

Особенности принятия решения по результатам сличений эталонов

Е. С. СУЛОЕВА, Э. И. ЦВЕТКОВ, М. Т. РЗИЕВА

С.-Петербургский государственный электротехнический университет,
С.-Петербург, Россия, e-mail: suloewa@list.ru

Рассмотрена процедура обработки результатов групповых сличений эталонов, позволяющая установить вероятность превышения неисключенной систематической погрешностью установленного допустимого значения для каждого эталона.

Ключевые слова: сличение, транспортируемые эталоны, метрологический анализ.

The procedure of processing of standards comparison data allowing to determine the probability of exceeding by the non-exceptional the determined value of permissible error for each standard is considered.

Key words: comparison, transportable standards, metrological analysis.

В последние годы проблема сличения национальных эталонов привлекает особое внимание. Это обусловлено, прежде всего, достижением договоренности о взаимном признании эталонов [1], что накладывает дополнительные обязательства на государственные метрологические службы как в части разработки эталонных средств, отвечающих международным требованиям, так и разработки процедур сличения, обеспечивающих объективное сопоставление характеристик сличаемых эталонов и принятие обоснованного решения об их соответствии предъявленным требованиям.

Специфика сличений национальных эталонов заключается в том, что их характеристики близки по уровню и, следовательно, классический принцип сопоставления поверяемого средства с эталонным, метрологические характеристики которого известны и существенно выше характеристик поверяемого средства, неприменим.

Помимо физико-технических проблем сопоставления характеристик эталонов, обусловленных трудностями компарирования формируемых ими результатов, усугубляемых сложностью транспортирования эталонов и вспомогательных средств (компараторов, транспортируемых эталонов и т. п.), имеется также проблема интерпретации полученных результатов сличений (принятия решения об их соответствии или несоответствии предъявленным требованиям). Одна из основных проблем заключается в том, что неудовлетворительные результаты сличений соотносятся с парой эталонов, что означает признание обоих эталонов несоответствующими предъявленным требованиям, хотя причиной такого несоответствия может быть только один из них.

Анализ работ в данной области позволяет сделать вывод, что физико-техническое обеспечение сличений эталонов находится на уровне, достаточном для формирования достоверных результатов их компарирования [2]. В настоящее время интерпретация полученных результатов осуществляется на эвристической основе, что сказывается на полноте и корректности априорной информации. Принимаемое решение должно основываться не только на непосредственных результатах сличений эталонов, но и на имеющихся ап-

риорных знаниях (АЗ) о свойствах эталонов и вспомогательных средств.

В [3] проведен анализ подходов к формированию моделей результатов, полученных с помощью сличаемых эталонов, на основе которого можно считать целесообразным представление формируемого эталоном сигнала в следующем виде:

$$\lambda^* = \lambda_n + \Delta_{\text{сист}}\lambda^* + \Delta_{\text{сл}}\lambda^*, \quad (1)$$

где λ_n^* — номинальное значение формируемого сигнала; $\Delta_{\text{сист}}\lambda^*$, $\Delta_{\text{сл}}\lambda^*$ — неисключенная систематическая и случайная погрешности формируемого сигнала, соответственно.

Сличение эталонов заключается в формировании разностного сигнала

$$\delta\lambda_{12}^* = \lambda_1^* - \lambda_2^*,$$

где λ_1^* , λ_2^* — результаты, формируемые первым и вторым эталонами.

Учитывая (1), получаем

$$\delta\lambda_{12}^* = \lambda_{1n}^* - \lambda_{2n}^* + \Delta_{\text{сист}}\lambda_1^* - \Delta_{\text{сист}}\lambda_2^* + \Delta_{\text{сл}}\lambda_1^* - \Delta_{\text{сл}}\lambda_2^* + \Delta_k\lambda^*, \quad (2)$$

где $\Delta_k\lambda^*$ — случайная погрешность, вносимая компаратором или вспомогательным транспортируемым эталоном.

