

Разработка алгоритмов и программ построения опорных окружностей для анализа отклонений от круглости

Б. Н. Марков, О. Н. Меликова, С. Е. Педь

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Россия,
e-mail: bnmarkov@rambler.ru, olga.melikova.86@mail.ru, seped@mail.ru

Предложена процедура построения опорных окружностей профиля осевого сечения изучаемого вала или отверстия – наибольшей вписанной и наименьшей описанной, а также окружностей, задающих границы кольца минимальной ширины. Радиусы и координаты центров окружностей находят при минимизации или максимизации соответствующего функционала, построенного на основе координат точек профиля. Представленные процедуры построения реализованы в программном пакете Mathcad. Полученные результаты могут быть использованы при определении отклонений от круглости, в том числе, при разработке программно-математического обеспечения средств измерений.

Ключевые слова: профиль поверхности, наибольшая вписанная окружность, наименьшая описанная окружность, кольцо минимальной ширины.

Исследованиям в области отклонений формы посвящено множество работ, например [1, 2], в которых указывается необходимость правильного выбора опорных (базовых) поверхностей или линий. Так при анализе отклонений от круглости важное значение имеет построение правильных алгоритмов определения опорных окружностей профиля осевого сечения изучаемого вала или отверстия. В стандарте ISO 12181-1:2011 «Geometrical product specifications (GPS). Roundness. Part 1: Vocabulary and parameters of roundness» рассматриваются следующие опорные окружности:

средняя окружность профиля номинально круглого изделия, при этом средний квадрат отклонений профиля от этой окружности является минимальным на множестве всех возможных окружностей;

наибольшая вписанная окружность – окружность наибольшего возможного радиуса или диаметра, помещающаяся внутри профиля номинально круглого изделия, решение задачи по поиску такой окружности может быть неоднозначным;

наименьшая описанная окружность – окружность наименьшего возможного радиуса или диаметра, внутри которой располагается профиль номинально круглого изделия; внешняя и внутренняя концентрические окружности – границы кольца минимально возможной ширины, внутри которого размещается профиль номинально круглого изделия.

Центр средней окружности является центром профиля рассматриваемого осевого сечения номинально круглого изделия, центры остальных опорных окружностей могут быть смещены относительно центра профиля.

В качестве исходных данных в программном пакете Math Cad используют массив N значений радиус-векторов профиля $\mathbf{p}_n$, $n=0, \dots, N-1$, упорядоченных в соответствии с углом поворота φ_n при измерениях в полярной системе

координат, а также массив N значений пар координат $(x_n; y_n)$ точек поверхности изделий в заданном сечении при координатных измерениях в декартовой системе координат:

$$\mathbf{p}_n := \sqrt{[x_n - \text{mean}(x)]^2 + [y_n - \text{mean}(y)]^2}; \quad (1)$$

$$\varphi_n := \text{angle}[x_n - \text{mean}(x); y_n - \text{mean}(y)], \quad (2)$$

где $\text{mean}(x)$, $\text{mean}(y)$ – средние значения координат; $\text{angle}(x; y)$ – угол между осью абсцисс и радиус-вектором точки с координатами $(x; y)$, при этом начало координат следует перенести в точку $[\text{mean}(x); \text{mean}(y)]$.

Процедура определения параметров средней окружности не представляет особых трудностей. Однако нахождение параметров других опорных окружностей связано с необходимостью решения нескольких сложных проблем. Известны, по крайней мере, три метода определения параметров этих окружностей: метод с использованием диаграммы Г. Ф. Вороного [3–5]; метод перебора всех возможных комбинаций трёх точек профиля с последующим построением по ним окружностей и поиском нужной окружности [3, 6]; метод, основанный на минимизации некоторого функционала от результатов измерения при соблюдении определённых условий [7].

Метод [6] предусматривает построение искомых окружностей по трём точкам профиля. Однако в ряде случаев опорные окружности имеют с профилем только две общие точки, например с профилем, форма которого близка к овалу. Другим существенным недостатком этого метода является большой объём проводимых вычислений. Количество окружностей, полученных перебором всех комбинаций трёх точек профиля, определяется по формулам комбинаторики в зависимости от общего числа точек профиля. При заявленном в статье минимальном (150–200) числе точек профиля количество окружностей

