

Опосредованное измерение параметров нестационарных процессов в системах длинных линий

В. Г. ДОМРАЧЕВ¹, В. С. РЕТИНСКИЙ², И. В. РЕТИНСКАЯ²

¹ Московский государственный университет леса, Москва, Россия, e-mail: vgdmr@yandex.ru

² Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, Москва, Россия, e-mail: kto@migmail.ru, retinskaya@hotmail.ru

Представлен метод, используемый в информационно-измерительных системах для решения задач проектирования и управления сетями длинных линий. Метод моделирования основан на численном обратном преобразовании Лапласа в системах длинных линий, его реализация показана на примере систем с дифференциальными уравнениями параболического типа и линейными уравнениями сопряжения.

Ключевые слова: моделирование, численные методы, обратное преобразование Лапласа.

A method that can be used in large data-measuring systems (IMS) to address the urgent task of designing and managing networks of long lines (electric networks, pipelines, gas transportation systems, pneumatic systems, etc.) is presented. In case of impossibility of direct measurement of parameters in various points of complex systems of long lines it is possible to receive these parameters by modelling (the mediated measurement). Initial data in this case are known only on trailer (free) units of a network. The method based on the procedure of numerical inverse Laplace transform in systems with long lines. The implementation of the method shown in the example of systems with differential equations of parabolic type equations and linear coupling.

Key words: modeling, numerical methods, inverse Laplace transform.

При использовании информационно-измерительных систем (ИИС) для конструирования и контроля длинных линий (продуктопроводов, электрических сетей, газотранспортных и пневматических систем и т. п.) возникает задача определения параметров сетей в любой точке в произвольный момент времени. На практике доступ возможен лишь к ограниченному числу точек, скорее всего, на конечных узлах сети, где могут быть установлены измерительные приборы, так как расположить их в ином месте либо слишком дорого, либо невозможно. Очень важно проводить мониторинг ИИС в нештатных ситуациях, когда стационарный режим нарушен из-за внепланового изменения параметров. Диспетчерские службы оперативного контроля и управления должны иметь информацию о состоянии параметров системы на каждом участке. При этом возникает проблема математического моделирования динамики работы сетевых систем длинных линий (ССДЛ), когда по измеренным и заданным показаниям в некоторых точках сети получают показания для всей системы. Использовать такие модели можно как на стадии эксплуатации, так и при проектировании ССДЛ. Моделирование динамики работы ССДЛ сводится к совместному ре-

шению системы, включающей дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие процессы для элементов системы, а также уравнения сопряжения параметров в узлах. Для этого необходимо найти неизвестные временные функции граничных условий дифференциальных уравнений в отдельных элементах ССДЛ.

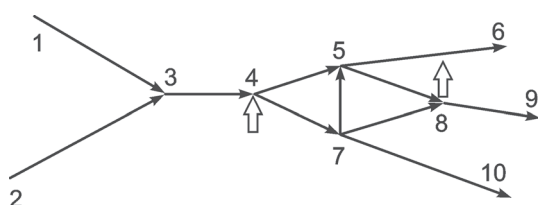
В настоящее время аналитические методы решений подобных систем даже для линейных дифференциальных уравнений и уравнений сопряжения не известны. Рассмотрим линии, образующие ССДЛ (рисунок), в которой нестационарный процесс для элемента ij длины l_{ij} с распределёнными параметрами описан системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_{ij}(x, t)}{\partial x} = \hat{A}_{ij} \frac{\partial Q_{ij}(x, t)}{\partial t} + \bar{A}_{ij} P_{ij}^d(x, t) Q_{ij}^c(x, t); \\ \frac{\partial P_{ij}(x, t)}{\partial t} = \bar{B}_{ij} \frac{\partial Q_{ij}(x, t)}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где $\hat{A}_{ij}, \bar{A}_{ij}, \bar{B}_{ij}$ — заданные параметры элемента; $P_{ij}(x, t), Q_{ij}(x, t)$ — искомые параметры в момент времени t для координаты x , направленной вдоль элемента.

