

7. Васин В. В., Серёжникова Т. И. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 2. С. 15–23.

8. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб: Политехника, 2001.

9. Римских М. В., Евсеев В. Д., Сизиков В. С. Реконструкция смазанных изображений различными методами // Оптический журнал. 2007. Т. 74. № 11. С. 53–57.

10. Кац А. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1969.

Дата принятия: 07.02.2017.

536.51: 621.317

Повышение точности измерений резонансных характеристик

В. Н. ЕГОРОВ, Е. Ю. ТОКАРЕВА

Восточно-Сибирский филиал Всероссийского научно-исследовательского института физико-технических и радиотехнических измерений, Иркутск, Россия, e-mail: egorov@niiftri.irk.ru

Рассмотрен способ повышения точности измерений резонансной частоты и добротности резонаторов различной природы. Результат достигается аппроксимацией экспериментальной характеристики резонатора с помощью обобщённой резонансной функции. Резонансная функция учитывает прямое нерезонансное прохождение сигнала от входа резонатора до выхода и содержит параметры, определяемые при аппроксимации. Способ даёт высокую точность измерений резонансных параметров по экспериментальной резонансной кривой, в том числе с искажениями. Приведены результаты измерений резонансной частоты и собственной добротности обычным и предлагаемым способом. Подход может быть применён при измерении характеристик электромагнитных и акустических резонаторов в газовой акустической и диэлектрической термометрии.

Ключевые слова: колебательная система, резонансная частота, добротность, аппроксимация.

The approach to increase the accuracy of resonant frequency and quality factor measurements of different resonators is presented. Result is being achieved with using of generalized resonance function for approximation of resonator experimental characteristics. The function takes into account a direct (non-resonance) signal transition from resonator input to its output and includes the parameters determined at resonator characteristics approximation. The approach gives high measurement accuracy of resonance parameters for experimental resonance curve (including curve with distortions). The measurement results of resonance frequency and unloaded quality factor are given for this and usual approaches. Approach can be used for characteristics measurements of electromagnetic and acoustic resonators in gas acoustic and dielectric thermometry.

Key words: oscillation system, resonance frequency, quality factor, approximation.

Резонансные методы измерения различных физических величин являются одними из наиболее точных и чувствительных [1]. Физическая величина в резонансных методах действует на измерительную колебательную систему (резонатор), изменяя её резонансную частоту и/или добротность. Резонансная частота экспериментально определяется как частота возбуждающего гармонического сигнала при максимальном отклике резонатора. Нагруженная добротность резонатора чаще всего определяется по ширине полосы пропускания на уровне 0,707 максимального сигнала при линейном детектировании («по напряжению») и на уровне 0,5 (или –3,01 дБ) при квадратичном детектировании («по мощности») выходного сигнала. Вид экспериментальных резонансных характеристик обычно существенно отличается от расчётных моделей, в частности от классической резонансной кривой Лоренца.

В статье рассмотрены причины искажения резонансных характеристик и пути повышения точности измерений резонансной частоты и собственной добротности, в том числе по искажённой характеристике. Структурные схемы измерительных трактов с проходным резонатором, с резонатором-неоднородностью и их амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) представлены на рис.1.

Физической основой резонансных методов измерения служит теория колебаний. Вынужденные колебания представляются в виде ряда по собственным функциям, описывающим собственные колебания системы без возбуждающего источника. Собственные частоты системы получаются в результате решения однородной краевой задачи. Амплитуда $A(\omega)$ вынужденного колебания описывается суммой собственных колебаний с сильной частотной

зависимостью их амплитуд вблизи собственных частот:

$$A(\omega) = \sum_n \frac{A_n}{(\omega^2 - \omega_n^2)} Y_n(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где A_n – коэффициент возбуждения; ω – частота возбуждения; ω_n – собственная комплексная частота n -го типа колебания [2]; $Y_n(\mathbf{r})$ – n -я собственная функция (координат), описывающая распределение колебания в системе; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор.

Каждый член ряда (1) представляет собственную функцию – моду (тип колебания) с коэффициентом возбуждения A_n . Вид множителя перед n -й собственной функцией в (1), т. е. амплитуды колебания

$$A(\omega) = A_n / (\omega^2 - \omega_n^2), \quad (2)$$

является универсальным для линейных колебательных систем и не зависит от природы колебания и среды (с малым поглощением) в резонаторе [2–4].