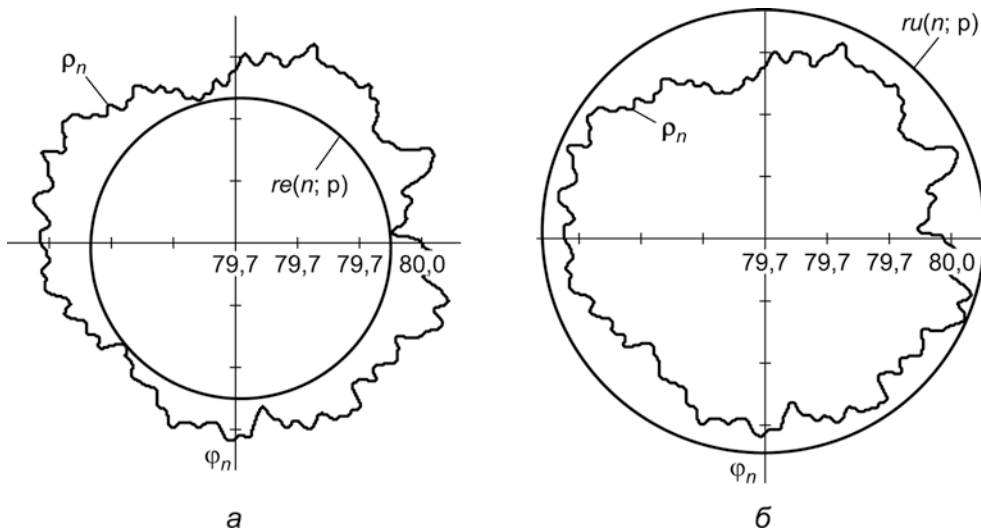


Рис. 1. Результаты построения вписанной (а) и описанной (б) окружностей:
(ρ_n ; φ_n) – действительный профиль отверстия; $re(n; \mathbf{p})$, $ru(n; \mathbf{p})$ – вписанная и описанная окружности соответственно

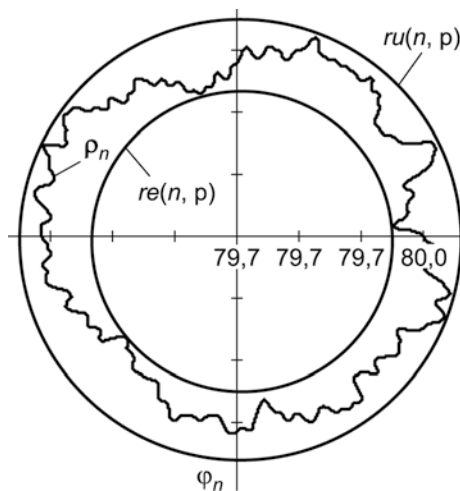


Рис. 2. Результаты построения кольца минимальной ширины:
 $re(n; \mathbf{p})$, $ru(n; \mathbf{p})$ – соответственно внутренняя и внешняя границы кольца

составляет от полумиллиона и более. Таким образом, данный метод построения опорных окружностей является громоздким, а в ряде случаев вообще не может дать верного решения.

Целью настоящей работы является построение программ определения диаметров и положения опорных окружностей по полученным в результате измерения или моделирования координатам точек профиля радиального сечения вала или отверстия средствами математического пакета MathCad.

Далее будем использовать полярные координаты. Исходные данные о профиле сечения изделия заданы набором координат (φ_n ; ρ_n). Уравнение окружности радиусом a и центром в точке с координатами (r_0 ; θ) имеет вид [8]:

$$r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \theta) + r_0^2 = a^2, \quad (3)$$

где (r , φ) – полярные координаты точек этой окружности.

Введём вектор $\mathbf{p}$ следующих параметров окружности: ρ_0 , ρ_1 , – угловая и радиальная координаты центра окружности в полярной системе координат; ρ_2 – радиус окружности. Разрешив уравнение (3) относительно координаты r , получим уравнение окружности, смещённой относительно начала координат:

$$r(\varphi; \mathbf{p}) := \rho_0 \cos(\varphi - \rho_1) + \sqrt{\rho_2^2 - \rho_0^2 \sin^2(\varphi - \rho_1)}. \quad (4)$$

Учтём, что смещение центра ρ_0 всегда значительно меньше радиуса искомой окружности ρ_2 и упростим выражение (4) к виду

$$r(\varphi; \mathbf{p}) := \rho_2 + \rho_0 \cos(\varphi - \rho_1)$$

или, перейдя к углам φ_n , к виду

$$r(n; \mathbf{p}) := \rho_2 + \rho_0 \cos(\varphi_n - \rho_1). \quad (5)$$

Вписанная окружность. Предположим, что вписанная окружность проходит через точку профиля, в которой радиус-вектор $\mathbf{p}$ достигает минимального значения $\min(\mathbf{p})$. Номер be соответствующего отчёта в исходных данных определим следующим образом:

$$ce := \text{match}(\min(\mathbf{p}); \mathbf{p}); \quad be := ce_0. \quad (6)$$