Решение о соответствии или несоответствии сличаемых эталонов предъявленным требованиям принимается на основе полученного значения. Формально процедура заключается в сравнении $\delta\lambda_{12}^*$ с некоторым порогом Δ_n и принятии решения о соответствии предъявленным требованиям при $\delta\lambda_{12}^* \leq \Delta_n$ или о несоответствии при $\delta\lambda_{12}^* > \Delta_n$. Порог устанавливается на эвристической основе, но с учетом тех погрешностей, которые обусловлены значениями, и характеристиками погрешностей из (2). Организации, представляющие эталоны на сличение, сопровождают их данными о неопределенности измерений — среднем квадратическом отклонении (СКО) случайных погрешностей, а также сведения-

ми, позволяющими оценить предельное значение систематической погрешности.

В [4] представлен подход к оцениванию условных вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода при принятии решения о соответствии или несоответствии сличаемых эталонов требованиям фиксированной разности $\Delta_{\text{сист}} \lambda_1^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_2^*$. Этот подход основан на установлении плотности распределения вероятности $w\left[\delta\lambda^* / (\Delta_{\text{сист}} \lambda_1^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_2^*)\right]$ как композиции законов

распределения вероятности $w(\Delta_{\text{сл}} \lambda_1^*) * w(\Delta_{\text{сл}} \lambda_2^*) * w(\Delta_{\text{к}} \lambda^*)$

при математическом ожидании $\Delta_{\text{сист}} \lambda_1^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_2^*$ (разность $\lambda_{\text{н}1}^* - \lambda_{\text{н}2}^*$ исключается). Там же показано, что вероятности ошибок 1-го и 2-го рода зависят, прежде всего, от уровня случайных погрешностей эталонов и компаратора при j -м сличении, $\Delta_{\text{сл}} \lambda_{1j}^*$, $\Delta_{\text{сл}} \lambda_{2j}^*$ и $\Delta_{\text{к}} \lambda_j^*$. Это означает, что эффективность сличения двух эталонов зависит от числа выполняемых сличений данной пары эталонов с усреднением полученных результатов. В этом случае после усреднения получим

$$\delta_{\Sigma} \lambda_{12}^* = \Delta_{\text{сист}} \lambda_1^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_2^* + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Delta_{\text{сл}} \lambda_{1j}^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{2j}^* + \Delta_{\text{к}} \lambda_j^*),$$

где n — число сличений.

В данном случае решение принимается относительно пары сличаемых эталонов.

Рассмотренный в [1, 3] случай характеризуется тем, что о систематической погрешности априори известно, что она существует. Поэтому установление области $[-\Delta_{\text{п}}; \Delta_{\text{п}}]$ значений

$\delta\lambda^*$ или $\delta_{\Sigma} \lambda_{12}^*$, попадание в которую означает соответствие сличаемых эталонов требованиям, производится экспертами в соответствии с опытом.

Ситуация несколько меняется, если в состав АЗ включены сведения о предельных значениях систематических погрешностей. Это позволяет использовать для установления интервала $[-\Delta_{\text{п}}; \Delta_{\text{п}}]$ условные вероятности следующего вида:

$w\left[\delta\lambda^* / (\Delta_{\text{сист.п}} \lambda_1^* + \Delta_{\text{сист.п}} \lambda_2^*)\right]$ при однократном сличении или

$w\left[\delta_{\Sigma} \lambda^* / (\Delta_{\text{сист.п}} \lambda_1^* + \Delta_{\text{сист.п}} \lambda_2^*)\right]$ при многократных сличениях.

Здесь $\Delta_{\text{сист.п}} \lambda_j^*$ — значения, полученные на основе априорной информации.

$$\Delta_{\text{п}} = \text{rad} \left[\int_{-\Delta_{\text{п}}}^{\Delta_{\text{п}}} w\left[\delta\lambda^* / (\Delta_{\text{сист.п}} \lambda_1^* + \Delta_{\text{сист.п}} \lambda_2^*)\right] d(\delta\lambda^*) = 1 - P_{\text{I доп}} \right]; \quad (3)$$

$$\Delta_{\text{п}} = \text{rad} \left[\int_{-\Delta_{\text{п}}}^{\Delta_{\text{п}}} w\left[\delta_{\Sigma} \lambda^* / (\Delta_{\text{сист.п}} \lambda_1^* + \Delta_{\text{сист.п}} \lambda_2^*)\right] d(\delta_{\Sigma} \lambda^*) = 1 - P_{\text{I доп}} \right]; \quad (4)$$

где $\text{rad}(\cdot)$ — решение уравнения $(\cdot)$; $P_{\text{I доп}}$ — допустимая вероятность ошибки 1-го рода.

