

4. **Донис В. К.** Повышение точности и эффективности конвейерных весов // Измерительная техника. 1996. № 9. С. 25—29; **V. K. Donis.** Increasing the accuracy and efficiency of a conveyor balance // Measurement Techniques. 1996. V. 39. N. 9. P. 928—933.

5. **Донис В. К., Рачковский А. Е., Гудовская Н. Ю.** Состояние и перспективы разработки способов поверки конвейерных весов // Измерительная техника. 2003. № 9. С. 28—32; **V. K. Donis, A. E. Rachkovskii, N. Yu. Gudovskaya.** Methods of Verifying Continuous Automatic Belt Weighers: State and Prospects // Measurement Techniques. 2003. V. 46. N. 9. P. 851—856.

6. **ГОСТ 30124—94.** Весы и весовые дозаторы непрерывного действия. Общие технические требования.

7. **Высочин Е. М.** Влияние упругих свойств ленты на работу конвейерных весов // Сб.: Вопросы рудничного транспорта. 1958. Вып. 2. С. 142—152.

8. **Бочаров А. В. и др.** Испытания и опыт применения косвенного способа поверки и калибровки конвейерных весов // Главный метролог. 2007. № 6. С. 40—42.

Дата принятия 06.06.2014 г.

ИЗМЕРЕНИЯ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

006.92

Релятивистские эффекты в мобильных часах

В. Ф. ФАТЕЕВ, В. П. СЫСОЕВ

Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, Менделеево, Россия, e-mail: fateev@vniiftri.ru

На основе общей теории относительности получены практические формулы для вычисления релятивистских эффектов в часах, движущихся в аномальном гравитационном поле Земли. Рассмотрены методы компенсации эффектов и определена погрешность компенсации на основе навигационных определений на маршруте движения часов в системах ГЛОНАСС/GPS.

Ключевые слова: мобильные часы, релятивистские эффекты, гравитационный потенциал, методы компенсации.

On the basis of the general theory of relativity the practical formulas for calculation of relativistic effects in clocks moving in Earth's anomalous gravitational field have been derived. Clock's errors caused by these effects are evaluated and methods of compensation of the errors in application to GLONASS/GPS systems are considered.

Key words: mobile clocks, relativistic effects, gravitational potential, compensation methods.

Проблема учета релятивистских эффектов в мобильных часах исследована как в отечественных, так и в зарубежных работах [1—7]. Однако полученные результаты применимы лишь для коротких маршрутов и при ограниченной стабильности стандартов частоты мобильных часов. С ростом стабильности стандартов повышаются требования к учету релятивистских эффектов, особенно при глобальных перемещениях в условиях влияния аномалий гравитационного поля Земли вдоль маршрута движения. В связи с этим необходимо рассматривать релятивистские эффекты с позиций общей теории относительности (ОТО) как при измерении времени, так и частоты, а также оценивать предельную точность их учета и компенсации на основе использования текущих навигационных определений мобильных часов в системах ГЛОНАСС/GPS.

Частота и время в мобильных часах в рамках ОТО. Закон изменения собственного (непосредственно измеряемого) времени для хранителя частоты и времени, движущегося относительно поверхности Земли, выведем применительно к вращающейся вместе с Землей геоцентрической земной системе координат (ITRF — International Terrestrial

Reference Frame) с единичными векторами **i**, **j**, **k** по осям XYZ, соответственно. Для этого воспользуемся общим выражением для квадрата пространственно-временного интервала ds [8]:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + 2g_{0\alpha}dx^\alpha cdt + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \quad (1)$$

где c — скорость света; dt — бесконечно малый интервал координатного времени t , не зависящего от параметров гравитационного поля; g_{00} , $g_{0\alpha}$, $g_{\alpha\beta}$ — компоненты четырехмерного метрического тензора g_{ik} гравитационного поля в выбранной системе отсчета; dx^α , dx^β — пространственные бесконечно малые интервалы; здесь и далее $\alpha, \beta = 1; 2; 3$, $i, k = 0; 1; 2; 3$.

Интервал ds инвариантен к выбору системы отсчета и, следовательно, не меняет значения в любой мгновенно введенной инерциальной невращающейся системе отсчета [8]. Поэтому в инерциальной системе

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 + g_{11}dx^2 + g_{22}dy^2 + g_{33}dz^2,$$

где $g_{\alpha\alpha} = 1$, $g_{00} = -1$. Для двух событий в одной и той же пространственной точке ($dx = dy = dz = 0$) $ds^2 = g_{00}c^2dt^2 = -c^2d\tau^2$,

где $d\tau$ — собственное время системы. В результате соотношение (1) приведем к виду [8]:

$$-c^2 d\tau^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta - \left[\sqrt{-g_{00}} c dt - \left(g_{0\alpha} / \sqrt{-g_{00}} \right) dx^\alpha \right]^2, \quad (2)$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{0\alpha} g_{0\beta} / g_{00}$ — трехмерный метрический тензор. Координатная скорость движения рассматриваемого хранителя относительно начала выбранной системы отсчета

$$V_k^\alpha = dx^\alpha / dt; \quad V_k^2 = V_\alpha V^\alpha = \gamma_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta. \quad (3)$$

