

Моделирование, восстановление и картирование геополей с учётом и без шумов измерений.

Ч. 5. Методы сглаживающих сплайнов, управляемой фильтрации и многокритериальной оптимизации

А. М. ПАШАЕВ, Р. А. САДЫХОВ, С. Б. ГАБИБУЛЛАЕВ

Национальная академия авиации Азербайджана,
Баку, Азербайджан, e-mail: sadixov@mail.ru

Рассмотрены различные подходы к восстановлению поверхностей геополей (сглаживающие сплайны, управляемая фильтрация), которые ограничиваются линейными регуляризирующими и фильтрующими алгоритмами. Показано, что задача восстановления поверхностей (изображений) является многокритериальной. Разработан новый метод построения множества недоминируемых решений: Парето-множество.

Ключевые слова: параметрические методы фильтрации и регуляризации, управляемая фильтрация, многокритериальность, Парето-решения.

Analyzed various approaches to the restoration of surfaces of geofields (smoothing splines, controlled filters), which are limited linear regularized and filtered algorithms. It is proved that, restoration task of surfaces (pictures) is multicriterial. The new method of construction set of non-dominated solutions has been worked out: Pareto-set.

Key words: parametrical methods of filtering and regularization controlled filtering, multicriteriality, Pareto-solutions.

При моделировании, восстановлении и картировании геополей с учётом и без шумов измерений [1–4] необходимо выбирать один из методов оценивания аппроксимирующего, фильтрующего или сглаживающего типов, но ни один из них не является универсальным и абсолютно надёжным [1–8]. Однако в статистическом смысле процесс сглаживания является более точным, чем фильтрация, так как в сглаживании при формировании результата присутствует запаздывание.

Сглаживающие сплайны. Задача восстановления двумерной функции $h(x, y)$ по её значениям $\hat{h}_i$ на нерегулярной сети узлов исходных данных (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$ с заданной погрешностью сводится к решению задачи минимизации сглаживающего функционала (СФ)

$$(1-\alpha)\|h-\hat{h}\|^2 + \alpha S_c(h), \quad (1)$$

где α – параметр регуляризации.

В зависимости от вида функционала S_c построенные поверхности будут различаться. Оператор S может быть оператором Гамильтона, Лапласа и т. д. Функция, доставляющая минимальное значение функционалу S_Δ , является решением бигармонического уравнения

$$\Delta^2 h(x, y) = \Delta \Delta h(x, y) = \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 h(x, y)}{\partial y^4} = 0. \quad (2)$$

Уравнению (2) соответствует сплайн-функция

$$h_2(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i r^2 \ln r + \omega_{n+1} + \omega_{n+2} x + \omega_{n+3} y,$$

где $r = [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{1/2}$; $\omega_i, i = \overline{1, n+3}$ – коэффициенты, определяемые из решения системы линейных алгебраических уравнений (СПАУ), все элементы главной диагонали матрицы

которой равны α [3].

Величину α можно вычислять с учётом среднего квадратического отклонения наблюдений

$$\left\{ \sum_{i=1}^n [h_\alpha(x_i, y_i) - \hat{h}_i]^2 \right\}^{1/2},$$

однако для её определения требуется проведение расчётов большого объёма. Параметр регуляризации α находится на основе итеративного графического просмотра получаемых решений. Из этих решений выбирается такой результат, чтобы решение не было ни заглаженным (слишком маленькие α), ни слишком «разболтанным» (чрезмерно большие α). Минимизация выражения (1) – некоторый компромисс между двумя приближениями: приближением к заданным значениям или получением гладкой функции. Это типичная двухкритериальная задача. Предлагаемый подход распространяется и на трёхкритериальные задачи, например одновременное применение разнородных по способам получения данных, таких как

$$\gamma \sum_j [(n_j, \nabla h_j) - v_j]^2 + \beta \sum_i (h_i - \hat{h}_i)^2 + \alpha S_\Delta(h) = \min_{h \in H},$$

где γ, β, α – параметры регуляризации; n_j – единичный вектор, вдоль которого вычисляется производная; v_j – тангенс угла наклона структуры в данном направлении; $\hat{h}_i$ – абсолютные отметки в скважинах.

Функционал невязки. Так называются нормы различия между выбранной рассчитанной моделью h и некоторой априорной моделью $\hat{h}$:

$$\|h - \hat{h}\|_{L_2}^2 = \sum_{i=1}^n (h_i - \hat{h}_i)^2 = \min_{w_2^2}, \quad (3)$$

где $\|\cdot\|_{L_2}$ – норма метода наименьших квадратов (МНК), которая

используется для ошибок, характеризующихся нормальным распределением.