Данный подход детально исследован в работах [5–7], в которых показано, что использование дополнительной ин-

формации о свойствах систематических погрешностей сличаемых эталонов позволяет повысить обоснованность принимаемых решений. Однако и в этом случае решение о соответствии или несоответствии предъявляемым требованиям принимается относительно пары сличаемых эталонов.

Помимо сличений пары эталонов метрологические службы используют и так называемые групповые сличения, когда проверка соответствия эталонов предъявляемым требованиям охватывает совокупность N эталонов. Например, в ключевых сличениях эталонов массы [7] участвовали 18 национальных эталонов, каждый из которых сличался с пятью эталонами массы с различными номиналами (200 мг, 1 г, 50 г, 200 г, 2 кг). Сличения пар эталонов проводили с использованием транспортируемых эталонов с необходимым набором номиналов.

Таким образом, при сличении N эталонов формируется

совокупность результатов $\{\delta\lambda_{is}^* = \lambda_i^* - \lambda_s^*, i \neq s\}_{i,s=1}^N$. Форми-

рование $\delta\lambda_{is}^*$ проводится с использованием промежуточных результатов, полученных с помощью транспортируемых эталонов:

$$\delta\lambda_{iT}^* = \lambda_i^* - \lambda_T^* = \Delta_{\text{сист}} \lambda_i^* + \Delta_{\text{сл}} \lambda_i^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_T^* + \Delta_{\text{сл}} \lambda_T^*; \quad (5)$$

$$\delta\lambda_{sT}^* = \lambda_s^* - \lambda_T^* = \Delta_{\text{сист}} \lambda_s^* + \Delta_{\text{сл}} \lambda_s^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_T^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_T^*. \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) получены в предположении, что разности номинальных значений исключены.

В общем случае при групповых сличениях с одинаковыми номинальными значениями используется несколько L соответствующих по номиналу транспортируемых эталонов. Это позволяет сформировать средние оценки

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ср}} \lambda_{iT}^* &= \sum_{l=1}^L \delta\lambda_{il}^* / L = \Delta_{\text{сист}} \lambda_i^* + \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}} \lambda_{il}^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_l^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{Tl}^*); \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ср}} \lambda_{sT}^* &= \sum_{l=1}^L \delta\lambda_{sl}^* / L = \Delta_{\text{сист}} \lambda_s^* + \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}} \lambda_{sl}^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_l^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{Tl}^*). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\delta\lambda_{il}^*$, $\delta\lambda_{sl}^*$ — промежуточные результаты, полученные для i -го и s -го эталонов с помощью первого транспортируемого эталона; $\Delta_{\text{сл}} \lambda_{il}^*$, $\Delta_{\text{сл}} \delta\lambda_{sl}^*$ — соответственно случайные погрешности для i -го и s -го эталонов при их сравнении с первым транспортируемым эталоном; $\Delta_{\text{сл}} \lambda_{Tl}^*$, $\Delta_{\text{сл}} \delta\lambda_{Tl}^*$ — случайные погрешности первого транспортируемого эталона при его сравнении с i -м и s -м эталонами.

На основе (7), (8) результат сличения для i -го и s -го эталонов представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ср}} \lambda_{is}^* &= \delta_{\text{ср}} \lambda_{iT}^* - \delta_{\text{ср}} \lambda_{sT}^* = \Delta_{\text{сист}} \lambda_i^* - \Delta_{\text{сист}} \lambda_s^* + \\ &+ \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}} \lambda_{il}^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{Tl}^* - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{sl}^* + \Delta_{\text{сл}} \lambda_{Tl}^*). \end{aligned}$$

Систематические погрешности транспортируемых высокостабильных эталонов не влияют на $\delta_{\text{ср}}\lambda_{is}^*$. Таким образом, конечным результатом сличения N эталонов является

совокупность $\{\delta_{\Sigma}\lambda_{is}^*, i \neq s\}_{i,s=1}^N$, располагая которой следует принять решение о соответствии или несоответствии предъявленным требованиям каждого из эталонов. Существуют практические решения этой проблемы, опирающиеся, как правило, на опыт и интуицию исполнителей сличений.