Системой с разными значениями d , с можно описать множество нестационарных процессов диффузии, массопереноса, течений и теплопроводности в ССДЛ [1—3]. Перечислим эти процессы:

одномерное неустановившееся турбулентное изотермическое течение идеального газа по горизонтальному участку газопровода с дозвуковыми скоростями. В этом случае $d = -1$; $c = 2$; $P_{ij}(x, t), Q_{ij}(x, t)$ — соответственно среднее по сечению с координатой x (одинаковое для каждой нитки дав-



Сетевая система длинных линий:

1—10 — узлы сети

ление в момент t) и сумма по всем ниткам участка средних массовых скоростей (коммерческого расхода);

одномерное неустановившееся изотермическое ламинарное течение жидкости по горизонтальному участку продуктопровода (гидроудар). Величины $P_{ij}(x, t)$, $Q_{ij}(x, t)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае, а $d = -1$, $c = 1$;

нестационарные процессы в электрических и электронных длинных линиях. Здесь $P_{ij}(x, t)$, $Q_{ij}(x, t)$ — соответственно напряжение (потенциал) и сила тока; $d = 0$, $c = 1$;

процессы инерционного теплопереноса в конечномерных стержнях с теплоизоляцией боковых поверхностей. Тогда $P_{ij}(x, t)$, $Q_{ij}(x, t)$ — означают температуру и тепловой поток, соответственно; $d = 0$, $c = 1$.

Кроме уравнений (1), описывающих функционирование элементов ССДЛ, необходимо задать условия материального баланса потока в узлах сети.

Представленную модель можно использовать для нахождения параметров режимов работы систем магистральных газо-, гидротрубо- и продуктопроводов, внутрипромыслового транспорта газа, пневмотранспорта, расчёта русел жидкостей, определения распределения теплоты, получения электрических и электронных связей длинными линиями. Как субстанции в таких системах выступают газ, нефть, нефтепродукты, вода, жидкости, воздух, заряженные частицы и т. п.

Для решения задач моделирования динамики поведения ССДЛ представим систему (1) в квазилинейном виде относительно $P_{ij}(x, t)$, $Q_{ij}(x, t)$, которые для удобства назовём потенциалом и потоком, соответственно. Для модели нестационарного массопереноса запишем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}(x, t)}{\partial x} &= \hat{A}_{ij} \frac{\partial Q_{ij}(x, t)}{\partial t} + \bar{A}_{ij} H_{ij} Q_{ij}(x, t); \\ \frac{\partial P_{ij}(x, t)}{\partial t} &= \bar{B}_{ij} \frac{\partial Q_{ij}(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Например, для нестационарного потока в системе газопроводов H_{ij} усреднённое значение $Q_{ij}(x, 0)/P_{ij}(x, 0)$ соответствует средней скорости течения газа по всей длине l_{ij} элемента газопровода. Задача моделирования нестационарных режимов работы ССДЛ формулируется следующим образом. Пусть система работает для $t = 0$ в стационарном режиме. В моменты $t > 0$ на её свободных узлах задаются измеряемые или прогнозируемые временные функции P или Q , а в узлах сосредоточенного отбора или подачи (тока, газа, теплоты и т. п.) — временные функции Q . При $t > 0$ для любых элемента и координаты сети необходимо получить временные функции P , Q . Представим сеть в виде графа с множеством номеров вершин Λ . Обозначим λ_i — множество номеров вершин, связанных ребром с вершиной i . Пусть $\Omega \in \Lambda$ — множество номеров вершин, где сходятся более одной дуги, т. е. вершины 3, 4, 5, 7, 8 (см. рис. 1); $\Omega^* \in \Lambda$ — номера вершин, куда входит или из которых выходит только одна дуга; множество Ω^* — номера свободных узлов графа, а именно вершины 1, 2, 6, 9. Тогда Ω_1 — множество номеров вершин из Ω , соответствующее узлам со сосредоточенными отборами потока (вершина 8), а Ω_2 — узлам со сосредоточенными его подачами (вершина 4). Пусть Ω_q^* , Ω_p^* — множество номеров свободных узлов с заданными временными функциями, соответственно, P или Q . Таким образом, задача моделирова-

