – бета-функция.

В табл. 1 модели представлены в виде $B_{\omega}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ при конкретных значениях параметров этого закона. Приве-

Таблица 1
Модели предельных распределений статистики (1)

k	Модель
2	$B_{\omega}(3, 1575; 2, 8730; 18, 1238; 15, 0000; -1, 1600)$
3	$B_{\omega}(3, 5907; 4, 5984; 7, 8040; 14, 1310; -1, 5000)$
4	$B_{\omega}(4, 2657; 5, 7035; 5, 3533; 12, 8243; -1, 7500)$
5	$B_{\omega}(6, 2992; 6, 5558; 5, 6833; 13, 010; -2, 0640)$
6	$B_{\omega}(6, 7446; 7, 047; 5, 0450; 12, 8562; -2, 2000)$
7	$B_{\omega}(6, 7615; 7, 4823; 4, 0083; 11, 800; -2, 3150)$
8	$B_{\omega}(5, 8057; 7, 8755; 2, 9244; 10, 900; -2, 3100)$
9	$B_{\omega}(9, 0736; 7, 4112; 4, 1072; 10, 800; -2, 6310)$
10	$B_{\omega}(10, 2571; 7, 9758; 4, 1383; 11, 186; -2, 7988)$
11	$B_{\omega}(10, 6848; 7, 5950; 4, 2041; 10, 734; -2, 8400)$
∞	$N(0; 0; 1, 0)$

данные модели построены по смоделированным выборкам статистик при числе имитационных экспериментов $N=10^6$ и $n_i=10^3$.

Критерии Жанга. Эти критерии позволяют сравнивать $k \geq 2$ выборок [5–7]. Пусть $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in_i}$ – упорядоченные выборки непрерывных случайных величин с функциями распределения $F_i(x)$, $i=\overline{1, k}$. Как и ранее, $X_1 < X_2 < \dots < X_n$, $n = \sum_{i=1}^k n_i$ – объединённая упорядоченная выборка. Обозначим R_{ij} – ранг j -го упорядоченного наблюдения x_{ij} i -й выборки в объединённой выборке. Пусть $X_0 = -\infty$, $X_{n+1} = +\infty$, а ранги $R_{i,0} = 1$, $R_{i,n_i+1} = n+1$. В критериях используется модификация эмпирической функции распределения $\hat{F}(t)$, принимающая в точках разрыва X_m , $m=\overline{1, n}$ значения $\hat{F}(X_m) = (m - 0,5)/n$ [5].

Статистика Z_K критерия однородности Жанга. Эта статистика имеет вид [5]:

$$Z_K = \max_{1 \leq m \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k n_i \left[F_{i,m} \ln \frac{F_{i,m}}{F_m} + (1 - F_{i,m}) \ln \frac{1 - F_{i,m}}{1 - F_m} \right] \right\}, \quad (3)$$

где $F_m = \hat{F}(X_m) = (m - 0,5)/n$.

Вычисление $F_{i,m} = \hat{F}_i(X_m)$ осуществляется следующим образом. В начальный момент значения $j_i = 0$, $i=\overline{1, k}$. Если $R_{i,j_i+1} = m$, то $j_i := j_i + 1$, $F_{i,m} = (j_i - 0,5)/n_i$, в противном случае, если $R_{i,j_i} < m < R_{i,j_i+1}$, то $F_{i,m} = j_i/n_i$.

Данный критерий правосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при больших значениях статистики (3).

Статистика Z_A критерия однородности. Данная статистика критерия однородности k выборок определяется выражением [5]:

$$Z_A = - \sum_{m=1}^n \sum_{i=1}^k n_i \frac{F_{i,m} \ln F_{i,m} + (1 - F_{i,m}) \ln (1 - F_{i,m})}{(m - 0,5)(n - m + 0,5)}, \quad (4)$$

где $F_m, F_{i,m}$ вычисляются, как определено выше.

Этот критерий левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях статистики (4).

Статистика Z_C критерия. Такая статистика однородности k выборок имеет следующий вид [5]:

$$Z_C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \ln \left(\frac{n_i}{j - 0,5} - 1 \right) \ln \left(\frac{n}{R_{i,j} - 0,5} - 1 \right). \quad (5)$$

Распределения статистики (5) также зависят от объёма выборок и числа сравниваемых выборок. Данный критерий также левосторонний: проверяемая гипотеза H_0 отклоняется при малых значениях статистики (5).