Представляется перспективным распространение предложенного в [4] подхода к совокупности $\{\delta_{\Sigma}\lambda_{is}^*, i \neq s\}_{i,s=1}^N$,

трансформировав ее в массив $\{\delta_{\text{ср}}\lambda_i\}_{i=1}^N$, где

$$\delta_{\text{ср}}\lambda_i = \frac{1}{(N-1)} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\delta_{\Sigma}\lambda_{is}^*$$

(индекс у знака суммы указывает, что из нее исключается член $\delta_{\Sigma}\lambda_{ii}$).

Из приведенных выше соотношений следует, что

$$\delta_{\text{ср}}\lambda_i = \frac{1}{L(N-1)} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\sum_{l=1}^L \delta\lambda_{is}^* = \Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}}\lambda_s + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}}\lambda_{il} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T) - \frac{1}{L(N-1)} \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^N {}^{(i)}(\Delta_{\text{сл}}\lambda_{sl} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T), \quad (9)$$

где

$$\Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}}\lambda_s$$

соответствует систематической погрешности $\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i$;

$$\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}}\lambda_{il} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T) - \frac{1}{L(N-1)} \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^N {}^{(i)}(\Delta_{\text{сл}}\lambda_{sl} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T)$$

соответствует случайной (дополнительной) погрешности $\Delta_{\text{доп}}\lambda_i$, т. е. $\delta_{\text{ср}}\lambda_i = \Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \Delta_{\text{доп}}\lambda_i$.

Предположив известными дисперсии случайных погрешностей сличаемых $\{D[\Delta_{\text{сл}}\lambda_i^*]\}_{i=1}^N$ и транспортируемых

$\{D[\Delta_{\text{сл}}\lambda_i^*]\}_{i=1}^L$ эталонов, а распределение $w(\delta_{\text{ср}}\lambda)$ гауссовым, найдем

$$w(\delta_{\text{ср}}\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[\delta_{\text{доп}}\lambda_i]}} \times \exp \left\{ - \left(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \left(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \frac{1}{(N-1)} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}}\lambda_s \right) \right)^2 / [2D(\delta_{\text{доп}}\lambda_i)] \right\},$$

где $D[\delta_{\text{ср}}\lambda_i] = \frac{N}{L(N-1)} (D[\Delta_{\text{сл}}\lambda_i^*] + D[\Delta_{\text{сл}}\lambda_i^*])$.

Измерительная техника № 7, 2014

Полученные результаты позволяют применить данный подход к сличению двух эталонов и установить интервал $[-\Delta_n; \Delta_n]$ с помощью уравнения типа (3), (4). Соответствующее уравнение при этом примет вид

$$\Delta_n = \text{rad} \left[\int_{-\Delta_n}^{\Delta_n} w \left[\delta_{\text{ср}}\lambda_i / \left(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \frac{1}{(N-1)} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}}\lambda_s \right) \right] \times d(\delta_{\text{ср}}\lambda_i) = 1 - P_{\text{I доп}} \right].$$

Формула (9) позволяет определить условную вероятность $P[\Delta_{\text{сист}} \geq c/\delta_{\text{ср}}\lambda_i]$, что представляет большой практический интерес, так как соотносит решения о соответствии или несоответствии требованиям именно i -го эталона, а не двух (при сличении двух эталонов) или нескольких эталонов. Используя приведенные выше определения, запишем

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ср}}\lambda_i &= \Delta_{\text{сист}}\lambda_i + \Delta_{\text{доп}}\lambda_i; \\ \Delta_{\text{доп}}\lambda_i &= \frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}}\lambda_s + \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}}\lambda_{il} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T) - \\ &\quad - \frac{1}{L(N-1)} \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^N {}^{(i)}(\Delta_{\text{сл}}\lambda_{sl} - \Delta_{\text{сл}}\lambda_T). \end{aligned}$$

Для случаев, когда состав АЗ позволяет установить распределение вероятностей $w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i)$, $w_{\Delta}(\Delta_{\text{доп}}\lambda_i)$, получим для двумерной плотности распределения вероятности независимых случайных величин:

$$w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i, \Delta_{\text{доп}}\lambda_i) = w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w_{\Delta}(\Delta_{\text{доп}}\lambda_i);$$

для условной вероятности $\Delta_{\text{сист}}\lambda_i$ при фиксированном $\delta_{\text{ср}}\lambda_i$:

$$p(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i / \delta_{\text{ср}}\lambda_i) = w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w_{\Delta}(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i).$$