Если наблюдаемые данные некоррелированы, то вместо (3) применяется выражение

$$\|h - \hat{h}\|_{L_2}^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (h_i - \hat{h}_i)^2 \right]^{1/2} = \min_{W_2^1}.$$

При выбросах используется минимаксная погрешность – норма $\|\cdot\|_{L_1}$. Невязка рассчитывается следующим образом:

$$\|h - \hat{h}\|_{L_1}^2 = \left[\sum_{i=1}^n |h_i - \hat{h}_i| \right]^2 = \min_{W_2^1},$$

где W_2^1 – класс функций, с квадратом которых всегда суммируются их первые производные.

Однако пространство L_1 не является строго выпуклым. Пространства W_2^l , $l=1, 2$ называют пространствами гладких решений или классическими пространствами, применяемыми в тихоновской регуляризации l -го порядка. Рассматривается функционал с минимальным носителем, который даёт модель с минимальной областью распределения аномальных параметров [5]:

$$\|h - \hat{h}\|_{\beta}^2 = \int_{\Omega} \frac{(h - \hat{h})^2}{(h - \hat{h})^2 + \beta^2} d\Omega. \quad (4)$$

Функционал (4) минимизирует общую область с ненулевым отклонением параметров модели h от заданной априорной модели $\hat{h}$.

Метод регуляризации Тихонова. Этот метод является наиболее эффективным среди детерминистских методов решения линейного операторного уравнения первого рода, так как в нём используется минимум априорной информации. Таким образом,

$$Ah = \hat{h}, \quad (5)$$

где A – линейный, вполне непрерывный оператор (интегральный, дифференциальный, алгебраический и т. д.), действующий в гильбертовом пространстве.

В прикладных исследованиях входные данные задаются (измеряются) с погрешностью и при этом оператор A известен приближённо. Тогда

$$\|\hat{h}_{\delta} - h\| \leq \delta; \quad (6)$$

$$\|A_{\varepsilon} - A\| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

где $\delta \geq 0$, $\varepsilon \geq 0$ – погрешности входных данных (6) и оператора (7), соответственно.

Оператор A вполне непрерывный и не является непрерывно обратимым, поэтому решение уравнения (5) некорректно. Для приближённого решения (5) минимизируется функционал невязки

$$\|Ah - \hat{h}_{\delta}\|. \quad (8)$$

Существует много решений такой вариационной задачи. Например, в методе регуляризации Тихонова вводится сглаживающий функционал

$$\|Ah - \hat{h}_{\delta}\|^2 + \alpha \|h\|^2 = \min, \quad \alpha \geq 0. \quad (9)$$

Функционал (9) является развитием МНК, дающего наиболее точное решение, и метода псевдообратной матрицы, при котором возможно наиболее гладкое решение. При $\alpha = 0$ получается МНК с неустойчивым решением. С увеличением α решение становится глаже и устойчивей, т. е. СФ $S(h) = \|h\|^2$ играет стабилизирующую роль (стабилизатор). Сглаживающий функционал (1) – это СФ Тихонова, но с другим стабилизатором. Одним из способов устойчивого решения (5) с учётом погрешности (6) является минимизация функционала (8) на множестве корректности M (компакт) $h_{\delta} = \text{Arg inf}_{h \in M} \|Ah - \hat{h}_{\delta}\|$, называемая квазирешением уравнения (5). Множество корректности M задаётся с помощью некоторого неотрицательного неоднородного функционала S :

$$M = \{h; S(h) \leq C\}.$$

Тогда решение находится из минимизации функционала $S(h)$ на множестве ограничений (6), что эквивалентно минимизации

$$P^{\alpha}(h) = \|Ah - \hat{h}_{\delta}\|^2 + \alpha S(h). \quad (10)$$

Параметрический функционал Тихонова (10) – линейная комбинация невязки и стабилизирующего функционала.

Можно выделить и другой класс приближённых решений, который характеризуется возмущением оператора исходной или преобразованной задачи. Из (9), например, вытекает уравнение Тихонова $\alpha h_{\alpha} + A^* A h_{\alpha} = A^* \hat{h}_{\delta}$, т. е. вместо уравнения I рода получается уравнение II рода. Здесь осуществляется переход к задаче с самосопряжённым оператором $A^* A$, где A^* – тоже сопряжённый оператор. Существуют две главные идеи среди большого числа частных схем устойчивого решения задачи (9): оператор A рассматривается лишь на некотором подмножестве области определения (компакт), но таком, что A^{-1} на нём непрерывен (количественная информация о решении); оператор A заменяется другим, близким к нему, но таким, что A_{ε}^{-1} уже ограничен (качественная информация о решении). Чёткой границы между этими подходами и различными методами внутри них нет.