При близких значениях $|\dot{\omega}_n|$ нескольких собственных частот и частоты возбуждения ω необходимо учитывать эти собственные колебания в полном колебании резонатора, т. е. учитывать несколько членов в (1). Резонансная зависимость вида (2) при этом может существенно искажаться, а основное преимущество резонансного метода – представление колебания одним членом ряда (1) – утрачиваться. Поэтому принимаются меры для разрежения спектра возбуждаемых колебаний, с тем чтобы соседние резонансы не искажали резонансную характеристику рабочего колебания. Зависимость (2) описывает амплитуду вынужденного колебания в резонаторе, однако вид АЧХ измерительного тракта с резонатором будет зависеть от схемы включения резонатора в тракт. Для схемы с проходным резонатором АЧХ будет иметь максимум на резонансной частоте (см. рис. 1, а). В схеме с резонатором-неоднородностью на резонансной частоте будет минимум АЧХ (см. рис. 1, б).

Собственные колебания в реальных резонаторах всегда затухают из-за потерь энергии. Для описания резонаторов используют понятия комплексной собственной частоты ω_n и нагруженной добротности Q_n :

$$\omega_n = \omega'_n + j\omega''_n; Q_n = \omega'_n / (2\omega''_n), \quad (3)$$

где $\omega'_n \gg \omega''_n$, $\omega''_n > 0$.

Собственная комплексная частота ω_n является характеристикой колебательной системы и связана с параметрами системы. Частота возбуждения ω в (1), (2) является характеристикой сигнала (воздействия на систему) и существенна. Преобразуем (2) с учётом (3):

$$\frac{A_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = \frac{A_n}{\omega^2 - \omega_n'^2 + \omega_n''^2 - j2\omega_n'\omega_n''} = \frac{A_n Q_n}{\omega_n'^2 [\xi + (\xi^2 + 1)/(4Q_n^2) - j]}, \quad (4)$$

где $\xi = 2\Delta\omega Q_n / \omega'_n$ – обобщённая нагруженная расстройка, $\Delta\omega = \omega - \omega'_n$ – обычная расстройка.

Модуль (4) будет иметь вид резонансной кривой «по напряжению» $|A_n|Q_n(\omega'_n)^{-2} / \sqrt{1 + [\xi + \delta]^2}$, где $\delta = (\xi^2 + 1)/(4Q_n^2)$. Отметим, что максимум резонансной кривой смещён относительно резонансной частоты ω'_n на $\Delta\xi \approx -(4Q_n)^{-1}$, что соответствует относительному сдвигу по частоте $\delta\omega \approx -1/(8Q_n^2)$.

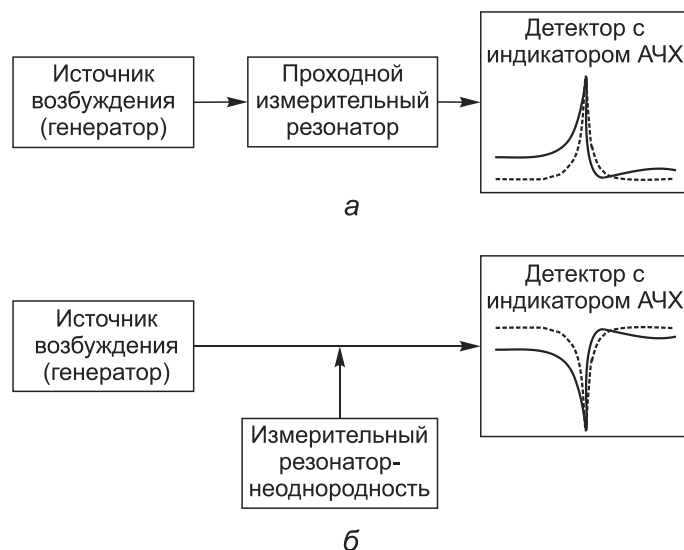


Рис. 1. Структурные схемы измерительных трактов с проходным резонатором (а) и резонатором-неоднородностью (б) и их АЧХ

В окрестности высокодобротного резонанса ($Q_n \geq 10^3$) член $\delta = (\xi^2 + 1)/(4Q_n^2) \ll \xi$ мал и далее не учитывается, как и вызванное им смещение резонансной частоты от максимума АЧХ. Выражение (4) с точностью до постоянного множителя представляет коэффициент передачи резонатора, связывающий сигналы на его входе и выходе. Амплитуда выходного гармонического сигнала резонатора в соответствии с определением для аналитического сигнала равна его модулю (4) [5]:

$$U(\xi) = K_0 / \sqrt{1 + \xi^2}, \quad (5)$$

где $K_0 = |A_n|Q_n(\omega'_n)^{-2}D$ – модуль коэффициента передачи «по напряжению» при $\xi = 0$ (на резонансной частоте), $D = \text{const}$.