ния нестационарных режимов работы ССДЛ сводится к решению замкнутой системы, в которую входят:

линеаризованные дифференциальные уравнения вида (2), описывающие процесс вдоль элементов ij ;

уравнения баланса потока в узлах:

$$\sum_k Q_{jk}(0, t) - \sum_i Q_{ij}(l_{ij}, t) = R_j(t); \quad i, k \in \lambda_j; \quad j \in \Omega; \quad (3)$$

$$R_j(t) = \begin{cases} +u_j, & j \in (\Omega_1 \cup \Omega_q^*); \\ -u_j, & j \in (\Omega_2 \cup \Omega_p^*); \\ 0, & j \notin (\Omega_1 \cup \Omega_2), \end{cases}$$

где $R_j(t)$ — заданная функция расхода, аналогичная сосредоточенному отбору или подаче Q в узле j ;

равенства давлений в узлах сети для начальных и конечных сечений элементов, сходящихся в них:

$$P_{jk}(0, t) = P_{nj}(l_{jn}, t); \quad j \in \Omega; \quad k, n \in \lambda_j. \quad (4)$$

При поиске P , Q для любого элемента сечений в некоторый момент времени в качестве неизвестных в уравнениях (2)—(4) можно рассматривать функции давления и потока в начальных ($x = 0$) и конечных ($x = l_{ij}$) сечениях элементов ij . В принятых обозначениях необходимо определить граничные условия $P_{ij}(z_{ij}, t)$ или $Q_{ij}(z_{ij}, t)$, когда $z_{ij} = l_{ij}$, или $z_{ij} = 0$. По найденным функциям можно рассчитать P , Q для любого сечения x элемента ij для момента времени t . Трудности решения уравнений (2)—(4) обусловлены: системой дифференциальных уравнений в частных производных с неизвестными функциями граничных условий; неизвестными функциями граничных условий; большой размерностью при моделировании реальных сетей. Аналитические методы решения таких систем пока не получены. Кроме того, конечноразностные способы и подходы, основанные на методе характеристик или конечных элементов и эффективные при моделировании режимов одного линейного элемента или небольшой разветвлённой сети, нельзя использовать для сетей средней и большой размерности.

Решим уравнения (2)—(4) операционным методом, основанным на использовании идей прямого и обратного численного преобразования Лапласа [2]. Чтобы в систему (2)—(4) входили только потенциалы в узлах системы или потоки для концевых сечений элементов, необходимо в (3), (4) подставить решение (2) для каждого элемента сети, выраженное через эти функции. В общем случае, чтобы использовать решение (2) в других уравнениях системы, необходимо решать её для следующих видов граничных условий:

$$\begin{aligned} P_{ij}(0, t); P_{ij}(l_{ik}, t); P_{ij}(0, t); Q_{ij}(l_{ik}, t); \\ Q_{ij}(0, t); P_{ij}(l_{ik}, t); Q_{ij}(0, t); Q_{ij}(l_{ik}, t). \end{aligned} \quad (5)$$

Начальными условиями (2) для каждого элемента будет функция изменения потенциала вдоль него для $t = 0$. Если система для $t = 0$ находилась в стационарном режиме, то начальное условие для решения ij определяется как

$$P_{ij}(x, 0) = P_{ij}(0, 0) + \bar{A}_{ij} H_{ij} x Q_{ij}(0, 0), \quad 0 \leq x \leq l_{ij}. \quad (6)$$