Тогда условное распределение плотности вероятности

$$w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i / \delta_{\text{ср}}\lambda_i) = w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w_{\Delta}(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i) / \int_{\min \Delta_{\text{сист}}\lambda_i}^{\max \Delta_{\text{сист}}\lambda_i} w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i) d(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i).$$

При этом вероятность попадания $\Delta_{\text{сист}}\lambda_i$ в интервал $[-c, c]$ равна

$$\begin{aligned} P(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i \in [-c, c] / \delta_{\text{ср}}\lambda_i) &= \\ &= \int_{-c}^c w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w_{\Delta}(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i) d\Delta_{\text{сист}}\lambda_i / \\ &\quad / \int_{\min \Delta_{\text{сист}}\lambda_i}^{\max \Delta_{\text{сист}}\lambda_i} w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i) w(\delta_{\text{ср}}\lambda_i - \Delta_{\text{сист}}\lambda_i) d(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i). \end{aligned}$$

Это позволяет установить условную вероятность превышения систематической погрешностью $\Delta_{\text{сист}}\lambda_i$ некоторого значения c :

$$P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\Delta_{\text{сист}} \lambda_i + \Delta_{\text{доп}} \lambda_i = \delta_{\text{ср}} \lambda_i] = 1 - P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \in [-c, c]/\delta_{\text{ср}} \lambda_i]. \quad (10)$$

Пример. Проведем сличения 5 эталонов с одним транспортируемым, при этом

$$\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \in [-\Delta_1/2; \Delta_1/2]; w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i) = 1/\Delta_1; w(\Delta_{\text{доп}} \lambda_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{(\delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_i)^2}{2\sigma^2}\right); \Delta_{\text{доп}} \lambda_i \in [-\infty; \infty] \text{ соответственно}$$

при $c \leq \Delta_1/2$

$$P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\delta_{\text{ср}} \lambda_i] = 1 - \left[\int_{-c}^c w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i) w_{\Delta}(\delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_i) d\Delta_{\text{сист}} \lambda_i / \int_{\min \Delta_{\text{сист}} \lambda_i}^{\max \Delta_{\text{сист}} \lambda_i} w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i) w(\delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_i) d(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i) \right].$$

Пусть $c = 1$, $\Delta_1 = 6$, $\sigma_{\text{сл}} = 1$, а дисперсия случайной составляющей транспортируемого эталона в 1,5 раза больше дисперсии случайной погрешности каждого эталона, $D_{\text{сл}} = 1,5D_{\text{т}}$, тогда

$$D(\Delta_{\text{доп}} \lambda_i) = D\left(\frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N {}^{(i)}\Delta_{\text{сист}} \lambda_s\right) + D\left(\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (\Delta_{\text{сл}} \lambda_{il} - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{tl})\right) + D\left[\frac{1}{L(N-1)} \sum_{l=1}^L \sum_{s=1}^N {}^{(i)}(\Delta_{\text{сл}} \lambda_{sl} - \Delta_{\text{сл}} \lambda_{tl})\right];$$

$$D(\Delta_{\text{доп}} \lambda_i) = 9.$$

Вероятность несоответствия для различных $\delta_{\text{ср}}$:

$$P(\delta_{\text{ср}} = 0) = 0,618, P(\delta_{\text{ср}} = 1) = 0,623, P(\delta_{\text{ср}} = 2) = 0,638,$$

$$P(\delta_{\text{ср}} = 3) = 0,662.$$

Результаты представлены на рис. 1 ($\delta_{\text{ср}}$ лежит в интервале $[-15, 15]$).

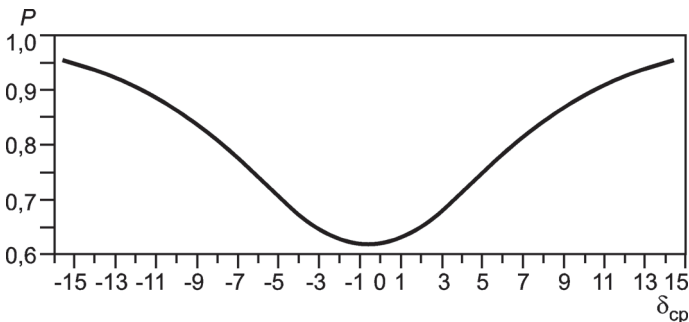


Рис. 1. Вероятность $P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\delta_{\text{ср}} \lambda_i]$ в зависимости от значения $\delta_{\text{ср}}$