Амплитудный детектор гармонического сигнала на выходе резонатора производит над сигналом не только операцию выделения огибающей (т. е. получение выходного сигнала, пропорционального модулю входного), но и преобразование по некоторому закону. На низких частотах обычно используется приближение линейного детектора, когда детектор возводит характеристику (5) в степень 1, в диапазоне сверхвысоких частот (СВЧ) чаще пользуются приближением квадратичного детектора, когда детектор возводит характеристику (5) в степень 2 и его выходной сигнал V зависит от ξ как

$$V(\xi) = K_0^2 / (1 + \xi^2). \quad (6)$$

Линейное и квадратичное приближения в законе детектирования соответствуют ограничению линейным или квадратичным членами в аппроксимации характеристики детектора степенным рядом. Возможна также аппроксимация характеристики детектора в виде

$$f(u) = au^b, \quad (7)$$

где a , b – параметры аппроксимации (неизвестные); u – амплитуда входного сигнала детектора (выходного)

сигнала резонатора).

В частности, характеристику проходного резонатора с амплитудным детектором на выходе можно представить как

$$F(\xi) = T \left(1 / \sqrt{1 + \xi^2} \right)^b, \quad (8)$$

где T – коэффициент передачи тракта на резонансной частоте при $\xi = 0$; b – показатель степени в аппроксимации характеристики детектора ($b = 1$ для линейного и $b \approx 2$ для близкого к квадратичному).

Уровни на резонансной характеристике для измерения полосы пропускания резонанса и его добротности зависят от характеристики детектора и, в частности, изменяются в пределах 0,707–0,5 максимума АЧХ при изменении показателя степени b в аппроксимации (7) от 1 до 2. Резонансная частота определяется как частота максимума коэффициента передачи (8). В приближении $\delta = (\xi^2 + 1)/(4Q_n) = 0$ преобразования сигнала (5), (6), (8) не смещают резонансную частоту, она находится в точке $\xi = 0$ (т. е. в точке $\omega = \omega_n'$), а резонансная АЧХ в этом приближении симметрична относительно оси $\xi = 0$.

Существенная несимметрия экспериментальных резонансных зависимостей и их отличие от (5), (6) являются скорее правилом, чем исключением. Для учёта этих отличий в работах [6], [7] используется аппроксимация резонансной зависимости коэффициента передачи всего измерительного тракта в виде

$$L(\omega) = A / (\omega^2 - \omega_n'^2) + B + C\omega, \quad (9)$$

где A, B, C – постоянные, в общем случае комплексные [7].

Резонансный сигнал описывается первым членом (9) и совпадает с (4). Присутствие в (9) постоянного слагаемого B и слагаемого, линейно изменяющегося по частоте с коэффициентом C , не следует из теории и представляется простейшей попыткой формального описания наблюдаемых отличий экспериментальных резонансных зависимостей от теории. Постоянная составляющая B в (9) физически может означать нерезонансный фон, постоянное смещение на детекторе или другой постоянный сигнал, который суммируется с резонансным сигналом на детекторе. Линейная частотная зависимость с коэффициентом C в (9), аддитивная с резонансным сигналом, не имеет ясно физического смысла. Рост амплитуды колебания (для $C > 0$) при возрастании частоты возбуждения ω или убывание амплитуды при $C < 0$ до отрицательных значений ничем не ограничены и не согласуются с физическими представлениями.

Экспериментальные АЧХ, наблюдаемые в пределах нескольких полос пропускания рабочего резонанса, во многих случаях существенно отличаются от резонансных зависимостей (5), (6) и при отсутствии других резонансов. Например, они могут иметь два экстремума (максимум и минимум) и асимптотически приближаться к одному и тому же постоянному уровню (фону) с разных сторон при $\xi \rightarrow \pm\infty$ (см. рис. 1). Такие характеристики наблюдаются экспериментально в резонаторах различной природы и разных типов, что указывает на общий механизм формирования характеристик, не зависящий от физической природы резонатора и заполняющей его среды. Данные

АЧХ не могут быть удовлетворительно аппроксимированы зависимостями (5), (6) или функциями (9) и их линейной комбинацией с приемлемым числом параметров (коэффициентов) аппроксимации.