Зависимость распределений статистик (3)–(5) от объёмов выборок осложняет применение критериев Жанга, так как возникают проблемы с вычислением оценки p_{value} . В то же время отсутствие информации о законах распределения статистик и таблиц критических значений в современных условиях не является серьёзным недостатком критериев. Тем более что в программном обеспечении, поддерживающем использование критериев, несложно организовать вычисление достигнутых уровней значимостей p_{value} , применив при этом методы статистического моделирования.

Альтернативный подход к построению k -выборочных критериев. Для анализа k выборок можно к каждой паре применить двухвыборочный критерий со статистикой S (всего $(k-1)k/2$ пар), а решение о принятии или отклонении гипотезы H_0 принимать по совокупности результатов. В качестве статистики такого k -выборочного критерия (в случае выбора правостороннего двухвыборочного критерия) можно рассмотреть, например, статистику вида

$$S_{\max} = \max_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq k}} \{S_{i,j}\} \quad (6)$$

где $S_{i,j}$ – значения статистик используемого двухвыборочного критерия, полученные при анализе i -й, j -й выборок.

Проверяемая гипотеза H_0 будет отклоняться при больших значениях статистики $S_{\max}$. Преимуществом такого рода критерия является и то, что в результате будет определена пара выборок, различие между которыми окажется наиболее значимым с позиций взятого двухвыборочного критерия.

В качестве $S_{i,j}$ можно использовать статистики двухвыборочных критериев Смирнова, Лемана–Розенблата, Андерсона–Дарлинга. В этом случае распределения соответствующих статистик $S_{\max}$ сходятся к некоторым предельным. Модели предельных статистик могут быть найдены по результатам статистического моделирования.

Статистика D_{n_2, n_1} из критерия Смирнова вычисляется в соответствии с соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} D_{n_2, n_1}^+ &= \max_{1 \leq r \leq n_2} \left[\frac{r}{n_2} - F_{1n_1}(x_{2r}) \right] = \max_{1 \leq s \leq n_1} \left[F_{2n_2}(x_{2s}) - \frac{s-1}{n_1} \right]; \\ D_{n_2, n_1}^- &= \max_{1 \leq r \leq n_2} \left[F_{1n_1}(x_{2r}) - \frac{r-1}{n_2} \right] = \max_{1 \leq s \leq n_1} \left[\frac{s}{n_1} - F_{2n_2}(x_{1s}) \right]; \\ D_{n_2, n_1} &= \max(D_{n_2, n_1}^+, D_{n_2, n_1}^-). \end{aligned}$$

При справедливости гипотезы H_0 и неограниченном увеличении объемов выборок статистика критерия Смирнова

$$S_C = \sqrt{n_1 n_2 / (n_1 + n_2)} D_{n_2, n_1} \quad (7)$$

в пределе подчиняется распределению Колмогорова $K(S)$ [8].

k -выборочный вариант критерия Смирнова. В случае k -выборочного варианта критерия в качестве $S_{i,j}$ в формуле (6) предпочтительней брать не статистику Смирнова (7), а её модификацию, имеющую вид

$$S_{\text{mod}} = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} \left(D_{n_2, n_1} + \frac{n_1 + n_2}{4,6 n_1 n_2} \right) \quad (8)$$

Распределение модификации (8) всегда ближе к предельному распределению Колмогорова $K(S)$ [15]. Статистику $S_{\max}$ в этом случае обозначим $S_{\max}^{Sm}$. Модели асимптотических распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$ при числе сравниваемых выборок $k=3, 11$, построенные в настоящей работе по результатам статистического моделирования, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{Sm}$

k	Модель
2	$K(S)$
3	$B_{\text{ш}}(6,3274; 6,6162; 2,8238; 2,4073; 0,4100)$
4	$B_{\text{ш}}(7,2729; 7,2061; 2,6170; 2,3775; 0,4740)$
5	$B_{\text{ш}}(7,1318; 7,3365; 2,4813; 2,3353; 0,5630)$
6	$B_{\text{ш}}(7,0755; 8,0449; 2,3163; 2,3818; 0,6320)$
7	$B_{\text{ш}}(7,7347; 8,6845; 2,3492; 2,4479; 0,6675)$
8	$B_{\text{ш}}(7,8162; 8,9073; 2,2688; 2,4161; 0,7120)$
9	$B_{\text{ш}}(7,8436; 8,8805; 2,1696; 2,3309; 0,7500)$
10	$B_{\text{ш}}(7,8756; 8,9051; 2,1977; 2,3280; 0,7900)$
11	$B_{\text{ш}}(7,9122; 9,0411; 2,1173; 2,2860; 0,8200)$

При равных объёмах сравниваемых выборок распределения статистики $S_{\max}^{Sm}$ (как и в двухвыборочном варианте) обладают существенной дискретностью и отличаются от асимптотических (предельных) распределений. Если есть возможность, то предпочтительней в качестве n_i выбирать взаимно простые числа, тогда распределения $G(S|H_0)$ статистики $S_{\max}^{Sm}$ практически не будут отличаться от асимптотических.