Сглаживающие функционалы (стабилизаторы). Их главная задача – выбор подходящего класса моделей для решения обратной задачи. Существует несколько стандартных типов стабилизаторов, основанных на минимизации СФ и использующих минимальную норму оператора Лапласа от параметров модели Δh :

$$S_{\Delta}(h) = \|\Delta h\|^2 = \|\nabla^2 h\|^2 = (\nabla^2 h, \nabla^2 h) = \int_{\Omega} |\nabla^2 h(r)|^2 d\Omega = \min.$$

В некоторых практических ситуациях гладкие модели, получаемые в результате применения данного СФ, не описывают надлежащим образом реальные блочные геологические объекты. К тому же этот функционал приводит к ложным эффектам, когда восстанавливаемый параметр является прерывистой функцией. Сглаживающий функционал максимальной гладкости, использующий минимальную норму оператора Гамильтона от параметров модели ∇h , имеет вид

$$S_{\Delta}(h) = \|\nabla h\|_{L_2}^2 = (\nabla h, \nabla h) = \int_{\Omega} |\nabla h(r)|^2 d\Omega = \min.$$

Сглаживающий функционал полной вариации, который фактически является нормой L_1 -градиента (известно более

десяти неэквивалентных определений вариаций [6]) имеет вид

$$S_{L_1}(h) = \|\nabla h\|_{L_1} = \int_{\Omega} |\nabla h(r)| d\Omega. \quad (11)$$

Модифицированный СФ полной вариации можно записать как

$$S_{\beta}(h) = \|\nabla h\|_{L_1} = \int_{\Omega} [|\nabla h(r)|^2 + \beta^2]^{1/2} d\Omega, \quad (12)$$

где β – малое число; $h(r)$ – параметр, описывающий параметры модели; r – радиус-вектор точки наблюдения.

Функционал (12) рассматривается в сепарабельном пространстве W_1^1 но оно не является строго выпуклым, так как содержит разрывные функции. Преимущество СФ (11), (12) заключается в том, что они позволяют сохранять в восстанавливаемом параметре h резкий скачок, но в то же время в функционале (12) накладывается ограничение на общую длину дуги кривых по прерывистому h . При рассмотрении блочных структур СФ (12) слишком сглаживает реальное изображение [7]. Рассмотрим СФ с минимальным носителем градиента:

$$S_{\beta}(\nabla h) = \int_{\Omega} \frac{\nabla h \nabla h}{\nabla h \nabla h + \beta^2} d\Omega. \quad (13)$$

Функционал (13) помогает получить чёткое и хорошо сфокусированное изображение блочных структур. При этом СФ (12), (13) выбирают решения обратных задач из класса моделей, описывающих объекты с резкими границами. В этом случае процесс решения обратных задач сталкивается с огромным объёмом вычислений. Классическая тихоновская регуляризация не позволяет качественно восстанавливать негладкое, т. е. недифференцируемое, решение, так как приводит к заглаживанию тонкой структуры решения. Не удаётся восстановить, например, хорошо выраженный разрыв или излом [7]. Эти трудности преодолеваются с помощью привлечения ргох-метода (итеративный вариант метода Тихонова) для устойчивой аппроксимации экстремального элемента h_a :

$$h^k = \text{Arg min} \{P^{\alpha}(h) + \beta \|h - h^{k-1}\|_H^2\}, \quad (14)$$

где $\beta > 0$, $\|\cdot\|_H$ – гильбертова норма.

В отличие от выпуклого функционала $P^{\alpha}(h)$, функционал $P^{\alpha, \beta} = P^{\alpha}(h) + \beta \|h - \hat{h}\|_H^2$ является сильно выпуклым, что гарантирует устойчивый счёт при нахождении h^k субградиентным методом. Метод регуляризации (14) используется при реконструкции изображений в пространствах Соболева W_p^l , $p, l \in \mathbb{N}$, которые имеют обобщённые производные l -го порядка, суммируемые с p -й степенью на классе функций с ограниченной вариацией.

Восстановление поверхности (изображения) геополей. Такие восстановления ограничиваются линейными восстанавливающими алгоритмами, что связано с их надёжностью и небольшой вычислительной сложностью:

$$\|Af - g\|_B^2 + \alpha S_C(f), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (15)$$

где B, C – положительно определённые операторы.

Если $\alpha = 1$, то получается винеровская фильтрация при предположении гауссовской природы вероятностных свойств геополя и шума. Операторы B, C в этом случае являются обратными ковариационными операторами шума и геополя. Все линейные алгоритмы восстановления отличаются друг от друга выбором этих операторов. Например, оператор C

может быть оператором Гамильтона, Лапласа (в детерминированном случае) или Гиббсоновым потенциалом с $\alpha = 1$ (в статистическом подходе), или же Фурье – данный подход является самым быстрым и дешёвым инструментарием для решения задач восстановления. Однако метод Фурье применяется только для решения уравнений типа свёртки. Линейные алгоритмы имеют общую, аналогичную для всех схему основных операций.