С учётом (6) уравнение (5) можно преобразовать как

$$re(n; \mathbf{p}) := \min(\mathbf{p}) - 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi_n + \varphi_{be}}{2} + \rho_1\right) \sin\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{be}}{2}\right). \quad (7)$$

Входящие в уравнение (7) параметры $\mathbf{p}$ должны быть такими, чтобы (7) стало уравнением вписанной окружности: требуется найти значения этих параметров, при которых в формуле (3) после подстановки вместо радиус-вектора r его значения $re(n; \mathbf{p})$ из (7) будет максимальным радиус a . Поскольку теперь радиус a становится функцией параметров $\mathbf{p}$, представим его в виде функционала:

$$DE(\mathbf{p}) = \sqrt{re^2(n; \mathbf{p}) - 2re(n; \mathbf{p})\rho_0 \cos(\varphi_n - \rho_1) + \rho_0^2}. \quad (8)$$

Описанная окружность. Эта окружность должна проходить через точку профиля, в которой радиус-вектор $\mathbf{p}$ достигает максимального значения $\max(\mathbf{p})$. Номер bu соответствующего отчёта в исходных данных определим как

$$cu := \text{match}(\max(\mathbf{p}); \mathbf{p}); \quad bu := cu_0. \quad (9)$$

С учётом (9) уравнение (5) можно преобразовать к виду

$$ru(n; \mathbf{p}) := \max(\mathbf{p}) - 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi_n + \varphi_{bu}}{2} + \rho_1\right) \sin\left(\frac{\varphi_n - \varphi_{bu}}{2}\right). \quad (10)$$

Для определения значений параметров, при которых радиус a или квадрат радиуса a^2 в формуле (3) будут минимальными после подстановки вместо радиус-вектора r его значения $ru(n; \mathbf{p})$ из (10). Поскольку теперь квадрат радиуса a^2 становится функцией параметров $\mathbf{p}$, представим его в виде функционала:

$$DU(\mathbf{p}) = \sqrt{ru^2(n; \mathbf{p}) - 2ru(n; \mathbf{p})p_0 \cos(\varphi_n - \varphi_1) + p_0^2}. \quad (11)$$

Минимальная кольцевая зона. Минимизирующим функционалом должна быть разность радиусов окружностей, ограничивающих эту зону:

$$DR(\mathbf{p}) := \sqrt{DU(\mathbf{p})} - \sqrt{DE(\mathbf{p})}. \quad (12)$$

Радиус как вписанной, так и описанной окружностей является величиной постоянной и не зависит от номера (индекса) n исходных данных, поэтому можно принять любой номер, например, $n=0$.

Поиск максимума должен сопровождаться необходимостью выполнения условий для определений вписанной и описанной окружностей, а также кольцевой зоны: $re(n; \mathbf{p}) \leq \rho_n$; $ru(n; \mathbf{p}) \geq \rho_n$; $re(n; \mathbf{p}) \leq \rho_n \wedge ru(n; \mathbf{p}) \geq \rho_n$ соответственно.

Ограничений очень много, для сокращения их числа можно воспользоваться следующими возможностями MathCad. Программа проверяет истинность высказывания типа $re(n; \mathbf{p}) \leq \rho_n$ и присваивает ему значение 1, если оно верно, и 0 в противном случае. Поэтому в MathCad справедливы несколько непривычные равенства: $8 \leq 3 = 0$, $3 \leq 8 = 1$.

Поскольку все приведённые условия должны выполняться для каждого $n \in 0, \dots, N-1$, то суммы результатов проверки их верности должны равняться числу N экспериментальных данных:

$$\sum_n [re(n; \mathbf{p}) \leq \rho_n] = N; \quad (13)$$

$$\sum_n [ru(n; \mathbf{p}) \geq \rho_n] = N; \quad (14)$$

$$\sum_n \{[re(n; \mathbf{p}) \leq \rho_n] \wedge [ru(n; \mathbf{p}) \geq \rho_n]\} = N. \quad (15)$$

Теперь в терминах MathCad запишем программы для определения опорных окружностей, т. е. их диаметров и смещений центров относительно начала полярных координат.

Программа для вписанной окружности включает формулы (6)–(8) при начальных условиях $\mathbf{p} := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$, формулу (13) и итоговое выражение

$$P := \text{Maximize}(DE, \mathbf{p}) \quad \mathbf{p} := P.$$

Диаметр вписанной окружности составляет $d_e = 2\sqrt{DE(\mathbf{p})}$, где $\mathbf{p}$ – найденный вектор координат центра вписанной окружности. Для наглядности в полярной системе координат построены профиль сечения контролируемого отверстия $[r; \varphi]$ и вписанная окружность $[re(n; \mathbf{p}), \varphi_n]$ (рис. 1, а).