В работе [8] показано, что резонансные АЧХ существенно несимметричного вида, в том числе с двумя экстремумами, появляются в результате прямого нерезонансного прохождения (просачивания) гармонического сигнала от входа до выхода резонатора и векторного (т. е. с учётом фаз) сложения на входе детектора этого сигнала с резонансным сигналом. Прямое прохождение сигнала можно рассматривать как нерезонансный фон, частотная зависимость амплитуды и фазы которого пренебрежимо мала в пределах нескольких частотных полос пропускания измерительного резонатора. Частотной зависимостью амплитуды и фазы резонансного сигнала пренебречь, естественно, нельзя.

В реальных резонаторах нерезонансный фон всегда существует в той или иной мере как сигнал со слабой частотной зависимостью вдали от резонансов [2]. Он, как правило, полностью неустраивает технически и должен учитываться в модели резонатора. В акустических резонаторах сигнал в приёмном микрофоне может быть вызван не только резонансным прохождением акустических волн через газ в объёме резонатора, но и нерезонансным прохождением по его стенкам от излучателя к микрофону. В отличие от нерезонансного фона, фаза которого в пределах резонансной кривой может рассматриваться как постоянная, у резонансного сигнала фаза в окрестности резонанса резко изменяется с частотой и векторное сложение резонансного сигнала и нерезонансного фона может значительно искажать классический вид резонансной зависимости (5), (6). В результате зависимость может стать сильно несимметричной, в том числе с двумя экстремумами. Это приводит к смещению максимума (минимума) АЧХ относительно собственной частоты резонатора. Рассмотрим это на примере электромагнитного резонатора СВЧ.

Резонаторы с прямым просачиванием сигнала от входа на выход могут быть представлены [8] в виде резонатора без просачивания с коэффициентом передачи

$$S_{21}(\xi) = b_2/a_1 = |S_{21}(\xi)| \exp(j\Psi(\xi)),$$

между входом и выходом которого включен дополнительный отрезок тракта с коэффициентом передачи

$$S'_{21} = b'_2/a'_1 = \exp(-j\varphi).$$

Здесь $\Psi(\xi)$ – фаза коэффициента передачи $S_{21}(\xi)$ резонансного сигнала; φ – фазовый сдвиг сигнала прямого просачивания от входа до выхода; a_1, a'_1 – комплексные амплитуды волн, падающих на вход резонансного канала и канала просачивания; b_2, b'_2 – комплексные амплитуды прошедших на выход резонатора волн. Падающая на вход резонатора с прямым просачиванием волна может быть представлена как сумма синфазных волн $a_1 + a'_1 = a$, одна из которых a'_1 падает на вход резонатора без просачивания, вторая a_1 – на вход канала прямого просачивания. Комплексная амплитуда b волны на выходе резонатора получается векторным сложением b_2, b'_2 . Введём коэффициент просачивания нерезонансного сигнала на входе

$M = a'_1/a_1$, вещественный вследствие синфазности a_1 и a'_1 . Коэффициент передачи резонатора с прямым просачиванием сигнала запишем как

$$S = \frac{b}{a} = \frac{S_{21}a_1 + S'_{21}a'_1}{a_1 + a'_1} = \frac{S_{21} + M \exp(-j\varphi)}{1 + M}. \quad (10)$$

Для модуля $|S(\xi)|$ и фазы $\Phi(\xi)$ коэффициента передачи получим

$$|S(\xi)| = \left[\frac{A^2(\xi) + B^2(\xi)}{(1+M)^2} \right]^{1/2}; \quad \Phi(\xi) = \arctg(B(\xi)/A(\xi)), \quad (11)$$

где $A(\xi) = |S_{21}(\xi)| \cos \Psi(\xi) + M \cos \varphi$,

$$B(\xi) = |S_{21}(\xi)| \sin \Psi(\xi) - M \sin \varphi.$$

Коэффициент просачивания на выходе резонатора $N = M/|S_{21}(0)|$. В окрестности высокодобротного резонанса $|\partial \varphi / \partial \xi| \ll |\partial \Psi(\xi) / \partial \xi|$, т. е. фаза сигнала прямого просачивания φ мало изменяется в сравнении с изменением $\Psi(\xi)$ и далее полагается постоянной. Сама же величина φ в общем случае не мала и, в частности, может принимать значения $\pi/2$, π и т. д. Коэффициент передачи «по мощности» выразим из (10), (11) как

$$K_p(\xi) = |S(\xi)|^2 = (1+M)^{-2} \left\{ |S_{21}(\xi)|^2 + M^2 + 2|S_{21}(\xi)|M \cos[\Psi(\xi) + \varphi] \right\}. \quad (12)$$

Здесь для проходного резонатора

$$|S_{21}(\xi)| = S_{21}(0) / \sqrt{1 + \xi^2}; \quad S_{21}(0) = 2\sqrt{\beta_1\beta_2} / (1 + \beta_1 + \beta_2); \quad \Psi(\xi) = -\arctg \xi,$$

где β_1 , β_2 – коэффициенты связи резонатора по входу и выходу.