Управляемая фильтрация при восстановлении зашумлённых и линейно искажённых изображений. Общая формула для линейной фильтрации в частотной области, из которой следуют все остальные методы восстановления при фиксации управляющих параметров $0 \leq \sigma \leq 1$, $0 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, имеет вид

$$\hat{F}(u, v) = \left(\frac{1}{H(u, v)} \right)^{\sigma} \left(\frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \alpha Q(u, v)} \right)^{\mu} G(u, v), \quad (16)$$

где $H(u, v)$ – искажающая функция; $G(u, v)$ – Фурье-преобразование искажённого изображения; $\hat{F}(u, v)$ – оценка восстановленного изображения; α – параметр регуляризации.

При отношении энергетических спектров $Q(u, v) = |N(u, v)|^2 / |F(u, v)|^2$ и $\alpha = 1$ получается фильтр Винера шума и изображения. При $Q(u, v) = |P(u, v)|^2$, где $P(u, v)$ – Фурье-преобразование оператора Лапласа, получается тихоновская фильтрация в частотной области. Слишком малое значение α приводит к зашумлённости, а большое – к дефокусировке. При настройке параметров σ, μ, α в интерактивном режиме пользователь, используя формулу (16), вначале должен оценить степень зашумлённости изображения инверсным фильтром ($\sigma = 1$), а затем применить винеровскую или тихоновскую фильтрацию ($\mu = 1$). Если качество восстановления неудовлетворительное, то серия восстановлений с уменьшенными μ, σ продолжается. Практические результаты показывают, что $\mu = 0,5$ и $0,9 \leq \sigma \leq 1$. При фильтрации зашумлённых изображений по Винеру и по Тихонову получаются практически одинаковые результаты в случае низкого шума, а при сильном шуме предпочтение отдаётся тихоновской фильтрации.

В ряде случаев влияние краевых эффектов на качество восстановления оказывается более существенным, чем зашумлённость, так как инверсный фильтр и фильтр Винера синтезированы без учёта ограничивающих размеров наблюдаемых изображений. Решить уравнение Винера–Хопфа для изображений, наблюдаемых на ограниченном интервале, не удаётся. Поэтому оптимальные пространственно-инвариантные фильтры, учитывающие краевые эффекты, отсутствуют. Для снижения краевых эффектов используют различные эвристические алгоритмы. В частности, для идентификации линейно искажённого изображения применяют один из частных случаев восстанавливающего регуляризирующего фильтра Тихонова, а именно

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \alpha [1 + \beta(u^2 + v^2)]} G(u, v),$$

где $H^*(u, v)$ – комплексное сопряжение $H(u, v)$.

Восстановление зашумлённых изображений. Такое восстановление используют при реставрации архивных карт, аэрокосмических снимков и т. д. Представим модель искажённого изображения g при существовании шумов (помех) η в матрично-векторном виде:

$$g = Af + \eta, \quad (17)$$

где f – неискажённое изображение размерности $M \times N$; A – линейный трансляционно-инвариантный оператор, определяющий связь между g , f .

Матрица A чувствительна к шумам, является плохо обусловленной, т. е. решение (17) неустойчиво. Регуляризуется решение задачи (17) путём построения СФ со связями:

$$S_{\Delta_d} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} \Delta^2 f(x, y) = \min_f; \quad (18)$$

$$\|g - Af\|^2 = \|\eta\|^2,$$

где $\hat{f}$ – искомая оценка неискажённого изображения; S_{Δ_d} – дискретный сглаживающий функционал; Δ_d – дискретный Лапласиан.

Составляется задача нелинейного программирования (18) с позиционными ограничениями

$$\|\eta\|^2 - \varepsilon \leq \|r\|^2 \leq \|\eta\|^2 + \varepsilon, \quad (19)$$

где ε – приемлемая точность; $\|r\|^2 = \|g - Af\|^2$ – функционал невязки.

Задачи (18), (19) относятся к задачам оптимизации большой размерности. Поэтому прямые методы оптимизации применяют, когда размеры изображения невелики. Для решения (18), (19) требуются знания среднего значения и дисперсии шума, которые можно оценить на основе заданного искажённого изображения.

Можно выделить устойчивое регуляризованное решение по методу обусловленных наименьших квадратов $\hat{f} = (A^T A + \alpha Q)^{-1} A^T g$, где A^T – транспонированная матрица; Q – стабилизатор; α – параметр регуляризации, значение которого зависит от уровня шума и изображения, подлежащего восстановлению.