Найдём решение (2) с начальными условиями (6) и граничными условиями (5). Для этого применим преобразование Лапласа с последующим решением обыкновенного дифференциального уравнения для образа функции потенциала. Тогда для каждого вида условий (5) получим изображение функции потенциала $p_{ij}(x, s)$ через изображения функций граничных условий и начальных параметров (здесь и далее изображения функций представлены строчными знаками, имеющие аргумент s). Например, для $\hat{A}_{ij} = 0, B_{ij} = \bar{B}_{ij}/(\bar{A}_{ij}H_{ij})$ в (2) и условий (5) имеем:

$$p_{ij}(x, s) = P_{ij}(x, 0)/s + [p_{ij}(0, s) - P_{ij}(0, 0)/s] \operatorname{ch} \beta x + \\ + sp_{ij}(l_{ij}, s) + P_{ij}(0, 0) \operatorname{ch} \beta l_{ij} - sp_{ij}(0, s) \operatorname{ch} \beta l_{ij} - \\ - P_{ij}(l_{ij}, 0) \operatorname{sh} \beta x \operatorname{sh} \beta l_{ij}/s, \quad (7)$$

где $\beta = (s/B_{ij})^{1/2}$.

Аналогично можно получить линейные выражения типа (7) относительно образов функций граничных условий потенциала или потока и для других видов граничных условий. В общем случае систему можно представить относительно n неизвестных образов потенциалов узлов ССДЛ в виде

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}(s) y_j(s) = b_i(s); \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad y_j(s) = p_{jk}(0, s) = p_{ij}(l_{ij}, s); \\ k, r \in \lambda_j. \quad (8)$$

При этом n — количество элементов Ω .

Заметим, что линейная формула (8) для образов потенциалов или потоков узлов ССДЛ выводится для любого вида квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных с заданием временных функций потенциала и потока на свободных концах сети. Из системы следует, что для получения параметров ССДЛ в динамике требуется задать временные параметры в точке n и обязательно на свободных узлах. Решение (8) даёт изображение функций $P_{ij}(z_{ij}, t)$. Практически все традиционные методы обратного преобразования Лапласа требуют представления изображения в виде явных функций. Даже если бы эти изображения были получены в квадратурах, восстановление оригинала связано с определенными трудностями, так как изображения не имеют канонических форм, удобных для осуществления обратного преобразования Лапласа. Более того, применение теоремы Хевисайда также не позволяет проводить такое восстановление из-за необходимости искать корни громоздких и оригинальных для каждой топологии сети трансцендентных уравнений. Таким образом, необходимо применение численных методов обратного преобразования Лапласа.

Проблему восстановления оригиналов по изображениям, являющимся решением систем линейных уравнений, будем решать методом, базирующимся на разложении оригинала в ряд Фурье по ортогональной системе функций. Суть подхода такова. Пусть задано изображение $f(s)$ некой функции,

представленной в виде $F(t) = \beta(t) z(t)$, т. е. $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$.

Искомая функция $z(t)$ интегрируема на конечном отрезке $[0, T]$ и принадлежит классу $L_2[\beta(t), 0, \infty]$. Требуется по $f(s)$ вычислить $z(t)$ для $t \in [0, T]$. В силу наложенных на $z(t)$, $\beta(t)$ условий можно вычислить «взвешенные моменты» функции $z(t)$ как $\mu_k = f(k)$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Теперь найдём $F(t)$ по μ_k или, что то же самое, определим $z(t)$ по значениям $f(s)$ в целочисленных точках. Упростим задачу и рассчитаем по первым $n+1$ «взвешенным моментам» такой многочлен $W_n(e^{-t}) =$

$$= \sum_{k=0}^n c_k e^{-kt}, \quad \text{что его «взвешенные моменты» совпадают с заданными значениями } \mu_k \text{ или выполняется условие}$$

$$w_n(s) = \int_0^\infty e^{-st} z(t) \beta(t) dt,$$

где $w_n(s)$ — изображение $W_n(e^{-t})$.