Для резонатора, включённого как неоднородность,

$$|S_{21}(\xi)| = \sqrt{[S_{21}^2(0) + \xi^2] / [1 + \xi^2]};$$

$$\Psi(\xi) = \arctg \left\{ \xi [1 - S_{21}(0)] / [S_{21}(0) + \xi^2] \right\}.$$

Величина $S_{21}(0)$ резонатора-неоднородности зависит от режима резонанса, коэффициента связи резонатора с трактом β и изменяется в пределах $1/(1+\beta) \geq S_{21}(0) \geq (1-\beta)/(1+\beta)$ для режимов от резонанса стоячей волны до резонанса бегущей волны соответственно [8].

Максимум (минимум) $K_p(\xi)$ в (12), принимаемые за резонанс в проходном резонаторе и резонаторе-неоднородности соответственно, сдвигаются из точки $\xi = 0$ в точку $\xi = v$. Эта точка может быть найдена как корень уравнения $\partial K_p(\xi) / \partial \xi = 0$ [8], которое имеет в общем случае два корня, соответствующих АЧХ с двумя экстремумами. Смещение v можно найти также в результате аппроксимации экспериментальных данных по (12).

Измерение резонансной частоты по точке максимума (минимума) несимметричной АЧХ вносит погрешность в измеренное значение, в этом случае необходимо учитывать смещение точки максимума (минимума) характеристики резонатора относительно резонансной частоты. Измерение добротности обычным способом также приведет к значительным погрешностям, поскольку уровень по-

ловинной мощности становится неопределённым и коэффициент передачи $S_{21}(0)$ не совпадает с измеряемым значением $S(0)$.

В отличие от обычной резонансной кривой, содержащей три параметра – резонансную частоту f_0 , нагруженную добротность Q_n и коэффициент передачи $S_{21}(0)$, резонансная кривая (12) содержит ещё коэффициент просачивания M и фазу сигнала просачивания φ . Пять неизвестных параметров функции (12) могут быть найдены в результате аппроксимации экспериментальных значений коэффициента передачи, в частности, по критерию наименьших квадратов. Экспериментальные данные целесообразно нормировать и в качестве аргумента использовать обобщённую расстройку для универсальности программ расчёта.

Массив экспериментальных значений коэффициента передачи проходного резонатора по мощности $K_p(\xi)$ удобно преобразовать к нормированному виду $T(\xi) = K_p(\xi) / K_{p\max}$, где $K_{p\max}$ – максимальное значение $K_p(\xi)$ на частоте $f_{\max}$, принимаемой приближённо за резонансную [9]. Массив частот измерения удобно преобразовать в массив значений нагруженной обобщённой расстройки ξ . Необходимые для такого преобразования значения Q_n , f_0 неизвестны априорно. По искажённой резонансной кривой они могут быть лишь приближённо оценены. Введём нормированные параметры аппроксимации $p_1 = M/|S_{\max}|$, $p_2 = S_{21}(0)/|S_{\max}|$, где $|S_{\max}| = \sqrt{K_{p\max}}$. Представим искомое значение нагруженной добротности в виде $Q_n = p_3 Q_e$, где p_3 – поправочный множитель, определяемый в результате аппроксимации, Q_e – экспериментальная оценка нагруженной добротности по искажённой резонансной кривой. После нахождения p_3 произведение $p_3 Q_e$ даст уточнённую величину Q_n . За резонансную частоту $f_{\max}$ приближённо принимается частота, соответствующая максимуму (минимуму) искажённой резонансной кривой, сдвинутая относительно искомой резонансной частоты резонатора без просачивания f_0 на $\Delta f_{\max} = f_{\max} - f_0$. Введём параметр аппроксимации $p_4 = 2Q_e(f/f_0)\delta f_{\max} = v/p_3$, где $\delta f_{\max} = \Delta f_{\max}/f_{\max}$. Экспериментальную обобщённую расстройку определим как $x = 2Q_e(f - f_{\max})/f_{\max}$. Её сдвиг от ξ в (12) выразим как $v = \xi - p_3 x$ или

$$2Q(f - f_0)/f_0 - p_3 2Q_e(f - f_{\max})/f_{\max} = p_3 p_4. \quad (13)$$

При резонансе $\xi = 0$, $f = f_0$, тогда из (13) следует $f_0 = f_{\max}(1 - p_4/(2Q_e))$.