Возможность определения вероятности превышения систематической погрешностью конкретного эталона, имеющего значение $\delta_{\text{ср}} \lambda_i$, установленного допустимого значения ($\Delta_{\text{сист}} \lambda_i = c$) представляет несомненный практический интерес, так как повышает уровень формализации решений, оставляя на эвристическом уровне только установление $w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i)$, $\Delta_{\text{сист}} \lambda_i = c$. Эффективность сличений с использованием в качестве результата $\delta_{\text{ср}} \lambda_i$ зависит от достоверности априорных знаний о виде $w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i)$, $w_{\Delta}(\Delta_{\text{доп}} \lambda_i)$, т. е. о характеристиках погрешностей участвующих в сличениях эталонов, включая транспортируемые.

В тех случаях, когда на основе (10) получить аналитическое соотношение затруднительно, может быть использован машинный эксперимент со следующей последовательностью отображений:

$$A3 = \{\delta_{\text{ср}} \lambda_i = \Delta_{\text{сист}} \lambda_i + \Delta_{\text{доп}} \lambda_i, w(\Delta_{\text{сист}} \lambda_i), w(\Delta_{\text{доп}} \lambda_i),$$

$$P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\delta_{\text{ср}} \lambda_i]\}$$

$$\rightarrow \{\Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}, \Delta_{\text{доп}} \lambda_{is}\}_{s=1}^M \rightarrow \{\Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}, \Delta_{\text{доп}} \lambda_{is} = \delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}\}_{M_1}$$

$$\rightarrow \{\Delta_{\text{сист}} \lambda_{is} > c, \Delta_{\text{доп}} \lambda_{is} = \delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}\}_{M_2}$$

$$\rightarrow P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\delta_{\text{ср}} \lambda_i] = M_2/M_1,$$

где M_1 — число отсчетов из исходной совокупности M , для которых выполнено условие $\Delta_{\text{доп}} \lambda_{is} = \delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}$; M_2 — число отсчетов из исходной совокупности $\Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}$, $\Delta_{\text{доп}} \lambda_{is} = \delta_{\text{ср}} \lambda_i - \Delta_{\text{сист}} \lambda_{is}$, для которых выполнено условие $\Delta_{\text{сист}} \lambda_{is} \geq c$.

Имитационное моделирование, реализованное в ПО Labview для примера с $M = 1000$, показало вероятность несоответствия систематической погрешности допустимому значению в зависимости от $\delta_{\text{ср}} \lambda_i$ (рис. 2).

Данные, полученные путем аналитического расчета в результате машинного эксперимента достаточно близки, что говорит о правильности предложенного подхода по определению условной вероятности $P[\Delta_{\text{сист}} \lambda_i \geq c/\delta_{\text{ср}} \lambda_i]$ превышения систематической погрешностью допустимого уровня.

Предложенный подход применим в том случае, когда решение о соответствии сличаемых эталонов заявленным характеристикам опирается на сформированную априори ги-

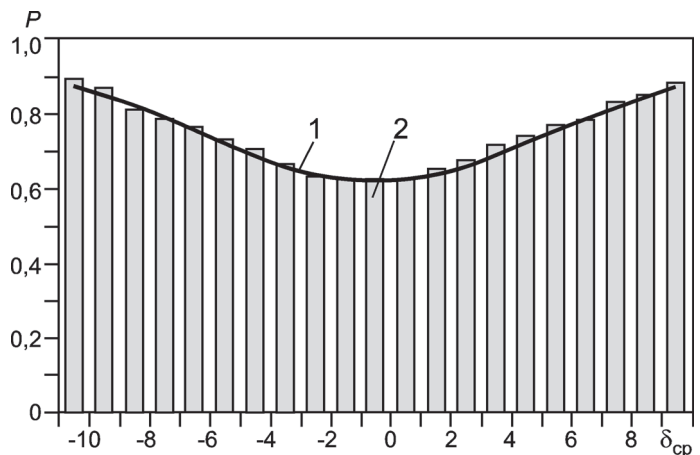


Рис. 2. Результаты имитационного моделирования (2) и аналитического расчета (1)

потезу о виде распределений неисключенных систематических погрешностей $\{w(\Delta_{\text{сист}}\lambda_i)\}_{i=1}^N$.