Статистику двухвыборочного критерия Лемана–Розенблата, предложенного авторами [9], применяют в следующей форме [8]:

$$T = \frac{1}{(n_1 + n_2)} \left[n_2 \sum_{i=1}^{n_2} (r_i - i)^2 + n_1 \sum_{j=1}^{n_1} (s_j - j)^2 \right] - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)}, \quad (9)$$

где r_i – порядковый номер (ранг) x_{2i} ; s_j – порядковый номер (ранг) x_{1j} в объединённом вариационном ряде.

В работе [9] также показано, что статистика (9) в пределе распределена как $a1(t)$ из [8].

Таблица 3

Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{LR}$

k	Модель
2	$a1(t)$
3	$Sb(3,2854; 1,2036; 3,0000; 0,0215)$
4	$Sb(2,5801; 1,2167; 2,2367; 0,0356)$
5	$Sb(3,1719; 1,4134; 3,1500; 0,0320)$
6	$Sb(2,9979; 1,4768; 2,9850; 0,0380)$
7	$Sb(3,2030; 1,5526; 3,4050; 0,0450)$
8	$Sb(3,2671; 1,6302; 3,5522; 0,0470)$
9	$Sb(3,4548; 1,7127; 3,8800; 0,0490)$
10	$Sb(3,4887; 1,7729; 3,9680; 0,0510)$
11	$Sb(3,4627; 1,8168; 3,9680; 0,0544)$

Т а б л и ц а 4
Модели предельных распределений статистики $S_{\max}^{AD}$

k	Модель
2	$\alpha 2(t)$
3	B_{ω} (4,4325; 2,7425; 12,1134; 8,500; 0,1850)
4	B_{ω} (5,2036; 3,2160; 10,7792; 10,000; 0,2320)
5	B_{ω} (5,7527; 3,3017; 9,7365; 10,000; 0,3000)
6	B_{ω} (5,5739; 3,4939; 7,7710; 10,000; 0,3750)
7	B_{ω} (6,4892; 3,6656; 8,0529; 10,500; 0,3920)
8	B_{ω} (6,3877; 3,8143; 7,3602; 10,800; 0,4800)
9	B_{ω} (6,7910; 3,9858; 7,1280; 11,100; 0,5150)
10	B_{ω} (6,7533; 4,2779; 6,6457; 11,700; 0,5800)
11	B_{ω} (7,1745; 4,3469; 6,6161; 11,800; 0,6100)

k-выборочный вариант критерия Лемана–Розенблатта.

В случае этого варианта в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{LR}$ вида (6) используется статистика (9).

Построенные модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{LR}$ при числе сравниваемых выбо-

рок $k=3,11$ представлены в табл. 3. В данном случае лучшими моделями оказались Sb -распределения Джонсона. Эти распределения при конкретных значениях параметров закона, обозначенного как $Sb(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ (см. табл. 3), имеют плотность

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi(x-\theta_3)(\theta_2+\theta_3-x)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\theta_0 - \theta_1 \ln \frac{x-\theta_3}{\theta_2+\theta_3-x} \right]^2 \right\}.$$

Представленные модели позволяют по значениям статистики $S_{\max}^{LR}$ при соответствующем числе k сравниваемых выборок находить оценки p_{value} .

Двухвыборочный критерий Андерсона–Дарлинга.

Критерий Андерсона–Дарлинга рассмотрен в работе [10]. Статистика критерия определяется выражением

$$A^2 = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2-1} \frac{[M_i(n_1+n_2) - n_1 i]^2}{i(n_1+n_2-i)}, \quad (10)$$

где M_i – число элементов первой выборки, меньших или равных i -му элементу вариационного ряда объединённой выборки.

Предельным распределением статистики (10) при справедливости проверяемой гипотезы H_0 является распределение $a2(t)$ [7].