В общем случае решение некорректной задачи (18) сводится к минимизации СФ (15), где оператор S является дискретным Лапласианом. Рассмотренные методы решения некорректной задачи (18) позволяют получить приемлемый результат для каждого конкретного зашумлённого изображения, к которому они применяются. При работе с зашумлёнными изображениями из множества конкурирующих алгоритмов можно выбрать быструю, но не очень качественную схему решения или медленную, но качественную обработку. Субъективные оценки экспертов склоняются в сторону более зашумлённых, но чётких изображений, чем обесшумленных, но смазанных.

Восстановление искажённых изображений. Восстановление изображений космических объектов, рельефа или оцифрованных карт в результате сдвига или смаза сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма I рода типа свертки, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \omega_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad -\infty < x < \infty; \quad (20)$$

$$K(x) = \begin{cases} \Delta^{-1}, & -\Delta \leq x \leq 0; \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где Δ – равномерный прямолинейный сдвиг (можно рассмотреть также неравномерный и (или) непрямолинейный сдвиг объекта); $\omega_y(\xi)$ – искомая функция (истинное изображение); $g_y(x)$ – измеренное искажённое изображение; y – фиксированный параметр.

При каждом фиксированном параметре y одномерное интегральное уравнение (20) многократно решается методом преобразования Фурье (ПФ) и регуляризацией Тихонова согласно следующей формуле (восстанавливается истинное изображение по искажённому при каждом выбранном Δ):

$$\omega_\alpha(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (21)$$

где $W_\alpha(\omega)$ – спектр решения; $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, который лучше определять способом подбора, т. е. визуально.

При каждом α вычисляется уравнение (21). Выбирается тот параметр α , при котором решение является правдоподобным. Недостатком метода ПФ является комплексность решений уравнений типа (20), т. е. излишняя загрузка ресурсов компьютера. Для исключения этого нежелательного эффекта используется преобразование Хартли, тем самым почти вдвое экономится компьютерная память и время [8].

При численном решении уравнения (20) предпочтение отдаётся частотному методу ПФ, позволяющему получать точное аналитическое решение и оперирующему лишь векторами. В отличие от методов квадратур и граничных элементов, которые требуют размещения в компьютерной памяти матрицы СЛАУ, такое решение значительно повышает эффективность метода ПФ при компьютерной реализации, а именно – память и время. Однако в перспективе при применении мощных компьютеров и математических программ Matcad, Matlab, Maple методы квадратур и граничных элементов представляются наиболее удобными и доступными. Восстановление смазанных изображений различными методами имеется и в [9]. Рассматривается некорректная задача восстановления смазанных и зашумлённых изображений, описываемых двумерным интегральным уравнением Фредгольма I рода типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, y - \zeta) \omega(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = g(x, y). \quad (22)$$

Для решения (22) использовались методы ПФ и квадратур с регуляризацией Тихонова как в прямой (моделирование смаза), так и в обратной задаче восстановления. Сделан вывод, что метод квадратур с регуляризацией Тихонова позволяет наиболее точно и качественно восстанавливать искажённые изображения.

Математическая модель поверхности (изображения) геополей. В качестве такой модели рассматривается линейное интегральное уравнение I рода, т. е. уравнение типа (17), где A – линейный интегральный оператор; $\eta(x, y)$ – изображение шума; $g(x, y)$ – наблюдаемая поверхность; $f(x, y)$ – идеальная поверхность. Решение этого интегрального уравнения сводится к минимизации

тихоновского функционала (15). Более содержательный результат получается при использовании двумерных вариаций Кронрода. В этом случае алгоритм восстановления для непрерывно дифференцируемой функции записывается как задача на условный экстремум:

$$\begin{cases} \|Af - g\|_B^2 + \alpha \int_{\Omega} |\text{grad } f(x, y)| dx dy; \\ \omega_1 \leq C_1, \end{cases} \quad (23)$$

где ω_1 – функционал линейной вариации, значение которого может служить критерием степени зашумлённости изображения.

В более общем виде оценка метрических характеристик двумерных поверхностей определяется задачей условного экстремума, т. е. используются несколько функционалов:

$$\begin{cases} \|Af - g\|_B^2; \\ \omega_1 \leq C_1; \\ \omega_2 \leq C_2, \end{cases} \quad (24)$$

где ω_2 – функционал плоской вариации.

Следовательно, создание математической модели поверхности геополя, основанной на двух критериях, не может привести к полноценному описанию свойств геополя, которому присущи гладкость, изменчивость, сложность и т. д. Поэтому восстановление поверхностей (изображений) описывается более чем двумя критериями, а задача восстановления относится к многокритериальным задачам.

Существует типичная трёхкритериальная задача, которую при введении модифицированного сглаживающего функционала (23) с одним ограничивающим условием можно привести к двухкритериальной или к однокритериальной задаче (24) с двумя ограничивающими условиями. Однако анализ многокритериальных задач не приводит к выделению единственного решения, а сводится к построению множества совокупности Парето-решений [1–10].