Л и т е р а т у р а

1. BIPM. [Официальный сайт]. <http://www.bipm.org/> (дата обращения 18.02.2014 г.).
2. Report on CIPM key comparison of the second phase multiples and submultiples of the kilogram (CCM.M-K5). [Электронная версия] http://kcdb.bipm.org/appendixb/appbresults/ccm.m-k5/ccm.m-k5_final_report.pdf (дата обращения 18.02.2014 г.).
3. Чуновкина А. Г. Оценивание данных ключевых сличений национальных эталонов. СПб.: НПО «Профессионал», 2009.

4. Цветков Э. И. Анализ результатов сличения двух эталонов // Измерительная техника. 2013. № 4. С. 11—14; Tsvetkov E. I. Analysis of the results of a comparison of two standards // Measurement Techniques. 2013. V. 56. N. 4. P. 368—371.

5. Сулоева Е. С. Возможности имитационного моделирования при сличении двух эталонов // Вестник СЗО МА. 2012. Вып. 27. С. 55—64.

6. Сулоева Е. С. Исследование вероятностей ошибок первого и второго рода от состава априорных знаний и устанавливаемых условий // Вестник СЗО МА. 2012. Вып. 28. С. 48—51.

7. Сулоева Е. С. Особенности принятия решения о годности сличаемых эталонов при стандартном составе априорных знаний // Изв. ВолгГТУ. Серия электроника, измерительная техника, радиотехника и связь. 2013. № 23. С. 78—81.

Дата принятия 18.04.2014 г.

519.24

Анализ свойств выбора оптимального количества интервалов дискретизации области определения плотности вероятности

А. В. ЛАПКО*, В. А. ЛАПКО**

* Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Россия

** Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия, e-mail: lapko@icm.krasn.ru

Исследован выбор оптимального количества интервалов дискретизации области определения плотности вероятности в зависимости от коэффициента контрэксцесса. Установлены количественные зависимости между коэффициентами дискретизации и контрэксцесса для симметричных и несимметричных законов распределения. Проведен анализ их особенностей для различных условий использования.

Ключевые слова: плотность вероятности, непараметрическая оценка, дискретизация, коэффициенты эксцесса, контрэксцесса, асимметрии.

The properties of optimal selection of quantity of discretization intervals of domain of probability density have been studied. The quantitative dependences between the coefficients of discretization procedures and antikurtosis coefficients for symmetric and asymmetric distribution laws have been determined. The analysis of their features for different usage conditions has been carried out.

Key words: probability density, nonparametric estimation, discretization procedure, kurtosis coefficient, antikurtosis coefficient, asymmetry coefficient.

Выбор оптимального количества интервалов дискретизации области значений случайной величины x зависит от вида плотности вероятности $p(x)$ [1], поэтому в условиях априорной неопределенности о виде $p(x)$ возникает задача уточнения процедуры дискретизации на основании параметров закона распределения случайной величины.

Пусть имеется выборка $V = (x^i, i = \overline{1, n})$ из n независимых значений одномерной случайной величины x с неизвестной плотностью вероятности $p(x)$. Разобьем область определения $p(x)$ на N непересекающихся интервалов длиной 2β , и сформируем множества случайных величин $X^j, j = \overline{1, N}$. В качестве характеристик X^j примем частоту $\bar{p}^j$ попадания случайной величины x в j -й интервал и его центр z^j . На осно-

ве полученной информации определим массив данных $V_1 = (z^j, \bar{p}^j = \bar{P}^j / (2\beta), j = \overline{1, N})$, составленный из центров z^j интервалов и соответствующих им значений оценок $\bar{p}^j$ плотности вероятности.

В качестве приближения по эмпирическим данным V_1 плотности вероятности $p(x)$ примем ее непараметрическую оценку [2, 3]:

$$\bar{p}(x) = c^{-1} \sum_{j=1}^N \bar{P}^j \Phi\left[(x - z^j)/c\right], \quad (1)$$

где положительные и нормированные ядерные функции $\Phi[(x - z^j)/c]$ удовлетворяют условию симметричности относительно значений z^j [4, 5].