Выражение (12) для коэффициента передачи «по мощности» в проходном резонаторе с просачиванием после нормировки и перехода к обобщённой расстройке x примет вид

$$y(x) = \frac{p_2^2}{(1 + p_1|S_{\max}|)^2} \left\{ \frac{1}{1 + [q(x)]^2} + \left(\frac{p_1}{p_2} \right) \frac{2 \cos[-\arctg[q(x)] + p_5]}{\sqrt{1 + [q(x)]^2}} + \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \right\}, \quad (14)$$

где $q(x) = p_3(x + p_4)$, $q(0) = v$, параметры $p_1 \dots p_4$ определены выше, $p_5 = \varphi$.

Для резонатора-неоднородности массив значений коэффициента передачи удобно нормировать как

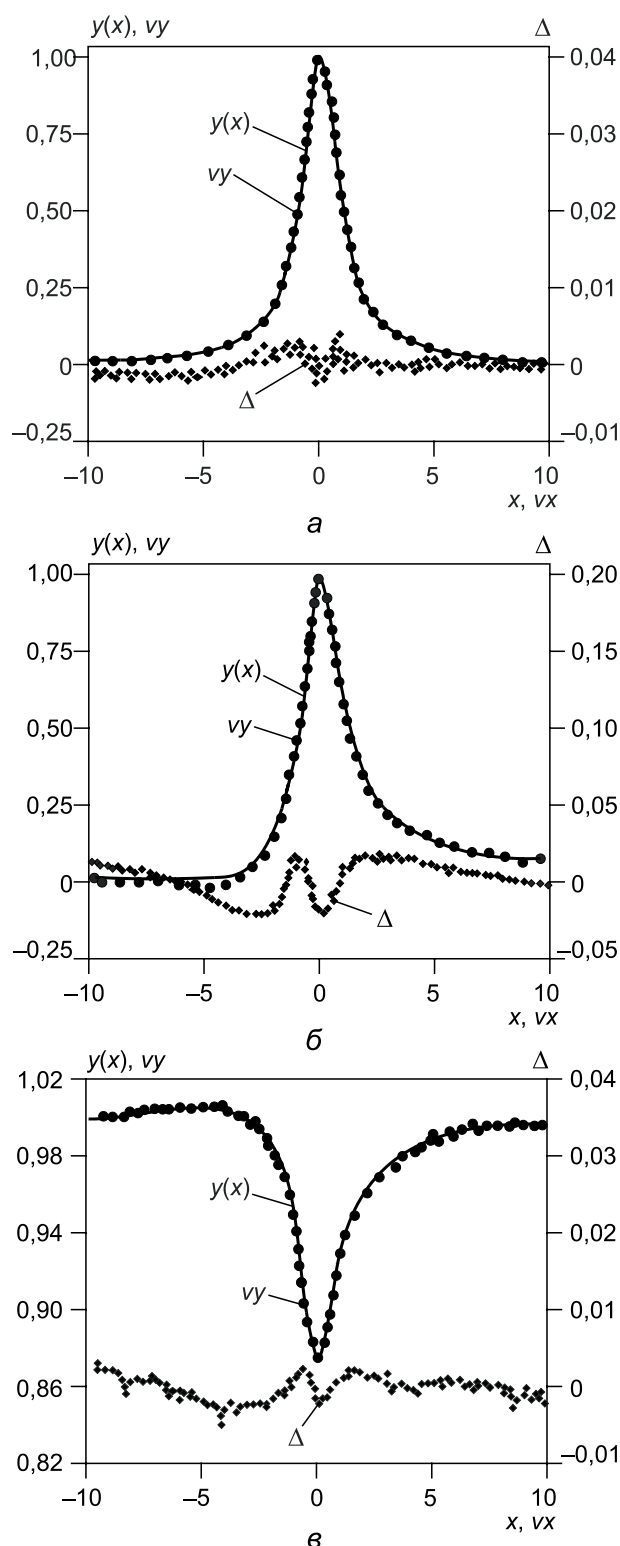


Рис. 2. Аппроксимация экспериментальной характеристики y_u функцией $y(x)$ и погрешность аппроксимации Δ :
а, б – проходных резонаторов добротностью $Q_{00} = 33698$; 907, соответственно; в – резонатора-неоднородности добротностью $Q_{00} = 558$