В [4] показано, что если $r_k(e^{-t})$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$, — система многочленов, ортонормированных для аргумента e^{-t} на конечном отрезке $[0, 1]$ по весу $e^t \beta(t)$, то конечную сумму $n+1$

$$\text{членов ряда } W_n(e^{-t}) = \sum_{k=0}^n c_k r_k(e^{-t}), \quad \text{где } c_k = \int_0^\infty e^t z(t) \beta(t) r_k(e^{-t}) dt$$

можно рассматривать как наилучшее приближение $z(t)$ на множестве многочленов степени не выше n . Наиболее экономичные вычисления получаются, если разложение ведётся по смещённым ортогональным многочленам Якоби. Если в качестве весовой функции взять функцию $\beta(t) = e^{-t}$, то разложение, например функции $P_{ij}(0, t)$, будет осуществляться с использованием системы смещённых многочленов Лежандра, которое имеет вид [3]:

$$P_{ij}(0, t) = \sum_{k=0}^\infty (2k+1) \left(\sum_{m=0}^k v_{km} e^{-mt} \right) \left[\sum_{m=0}^k v_{km} p_{ij}(0, m+1) \right], \quad (9)$$

$$\text{где } v_{km} = (-1)^{k+m} \prod_{n=1}^m \frac{(k-n+1)(k+n)}{n^2}, \quad \text{при } m \neq 0; \quad v_{k0} = (-1)^k;$$

$p_{ij}(0, s+1)$ — изображение функции $e^{-t} P_{ij}(0, t)$.

Элементы $p_{ij}(0, s)$ для (9) и $s = 1, 2, 3, \dots$ используют как решения системы (8) для тех же значений s . По вычисленным параметрам на концах элементов, используя формулы типа (7), получим изображения временных параметров в любых точках элементов, а по (9) — их оригиналы. Отметим некоторые особенности представленного алгоритма.

1. Рассмотренный метод можно использовать для всех видов линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих нестационарные процессы элемента и уравнений сопряжений узлов системы. В этом случае формулы, аналогичные (7), дают линейную зависимость от образов функций граничных условий.

2. При существовании в системе элементов усилительного типа (трансформаторов, насосных и компрессорных станций, нагревателей и т. д.) в их математической формализации функционирования могут встречаться и нелинейные алгебраические уравнения. Авторам удалось использовать линеаризующий метод Ньютона, когда параметры компрессорной станции связаны квадратичной выпуклой функ-

цией. Это привело к решению системы (8) для каждого шага итерации в методе Ньютона.

3. Задача численного обратного преобразования Лапласа является некорректной. При этом её некорректность вовсе не отрицает получения решения. К интегралу для $f(s)$ можно применить классические методы регуляризации, разработанные академиком А. Н. Тихоновым и его последователями [5]. Однако, такой подход слишком трудоёмок. Гораздо более эффективны компьютерные технологии, позволяющие проводить вычисления. Скорость и точность расчётов зависит от скорости сходимости ряда (9), имеющего такие свойства, что с ростом k возрастают и коэффициенты v_{km} , в то же время быстро убывают значения аргумента e^{-mt} и «взвешенных моментов» p_{ij} ($0, m+1$). Это требует использования специальных приёмов вычислений для работы с разностью произведений чисел, много больших и много меньших единицы. Такие приёмы счёта позволяют до определённого момента сохранять точность вычислений, определяемую длиной разрядной сетки компьютера. Однако применение стандартных арифметических операций с удвоенной длиной числа, которые имеются во всех современных программных средствах компьютеров, позволяет проводить расчёты без потери точности для суммы порядка 18 членов ряда (9). Из [2] следует, что такое число приемлемо для восстановления значений гладких функций с погрешностью около 0,5 %. Тем не менее, при двойной длине числа почти вдвое увеличивается время вычислений, так как для устойчивости метода «взвешенные моменты» должны находиться с той же точностью, что и коэффициенты v_{km} . Если увеличивать длину разрядной сетки, что возможно в современных компьютерах, то ряд (9) вычисляется с любой точностью. Если смоделировать переходный процесс, то стандартной разрядной сетки компьютера хватит для 7 членов ряда (9), и при этом коэффициенты ортогонального полинома можно определить точно. Расчёты переходных режимов работы для электрических параллельных R - L - C цепей показали абсолютное совпадение результатов данного метода с табличными значениями обратного преобразования Лапласа.