Построение Парето-решений многокритериальных задач восстановления. В общем виде задача восстановления (идентификации) поверхности геополей является многокритериальной (задача векторной оптимизации). Её решение состоит в нахождении компромиссного решения во множестве недоминирующих решений – Парето-решений.

Рассматривается многокритериальная задача оптимизации $[f_1(x), \dots, f_l(x)] \rightarrow \min, D = D_1 \cap D_2$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= \{x \in E^n : g_i(x) < 0, i = \overline{1, m}\}; \\ D_2 &= \{x \in E^n : h_i(x) = 0, i = \overline{1, k}\}. \end{aligned}$$

Один из широко используемых подходов для получения Парето-множеств основан на идее свёртывания векторного критерия, что позволяет привести задачу многокритериальной оптимизации к общей задаче нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} \Psi(x, \lambda) &= \sum_{i=1}^l \lambda_i f_i(x) \rightarrow \min_{x \in D}; \\ \sum_{i=1}^l \lambda_i &= 1, \lambda_i \geq 0, i = \overline{1, l}; g_i(x) < 0, i = \overline{1, m}; h_i(x) = 0, i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Оптимальное решение принадлежит Парето-множеству задачи.

Ниже для нахождения Парето-множеств показана применимость метода, основанного на утверждении фундаментальной теоремы Пуанкаре «О возвращаемости» [10], применительно к замкнутой физической системе. Получение Парето-множества сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, что для определённого класса задач оказывается проще и экономичнее по временным затратам, чем решение оптимизационной задачи нелинейного программирования для нахождения каждого Парето-решения.

Пусть рассматривается замкнутая физическая система с обобщёнными координатами

$$(x, \lambda, \gamma) = (x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_l, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$$

и соответствующими импульсами

$$(u, \omega, w) = (u_1, \dots, u_n, \omega_1, \dots, \omega_l, w_1, \dots, w_k),$$

функция Гамильтона которой имеет вид

$$H(x, \lambda, \gamma, u, \omega, w, R, r, \varepsilon) = \frac{1}{2}(u, u) + \frac{1}{2}(\omega, \omega) + \frac{1}{2}(w, w) + F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon).$$

Тогда траектория движения физической системы определяется системой дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u_i; \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon)}{\partial x_i}, i = \overline{1, n}; \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \omega_i; \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon)}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, l}; \\ \frac{d\alpha_i}{dt} &= w_i; \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon)}{\partial \alpha_i}, i = \overline{1, k}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon) &= \sum_{i=1}^l \frac{r}{\lambda_i + \varepsilon} + R \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i - 1 \right)^2 + r \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x) + \varepsilon} + \\ &+ R \left[\sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum \alpha_i \nabla h_i(x) \right]. \end{aligned}$$

Система (25) имеет некоторые начальные условия $(x^0, \lambda^0, \gamma^0, u^0, \omega^0, w^0)$, согласно которым x^0, u^0 определяются из задачи минимума функции $\Psi(x, \lambda)$ в D при фиксированном векторе λ , например, при $\lambda = (1, 0, \dots, 0)$. Правые части дифференциальных уравнений (25) определяются в аналитическом виде, когда это возможно, в противном случае они находятся приближённо. Если ограничения $g_i(x) < 0; i = \overline{1, m}$ отсутствуют, то в функции $F(x, \lambda, \alpha, R, r, \varepsilon)$ не существует третье слагаемое, а в случае отсутствия ограничений $h_i(x) = 0; i = \overline{1, k}$ данная функция имеет вид

$$F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon) = \sum_{i=1}^l \frac{r}{\lambda_i + \varepsilon} + R \left(\sum_{i=1}^l \lambda_i - 1 \right)^2 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x) + \varepsilon} + R \sum_{j=1}^k \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_j}.$$

Траектория движения в этом случае определяется следующими дифференциальными уравнениями с некоторыми начальными данными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= u_i; \frac{\partial F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon)}{\partial x_i} = 2R \sum_{q=1}^l \lambda_q \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \frac{\partial^2 f_q}{\partial x_j \partial x_i} + r \sum_{q=1}^m \frac{\partial g_q(x)}{\partial x_i} \frac{1}{g_q(x) + \varepsilon}; \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \omega_i; \frac{d\omega_i}{dt} = -\frac{\partial F(x, \lambda, \gamma, R, r, \varepsilon)}{\partial \lambda_i} = 2R \left(\sum_{q=1}^l \lambda_q - 1 \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \sum_{q=1}^m \lambda_q \frac{\partial f_q}{\partial x_j}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Численный пример. Работа алгоритма получения эффективных решений проиллюстрирована на примере решения двухкритериальной задачи минимизации:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1^2 + (x_2 - 1)^2; \quad f_2(x_1, x_2) = (x_1 - x_2 - 1)^2 + (x_1 - 1)^2.$$