$T(\xi) = Kp(\xi)/Kp_{\infty}$, где Kp_{∞} – значение $Kp(\xi)$ вдали от резонанса при $|\xi| \rightarrow \infty$. В этом случае $p_1 = M$, $p_2 = S_{21}(0)$. Выражение для нормированной резонансной кривой «по мощности» получим из (12) в виде [8]:

$$y(x) = \frac{1}{K_{p_{\infty}}(1+p_1)^2} \left\{ \frac{p_2^2 + [q(x)]^2}{1 + [q(x)]^2} + 2p_1 \sqrt{\frac{p_2^2 + [q(x)]^2}{1 + [q(x)]^2}} \cos[\Theta(x)] + p_1^2 \right\}, \quad (15)$$

где $\Theta(x) = \arctg \left[\frac{(1-p_2)q(x)}{p_2 + [q(x)]^2} \right] + p_5$, $K_{p_{\infty}} = \frac{[1 + 2p_1 \cos(p_5) + p_1^2]}{(1+p_1)^2}$.

Экспериментальные значения расстройки x ограничены по модулю $|x| \leq g$ и на границах $\pm g$ исследуемого частотного интервала $K_p(\pm g) \neq K_{p_{\infty}}$. Для учёта этого отличия введём шестой параметр аппроксимации $p_6 = [K_p(-g) + K_p(+g)]/(2K_{p_{\infty}})$. Тогда в (15)

$$K_{p_{\infty}} = [K_p(-g) + K_p(+g)]/(2p_6).$$

Значения $p_1 \dots p_6$ находят по минимуму $\sum_i [T(x_i) - y(x_i, p_1 \dots p_6)]^2$ на частотах измерения f_i . По найденным параметрам $p_1 \dots p_6$ рассчитываются: резонансная частота f_0 , нагруженная добротность Q_n и коэффициент передачи $S_{21}(0)$.

При одинаковых связях $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ собственная добротность проходного резонатора будет $Q_0 = Q_n(1 + 2\beta)$, где $2\beta = S_{21}(0)/(1 - S_{21}(0))$. В резонаторах без прямого просачивания $M = 0$ и $p_1 = p_4 = p_5 = 0$, $p_3 = 1$, $q(x) = x$. Выражения (14) при $p_2 = 1$ и (15) при $p_2 = S_{21}(0)$, $K_{p_{\infty}} = 1$ принимают соответственно вид обычной нормированной резонансной кривой $y(x) = 1/(1 + x^2)$ проходного резонатора и $y(x) = (S_{21}(0)^2 + x^2)/(1 + x^2)$ для резонатора-неоднородности.

Изложенный подход экспериментально исследован на электромагнитных резонаторах диапазона СВЧ из состава Государственного эталона единиц диэлектрической проницаемости в диапазоне частот от 1 до 178,4 ГГц ГЭТ 110–2012. Двумерный числовой массив коэффициента передачи резонансного измерительного тракта с анализатора цепей P2M-18 в окрестности резонанса в 2001 точке по частоте сохранялся в виде файла и обрабатывался с помощью программ, реализующих данный подход. Исследовались резонаторы с добротностью Q_{00} от 34000 до 550. На рис. 2 приведены экспериментальные нормированные резонансные характеристики (точки) с их аппроксимациями по (14), (15) (сплошные линии) и абсолютные погрешности аппроксимации $\Delta = y(x) - y_u$. Символы y_u , v_x обозначают экспериментальные числовые массивы нормированного коэффициента передачи и обобщённой расстройки.

Прходной резонатор с колебанием H_{013} на частоте 9,59152 ГГц имел собственную добротность около 33 000. На рис. 2, а приведена аппроксимация функцией $y(x)$ из (14) в широкой полосе $-10 \leq x \leq 10$. Относительное смещение резонансной частоты от максимума резонансной характеристики составило $\delta f = 1,69 \cdot 10^{-7}$, значения собственной добротности, измеренной обычным способом Q_{0e} и более точно по аппроксимации Q_{00} , составили $Q_{0e} = 33865$ и $Q_{00} = 33698$. На рис. 2, б приведены результаты аппроксимации резонансной характеристики низкодобротного проходного резонатора с сильной связью

и искажениями. Измеренная обычным способом добротность резонатора $Q_{0e} = 1090$ уточнена аппроксимацией до $Q_{00} = 907$. Смещение резонансной частоты составило $\delta f = 7,73 \cdot 10^{-5}$. На рис. 2, в приведена аппроксимация характеристики резонатора-неоднородности с $Q_{00} = 558$.