При k -выборочном варианте критерия Андерсона–Дарлинга в качестве $S_{i,j}$ в статистике $S_{\max}^{AD}$ вида (6) применяется статистика (10). Для распределений $G(S_{\max}^{AD} | H_0)$ также построены модели асимптотических (предельных) распределений статистики $S_{\max}^{AD}$ для числа сравниваемых выборок $k=3,11$, которые представлены в табл. 4. В этом случае лучшими моделями оказались бета-распределения 3-го рода (2), которые в виде $B_{\omega}(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ с конкретными значениями параметров приведены в табл. 4 и могут использоваться для оценки p_{value} при k сравниваемых выборках.

Сравнительный анализ мощности. Одной из основных характеристик статистического критерия является его мощность относительно заданной конкурирующей гипотезы H_1 . Мощность представляет собой разность $1-\beta$, где β – вероятность ошибки 2-го рода (принять гипотезу H_0 при справедливости H_1) при заданной вероятности α ошибки 1-го рода (отклонить гипотезу H_0 при её справедливости).

Мощность k -выборочных критериев исследовали при разных k для ситуаций, когда в качестве проверяемой гипотезы H_0 рассматривалась принадлежность всех выборок стандартному нормальному закону, а в качестве конкурирующей гипотезы H_1 – принадлежность всех выборок (кроме последней) стандартному нормальному закону. Последняя выборка соответствовала нормальному закону с параметром сдвига $\theta=0,1$ и параметром масштаба $\theta_1=1$. В качестве гипотезы H_2 рассматривалась принадлежность последней выборки нормальному закону с параметром сдвига $\theta_0=0$ и параметром масштаба $\theta_1=1,1$, а в качестве конкурирующей

Т а б л и ц а 5
Оценки мощности критериев относительно альтернатив H_1, H_2, H_3 ($k=4, n \neq n$)

Критерий	$n=0$	$n=0$	$n=100$	$n=300$	$n=500$	$n=10^3$
Относительно альтернативы H_1						
$S_{\max}^{AD}$	0,112	0,131	0,165	0,302	0,438	0,706
AD	0,112	0,131	0,164	0,301	0,433	0,701
$S_{\max}^{LR}$	0,113	0,130	0,162	0,293	0,425	0,686
$S_{\max}^{Sm}$	0,111	0,125	0,151	0,261	0,366	0,605
Z_C	0,111	0,126	0,155	0,260	0,368	0,595
Z_A	0,111	0,127	0,153	0,255	0,360	0,579
Z_K	0,109	0,121	0,141	0,219	0,300	0,502
Относительно альтернативы H_2						
Z_C	0,106	0,122	0,158	0,306	0,468	0,761
Z_A	0,107	0,124	0,158	0,305	0,463	0,745
Z_K	0,106	0,120	0,145	0,249	0,367	0,606
AD	0,104	0,110	0,123	0,180	0,254	0,474
$S_{\max}^{AD}$	0,101	0,104	0,111	0,145	0,195	0,381
$S_{\max}^{LR}$	0,102	0,105	0,108	0,128	0,153	0,221
$S_{\max}^{Sm}$	0,102	0,103	0,105	0,118	0,135	0,197
Относительно альтернативы H_3						
Z_A	0,103	0,107	0,116	0,179	0,274	0,566
Z_C	0,103	0,107	0,115	0,173	0,257	0,555
Z_K	0,103	0,107	0,114	0,161	0,222	0,410
AD	0,102	0,106	0,113	0,143	0,179	0,291
$S_{\max}^{Sm}$	0,103	0,104	0,112	0,138	0,166	0,257
$S_{\max}^{AD}$	0,101	0,103	0,107	0,124	0,147	0,229
$S_{\max}^{LR}$	0,102	0,102	0,105	0,116	0,130	0,183

гипотезы H_3 – принадлежность последней выборки логистическому закону с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1 \sqrt{3}} \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\} / \left[1 + \exp\left\{-\frac{\pi(x-\theta_0)}{\theta_1 \sqrt{3}}\right\}\right]^2$$

и параметрами $\theta_0=0$, $\theta_1=1$.

Оценки мощности находили по результатам моделирования распределений статистик при справедливости проверяемой $G(S|H_0)$ и конкурирующих гипотез $G(S|H_1)$, $G(S|H_2)$, $G(S|H_3)$, а также при равных объемах n_i сравниваемых выборок. В качестве примера в табл. 5 приведены оценки мощности критериев при $\alpha=0,1$ для $k=4$.

Заключение. Проведенный анализ мощности k -выборочных критериев позволяет сделать следующие выводы.