Линейная свёртка в этом случае имеет вид

$$\Psi(x, \lambda) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Множество эффективных решений определяется из условий

$$\Psi'_{x_1}(x, \lambda) = 0; \quad \Psi'_{x_2}(x, \lambda) = 0,$$

откуда

$$-\lambda_2 x_1 + x_2 = 1 - 2\lambda_2; \quad 2x_1 - \lambda_2 x_2 = 2\lambda_2, \quad \lambda_2 \in [0, 1].$$

Тогда множество эффективных решений есть

$$x_1 = \lambda_2 / (2 - \lambda_2^2), \quad x_2 = 2(\lambda_2 - 1) / (2 - \lambda_2^2), \quad \lambda_2 \in [0, 1].$$

Исключив λ_2 , получим оптимальную поверхность (кривую) Парето:

$$-2(x_1 - 1)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Дифференциальные уравнения (26) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1; \quad \frac{dx_2}{dt} = u_2; \\ \frac{du_1}{dt} &= -R \{ 2[4\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (4x_1 - 2x_2 - 4)](4\lambda_1 + 4\lambda_2) + \\ &+ 2[\lambda_1 (2x_2 - 2) - 2\lambda_2 (x_1 - x_2 - 1)](-2\lambda_2) \}; \\ \frac{du_2}{dt} &= -R \{ 2[4\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (4x_1 - 2x_2 - 4)](-2\lambda_2) + \\ &+ 2[\lambda_1 (2x_2 - 2) - 2\lambda_2 (x_1 - x_2 - 1)](2\lambda_1 + 2\lambda_2) \}; \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= \omega_1; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = \omega_2; \\ \frac{d\omega_1}{dt} &= \frac{r}{(\lambda_1 - \varepsilon)^2} - 2R(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) - R \{ 2[4\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (4x_1 - 2x_2 - 4)] \times \\ &\times (4x_1) + 2[\lambda_1 (2x_2 - 2) - 2\lambda_2 (x_1 - x_2 - 1)](2x_2 - 2) \}; \\ \frac{d\omega_2}{dt} &= \frac{r}{(\lambda_2 - \varepsilon)^2} - 2R(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) - R \{ 2[4\lambda_1 x_1 + \lambda_2 (4x_1 - 2x_2 - 4)] \times \\ &\times (4x_1 - 2x_2 - 4) + 2[\lambda_2 (2x_2 - 2) - 2\lambda_2 (x_1 - x_2 - 1)](-2(x_1 - x_2 - 1)) \}. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

В таблице представлены значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2$, полученные в результате решения системы уравнений (27) методом Рунге–Кутты IV порядка при $R = 100,0$; $r = 0,0$; $\varepsilon = 0,1$. В качестве начальной точки берётся $(x_1^0, x_2^0) = (0; 1)$ – точка минимума функции $f_1(x_1, x_2)$; $\lambda^0 = (1; 0)$, соответствующая скорости $u^0 = (0; 0)$; $\omega^0 = (-10; 0)$.

Отклонение

$$E = \frac{-2(\bar{x}_1 - 1)^2 + (\bar{x}_2 + 0,5)^2 - 0,25}{-2(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 0,5)^2 - 0,25}$$

очень мало, что подтверждает эффективность предлагаемого подхода (см. таблицу).

Результаты решения системы уравнений (27) методом Рунге–Кутты IV порядка

N	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_2$	x_2	E
1	0,002	0	0,998	1	0,008
2	0,204	0,20	0,756	0,740	0,040
3	0,418	0,40	0,431	0,480	0,060
4	0,548	0,55	0,272	0,300	0,030
5	0,662	0,6	0,183	0,190	0,040
6	0,743	0,74	0,111	0,120	0,040
7	0,850	0,86	0,050	0,040	0,050
8	0,914	0,90	0,022	0,015	0,060
9	0,976	1	0,011	0	0,070

Заключение. Проанализированы различные подходы к восстановлению поверхностей (изображений) геополей (сглаживающие сплайны, методы регуляризации, управляемая фильтрация и т. д.), которые ограничиваются линейными регуляризующими и фильтрующими алгоритмами. Классическая тихоновская регуляризация не позволяет восстанавливать негладкие (разрыв, излом) поверхности, т. е. заглаживает тонкую структуру решения. Поэтому привлекается итеративный вариант метода Тихонова с различными недифференцируемыми стабилизаторами. При работе со смазанными и зашумлёнными изображениями из множества конкурирующих алгоритмов выбирается качественная схема решения. Например, методы параметрической фильтрации Винера и регуляризации Тихонова эффективно устраняют смазывание, но недостаточно эффективно фильтруют шумы. Фильтрация шумов повышается при добавлении адаптивного фильтра Винера. Показано, что задача восстановления изображений и поверхностей геополей является многокритериальной. Для её решения разработан новый метод построения множества недоминирующих решений: Парето-множество.