Соотношения (12), (14), (15) относятся к квадратичному детектору колебаний. Для линейного детектора при аппроксимации резонансов функцией $y(x)$ нужно выполнить преобразование экспериментальных значений $vy \rightarrow (vy)^2$ или взять функцию $z(x) = \sqrt{y(x)}$. В общем случае можно взять функцию $Z(x) = [z(x)]^b$ или выполнить обратное преобразование над данными: $vy \rightarrow \sqrt[b]{(vy)^2}$, где b – показатель степени в (7).

Выражения (14), (15) не описывают учитываемую в (9) линейную частотную зависимость с неясной физической природой. Частотная зависимость амплитуды возбуждающего сигнала, АЧХ детектора и тракта вне резонатора могут быть учтены добавлением линейного и других членов в виде сомножителя: $z(x) = \sqrt{y(x)}(1 + px + \dots)$.

Заключение. Рассмотренные выше расчётные соотношения используются в ГЭТ 110–2012 [9]. Несмотря на более сложный вид функций (14), (15) в сравнении с функцией (9) из [6, 7, 10], они имеют меньшее число параметров аппроксимации. Аппроксимация производится в вещественной области и не требует комплексных вычислений, необходимых для функций из (9). Экспериментальные исследования показали высокую точность аппроксимации резонансных характеристик резонаторов с добротностью 10^2 – 10^5 при различных способах включения в измерительный тракт. Отличие изложенного подхода от [6, 7, 10] состоит в учёте нерезонансного прохождения сигнала на выход резонатора и его векторного сложения на детекторе с резонансным сигналом. Другое отличие состоит в использовании вместо размерных величин (амплитуд и частоты) безразмерных нормированных – коэффициентов передачи и обобщённой расстройки. Вещественные параметры аппроксимации также безразмерные и имеют физическое содержание. Универсальность резонансной зависимости позволяет использовать развитый аппарат при анализе характеристик резонаторов различной природы, в частности, в задачах газовой термометрии [10, 11].

Опыт использования данного подхода в ГЭТ 110–2012 показывает возможность измерения резонансной частоты микроволновых электромагнитных резонаторов с неопределённостью $\delta f \leq (10^{-3} \dots 10^{-4}) \cdot Q^{-1}$, что при вполне достижимой добротности $Q \approx 10^4 \dots 10^5$ даёт $\delta f \leq (10^{-7} \dots 10^{-9})$. В газовой диэлектрической термометрии [11] измеряет-

ся относительная диэлектрическая проницаемость газа в конденсаторе. Использование в этих целях микроволнового электромагнитного резонатора вместо измерительного конденсатора имеет преимущества. Представляется вполне достижимой относительная неопределённость измерения $\delta \varepsilon \leq (10^{-7} \dots 10^{-8})$ и перспективность совмещения акустического и диэлектрического термометров в одном микроволновом резонаторе.

Л и т е р а т у р а

1. Брагинский В. Б., Митрофанов В. П., Панов В. И. Системы с малой диссипацией. М.: Наука, 1981.
2. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М.: Наука, 1977.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.
4. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1969.
5. Вайнштейн Л. А., Вакман Д. Е. Разделение частот в теории колебаний и волн. М.: Наука, 1983.
6. Кытин В. Г., Кытин Г. А. Моделирование акустического резонанса в сферических резонаторах для прецизионного определения термодинамической температуры // Измерительная техника. 2015. №1. С. 35–39.
7. Кытин В. Г., Кытин Г. А. Анализ формы частотных зависимостей акустического сигнала при определении термодинамической температуры // Измерительная техника. 2016. № 1. С. 43–46.
8. Егоров В. Н. Характеристики резонаторов сверхвысоких частот с нерезонансным просачиванием мощности // Известия вузов. Радиофизика. 2010. № 8. С. 493–503.
9. Егоров В. Н., Кащенко М. В., Масалов В. Л., Токарева Е. Ю., Нонг Куок Куанг. Государственный первичный эталон единиц комплексной диэлектрической проницаемости в диапазоне частот от 1 до 178,4 ГГц // Измерительная техника. 2014. № 1. С. 3–7.
10. Moldover M. R., Gavioso R. M., Mehl J. B., Pitre L., M. de Podesta, Zhang J. T. Acoustic gas thermometry // Metrologia. V. 51. 2014. R1-R19.
11. Fellmuth B., Fischer J., Gaiser C., Jusko O., Prirunrom T., Sabuga W., Zandt T. Determination of Boltzmann constant by dielectric-constant gas thermometry // Metrologia. V. 48. 2011. P. 38–39.

Дата принятия: 08.12.2016.