4. Вместо полиномов Лагранжа можно использовать смещённые ортогональные полиномы Чебышева [4], в которых

$$\beta(t) = e^{-(\alpha+1)t} (1 - e^{-t})^\lambda; \lambda > -1; \beta > -1.$$

5. Если на свободных узлах задаются периодические временные функции или имеются дифференциальные уравнения временных колебаний параметров, то согласно [4], вместо разложения по ортогональным полиномам Чебышева или Лежандра в качестве системы ортогональных многочленов, можно взять синусы нечётных кратных дуг, по которым можно получить разложение, аналогичное (9), для искомых функций решения системы (8).

6. Из теории ортогональных полиномов известно, что наилучшее приближение функции рядом Фурье по многочлену Якоби обеспечивается на середине сегмента $[0, 1]$ для аргумента e^{-t} [4]. Таким образом, наилучшая сходимость для ряда Фурье по многочленам Лежандра (9) будет для $t = \ln(2)$. Вычислив смещённые многочлены Лежандра для

аргумента, приведённого к этим значениям, можно получить ряд, который сходится быстрее ряда (9).

7. Скорость счёта по разработанной методике практически не зависит от времени t , прошедшего от начала условий. Основным период расчётов (98 % общего времени) — время решения систем линейных алгебраических уравнений, матрицы которых имеют одинаковую сильно разреженную структуру. Для поиска решения таких систем необходимо применять методы, использующие эти особенности.

Авторам удалось значительно сократить время решения системы в результате построения аналитических выражений в виде формул. Данные формулы могут быть получены при использовании компьютеров с программным обеспечением, имеющим аналитические возможности [3].

Одним из приёмов ускорения решения систем линейных алгебраических уравнений для сильно разреженных матриц можно считать метод исключения Гаусса с представлением обратной матрицы в одной из факторизованных форм, называемых элиминативной (EFI) и мультипликативной формами обратной матрицы (MFI) [3, 6].

Полезны также оказались процедуры упаковки информации при использовании различных численных итерационных методов решения систем линейных уравнений (метод Зейделя, α -процессы, метод квадратных корней и др.). Кроме того, отличные результаты по сокращению времени решения дают алгоритмы распараллеливания для решения систем линейных алгебраических уравнений, но они требуют специального программного и технического обеспечения [3].

Заключение. Задача контроля нестационарных параметров функционирования ССДЛ с линейными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, описывающими процессы каждого из элементов и системы в целом, может сводиться к многократному решению систем линейных алгебраических уравнений для поиска конечного числа «взвешенных моментов» для численного обратного преобразования Лапласа. Такие системы имеют одинаковую структуру и их размерность равна числу несвободных узлов сети.

Л и т е р а т у р а

1. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. М.: Наука, 1993.
2. Ретинский В. С. Воспроизведение параметров неустановившихся режимов работы сетей с распределёнными параметрами. Вестник Московского государственного университета леса — Лесной вестник. 2007. № 4 (53). С. 17—176.
3. Домрачев В. Г., Ретинский В. С. Моделирование нестационарных процессов в сложных системах сетевого типа. Экология, мониторинг и рациональное природоведение / Труды ин-та РАКА, МГУЛ и ИСИЛ. 2000. Вып. 307(II). С. 26—34.
4. Суевин А. М. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 2007.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. М.: Мир, 1977.

Дата принятия 23.12.2015 г.