Л и т е р а т у р а

1. Садыхов Р. А. Математические модели и эффективные алгоритмы решения оптимальных задач АСУТП добычи нефти // Автореф. дисс. на соиск. учен. степени докт. техн. наук. М., 1995
2. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Илдыз Ф. Т., Караборк Х. Т. Восстановление параметров геополей // Измерительная техника. 2005. № 12. С. 3–9.
3. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., Назирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учётом шумов измерений. Ч. 1. Методы сглаживания, фильтрации и регуляризации // Измерительная техника. 2010. № 8. С. 3–11.
4. Пашаев А. М., Садыхов Р. А., Рамазанов Ф. Г., Назирли Ф. С. Восстановление параметров геополей с учётом шумов измерений. Ч. 2. Методы идентификации, регуляризации и мягких вычислений (softcomputing) // Измерительная техника. 2010. № 10. С. 6–14.
5. Жданов М. С. Геофизическая электромагнитная теория и методы. М.: Научный мир, 2012.
6. Леонов А. С. Решение некорректно поставленных обратных задач. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ. 2013.

7. Васин В. В., Серёжникова Т. И. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 2. С. 15–23.

8. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб: Политехника, 2001.

9. Римских М. В., Евсеев В. Д., Сизиков В. С. Реконструкция смазанных изображений различными методами // Оптический журнал. 2007. Т. 74. № 11. С. 53–57.

10. Кац А. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1969.

Дата принятия: 07.02.2017.

536.51:621.317

Повышение точности измерений резонансных характеристик

В. Н. ЕГОРОВ, Е. Ю. ТОКАРЕВА

Восточно-Сибирский филиал Всероссийского научно-исследовательского института физико-технических и радиотехнических измерений, Иркутск, Россия, e-mail: egorov@niiftri.irk.ru

Рассмотрен способ повышения точности измерений резонансной частоты и добротности резонаторов различной природы. Результат достигается аппроксимацией экспериментальной характеристики резонатора с помощью обобщённой резонансной функции. Резонансная функция учитывает прямое нерезонансное прохождение сигнала от входа резонатора до выхода и содержит параметры, определяемые при аппроксимации. Способ даёт высокую точность измерений резонансных параметров по экспериментальной резонансной кривой, в том числе с искажениями. Приведены результаты измерений резонансной частоты и собственной добротности обычным и предлагаемым способом. Подход может быть применён при измерении характеристик электромагнитных и акустических резонаторов в газовой акустической и диэлектрической термометрии.

Ключевые слова: колебательная система, резонансная частота, добротность, аппроксимация.

The approach to increase the accuracy of resonant frequency and quality factor measurements of different resonators is presented. Result is being achieved with using of generalized resonance function for approximation of resonator experimental characteristics. The function takes into account a direct (non-resonance) signal transition from resonator input to its output and includes the parameters determined at resonator characteristics approximation. The approach gives high measurement accuracy of resonance parameters for experimental resonance curve (including curve with distortions). The measurement results of resonance frequency and unloaded quality factor are given for this and usual approaches. Approach can be used for characteristics measurements of electromagnetic and acoustic resonators in gas acoustic and dielectric thermometry.

Key words: oscillation system, resonance frequency, quality factor, approximation.

Резонансные методы измерения различных физических величин являются одними из наиболее точных и чувствительных [1]. Физическая величина в резонансных методах действует на измерительную колебательную систему (резонатор), изменяя её резонансную частоту и/или добротность. Резонансная частота экспериментально определяется как частота возбуждающего гармонического сигнала при максимальном отклике резонатора. Нагруженная добротность резонатора чаще всего определяется по ширине полосы пропускания на уровне 0,707 максимального сигнала при линейном детектировании («по напряжению») и на уровне 0,5 (или –3,01 дБ) при квадратичном детектировании («по мощности») выходного сигнала. Вид экспериментальных резонансных характеристик обычно существенно отличается от расчётных моделей, в частности от классической резонансной кривой Лоренца.

В статье рассмотрены причины искажения резонансных характеристик и пути повышения точности измерений резонансной частоты и собственной добротности, в том числе по искажённой характеристике. Структурные схемы измерительных трактов с проходным резонатором, с резонатором-неоднородностью и их амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) представлены на рис.1.

Физической основой резонансных методов измерения служит теория колебаний. Вынужденные колебания представляются в виде ряда по собственным функциям, описывающим собственные колебания системы без возбуждающего источника. Собственные частоты системы получаются в результате решения однородной краевой задачи. Амплитуда $A(\omega)$ вынужденного колебания описывается суммой собственных колебаний с сильной частотной