Программа для описанной окружности включает формулы (9)–(11) при начальных условиях $\mathbf{p} := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$, формулу (14) и итоговое выражение

$$P := \text{Minimize}(DU, \mathbf{p}) \quad \mathbf{p} := P.$$

Диаметр описанной окружности составляет $d_u = 2\sqrt{DU(\mathbf{p})}$. На рис. 1, б показан профиль сечения контролируемого вала и описанная окружность $[ru(n; \mathbf{p}), \varphi_n]$.

Программа для минимальной кольцевой зоны (равно для вала и для отверстия) включает последовательность формул (6), (7), (9), (10), (8), (11), (12) при начальных условиях $\mathbf{p} := \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix}$, формулу (15) и итоговое выражение

$$P := \text{Minimize}(DR, \mathbf{p}) \quad \mathbf{p} := P.$$

Здесь радиус-векторы описанной $ru(n; \mathbf{p})$ и вписанной $re(n; \mathbf{p})$ окружностей являются радиус-векторами большей и меньшей окружностей кольца.

При найденном векторе $\mathbf{p}$ координат центра кольца его внешний и внутренний диаметры соответственно определяются как диаметры описанной и вписанной окружностей. Для наглядности в полярной системе координат можно теперь построить профиль сечения контролируемого вала и кольцо минимальной толщины (рис. 2).

Представленные в настоящей статье процедуры построения вписанной и описанной окружностей и кольца минимальной ширины, реализованные в виде программы в вычислительном комплексе MathCad, особенно удобны для использования в лабораторных условиях и при проведении экспериментальных исследований. Эти алгоритмы легко применимы при построении программно-математического обеспечения приборов для измерения отклонений от круглости.

Литература

1. **Педь С. Е.** Исследование методической погрешности координатных измерений диаметра и координат центра профилей цилиндрических погрешностей // Вестник МГТУ «Станкин». 2012. № 1. С. 63–66.
2. **Глубоков А. В.** Анализ методик измерения отклонений формы координатным методом // Вестник МГТУ «Станкин». 2017. № 1. С. 72–77.
3. **М. Petrik, J. Kováč, P. Kačuch, L. Bednarčíková, R. Hudák, J. Živčák.** Roundness: determining the reference circle for MCCI and MICI system // MEASUREMENT 2009: Proc. 7th Intern. Conf., Smolenice, Slovakia. [Электрон. версия]. URL: http://www.measurement.sk/M2009/proceedings/352_Petrik.pdf (дата обращения: 05.03.2018).
4. **Препарата Ф., Шеймос М.** Вычислительная геометрия. Введение / Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 473 с.
5. **Карабцев С. Н., Стуколов С. В.** Построение диаграммы Вороного и определение границ области в методе естественных соседей // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 3. С. 65–80.
6. **Высогорец Я. В., Чемборисов Н. А.** Блок-схемы определения отклонения от круглости // Современная техника и технологии. 2015. № 4. [Электрон. версия]. URL: <http://technology.snauka.ru/2015/04/6498> (дата обращения: 11.02.2018).

7. **Abhijit Gosavi, Elizabeth Cudney.** Form errors in precision metrology: a survey of measurement techniques // Quality Engineering. 2012. V. 24 (3). P. 369–380. [Электрон. версия]. URL: https://www.researchgate.net/publication/254354247_Form_Errors_in_Precision_Metrology_A_Survey_of

Measurement_Techniques (дата обращения: 22.10.2018).

8. **Аналитическая** геометрия: учебник для вузов / Под ред. И. И. Привалова. М.: Изд-во Юрайт, 2018. 233 с.

Дата принятия: 07.11.2018.

Development of algorithms and construction programs for reference circles for the analysis of circularity deviations

B. N. Markov, O. N. Melikova, S. E. Ped'

Moscow State Technological University "STANKIN", Moscow, Russian Federation, e-mail: bnmarkov@rambler.ru, olga.melikova.86@mail.ru, seped@mail.ru

The construction procedures of reference circles (maximum inscribed reference circle, minimum circumscribed reference circle and minimum zone reference circles) are presented. The parameters of these circles (its radius and center coordinates) are found by minimizing or maximizing the functionals based on the coordinates of profile points. Calculation algorithms are implemented in the software package Mathcad. These algorithms can be integrated into software of roughness measuring devices.

Key words: surface profile, maximum inscribed reference circle, minimum circumscribed reference circle, minimum zone reference circles.