1. Относительно конкурирующих гипотез, соответствующих изменению параметра сдвига, критерии можно упорядочить по мощности следующим образом:

$$S_{\max}^{AD} > AD > S_{\max}^{LR} > S_{\max}^{Sm} > Z_C > Z_A > Z_K.$$

2. Относительно изменения параметра масштаба их можно упорядочить как

$$Z_C > Z_A > Z_K > AD > S_{\max}^{AD} > S_{\max}^{Sm} > S_{\max}^{LR}.$$

При таком упорядочивании критерии Жанга со статистиками Z_A , Z_C практически эквивалентны по мощности, а критерий Андерсона–Дарлинга заметно уступает критериям Жанга.

3. Когда три выборки принадлежат нормальному закону, а четвертая – логистическому, то критерии располагаются по мощности в следующем порядке:

$$Z_A > Z_C > Z_K > AD > S_{\max}^{Sm} > S_{\max}^{AD} > S_{\max}^{LR}.$$

4. С ростом количества сравниваемых выборок тех же объемов мощность критерия относительно аналогичных конкурирующих гипотез как правило снижается. Например, сложнее выделить ситуацию и отдать предпочтение конкурирующей гипотезе, когда лишь одна из анализируемых выборок принадлежит некоторому другому закону.

5. Нельзя не отметить, что критерии Жанга со статистиками Z_K , Z_A , Z_C относительно некоторых альтернатив обладают заметным преимуществом в мощности.

Построенные модели предельных распределений статистик для k -выборочных критериев однородности (Андерсона–Дарлинга и предложенных в работе) дают возможность при использовании критериев осуществлять корректные и информативные выводы с вычислением достигнутого уровня значимости p_{value} . При этом можно воспользоваться доступным программным обеспечением [16].

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственной работы «Обеспечение проведения научных исследований» (№ 1.4574.2017/6.7) и проектной части государственного задания (№ 1.1009.2017/4.6).

Л и т е р а т у р а

1. Kiefer J. K-Sample Analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramer-v. Mises Tests // Annals of Mathematical Statistics. 1959. V. 30. No. 2. P. 420–447.
2. Conover W. J. Several k-sample Kolmogorov-Smirnov tests // Annals of Mathematical Statistics. 1965. V. 36. No. 3. P. 1019–1026.
3. Conover W. J. Practical Nonparametric Statistics. 3rd ed. Wiley, 1999.
4. Scholz F. W., Stephens M. A. K-Sample Anderson–Darling Tests // Journal of the American Statistical Association. 1987. V. 82. No. 399. P. 918–924.
5. Zhang J. Powerful Two-Sample Tests Based on the Likelihood Ratio // Technometrics. 2006. V. 48. No. 1. P. 95–103.
6. Zhang J. Powerful goodness-of-fit and multi-sample tests // PhD Thesis. York University, Toronto. 2001. P. 113. [Электрон. ресурс]: <http://www.collectionscanada.gc.ca/obj/s4/f2/dsk3/ftp05/NQ66371.pdf> (дата обращения: 28.01.2018).
7. Zhang J., Wu Y. k-Sample tests based on the likelihood ratio // Computational Statistics & Data Analysis. 2007. V. 51. No. 9. P. 4682–4691.
8. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1983.
9. Lehmann E. L. Consistency and unbiasedness of certain nonparametric tests // Annals of Mathematical Statistics. 1951. V. 22. No 1. P. 165–179.
10. Rosenblatt M. Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic // Annals of Mathematical Statistics. 1952. V. 23. P. 617–623.
11. Pettitt A. N. A two-sample Anderson-Darling rank statistic // Biometrika. 1976. V. 63. No.1. P. 161–168.
12. Лемешко Б. Ю. Критерии проверки гипотез об однородности. Руководство по применению. М.: ИНФРА-М, 2017.
13. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б., Веретельникова И. В. О применении критериев проверки однородности законов распределения // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2017. № 41. С. 24–31.
14. Lemeshko B. Y., Veretelnikova I. V., Lemeshko S. B., Novikova A. Y. Application of Homogeneity Tests: Problems and Solution / V. Rykov, N. Singpurwalla, A. Zubkov. Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science.: monograph. Springer. 2017. No. 10684. P. 461–475.
15. Лемешко Б. Ю., Лемешко С. Б. О сходимости распределений статистик и мощности критериев однородности Смирнова и Лемана–Розенблатта // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 9–14.
16. ISW–Программная система статистического анализа одномерных наблюдений. [Электрон. ресурс]: <https://ami.nstu.ru/~headrd/ISW.htm> (дата обращения: 17.03.2018).

Дата принятия: 23.04.2018.