На основании (3) из соотношения (2) получим коэффициент преобразования шкалы собственного времени τ относительно шкалы координатного времени t для хранителя, движущегося в гравитационном поле с координатной скоростью V_k :

$$d\tau/dt = \left\{ \left[\sqrt{-g_{00}} - g_{0\alpha} V_k^\alpha / (c \sqrt{-g_{00}}) \right]^2 - V_k^2 / c^2 \right\}^{0.5} = \theta. \quad (4)$$

Введем в рассмотрение мобильный хранитель частоты и времени со шкалой собственного времени τ_m , а также стационарный (базовый) хранитель шкалы собственного времени τ_0 . Связь между интервалами τ_m и τ_0 установим при условии, что для обоих хранителей промежутки координатного времени одинаковы: $dt_m = dt_0 = dt$. Кроме того, для перехода от координатной скорости подвижного хранителя V_k^α (3) к его скорости V^α , измеренной в единицах времени τ_0 базового хранителя, используем соотношение $V_k^\alpha = V^\alpha \theta_0$. В результате получим

$$d\tau_m = (\theta_m / \theta_0) d\tau_0, \quad (5)$$

где $\theta_0 = \sqrt{-g_{00}}$ — коэффициент преобразования шкалы времени τ_0 , определяемый из (4) при $V_k^\alpha = 0$; θ_m — коэффициент преобразования шкалы времени τ_m относительно координатного времени t для подвижного хранителя, определяемый по формуле (4):

$$\theta_m = \left\{ \left[\sqrt{-g_{00}^m} - \mathbf{G} \mathbf{V} \theta_0 / (c \sqrt{-g_{00}^m}) \right]^2 - (\mathbf{V} \theta_0 / c)^2 \right\}^{0.5},$$

где $\mathbf{G}$ — векторный потенциал гравитационного поля с компонентами $G_\alpha = g_{0\alpha}$, определяемый вдоль маршрута подвижного хранителя; $\mathbf{V} = iV_x + jV_y + kV_z$ — скорость подвижного хранителя с составляющими по осям V_x, V_y, V_z , которые в общем случае изменяются вдоль маршрута движения;

g_{00}^m — временной компонент четырехмерного метрического тензора, также изменяющийся вдоль маршрута подвижного хранителя.

Промежуток времени $\Delta\tau_m$, отсчитываемый по мобильным часам, определяется интегрированием соотношения (5) на интервале времени $\Delta\tau_0$, а релятивистский эффект различия

промежутков времени, отсчитываемых по базовым и мобильным часам, определяется выражением

$$\delta\tau_p = \Delta\tau_m - \Delta\tau_0 = \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} (\theta_m(\tau_0) / \theta_0) d\tau_0 - \Delta\tau_0, \quad (6)$$

где τ_{01}, τ_{02} — моменты начала и окончания интервала интегрирования по шкале τ_0 ; $\Delta\tau_0 = \tau_{02} - \tau_{01}$.

Поскольку фаза электромагнитного сигнала является инвариантом к выбору системы отсчета (точки наблюдения) [8], то фазовый набег выходного сигнала генератора базового хранителя времени можно записать в виде $d\Psi = \omega_k dt = \omega_0 d\tau_0$, где ω_k, ω_0 — координатная и собственная частоты, соответственно. С другой стороны, тот же фазовый набег можно выразить через собственную частоту генератора мобильного хранителя ω_m в виде $d\Psi = \omega_k dt = \omega_m d\tau_m$. При равенстве координатных частот и интервалов координатного времени фазовые набег в обоих случаях одинаковы. В результате получим $\omega_0 d\tau_0 = \omega_m d\tau_m$. Отсюда, используя соотношение (5), найдем связь между собственными циклическими частотами мобильного f_m и базового f_0 хранителей:

$$f_m = f_0 \theta_0 / \theta_m.$$

Далее найдем относительное значение взаимного релятивистского эффекта сдвига частот задающих генераторов мобильного и базового хранителей времени:

$$\delta f_p / f_0 = (f_m - f_0) / f_0 = \theta_0 / \theta_m - 1. \quad (7)$$

Полученное обобщенное выражение (7) определяет эффект релятивистского смещения частоты вследствие различия хода времени в двух точках рассматриваемой системы отсчета, вращающейся вместе с Землей. Этот эффект в гравитационном поле Земли, предсказанный Эйнштейном, иногда называется эффектом красного смещения.

Вычисление частотных и временных эффектов в мобильных часах. Чтобы связать формулы (4)–(7) с параметрами вращения Земли и ее гравитационным полем, зададим в качестве основы для дальнейших вычислений метрический тензор невращающейся земной системы отсчета ITRF, который имеет следующие компоненты [9]:

$$g_{00} = -(1 - 2\phi/c^2); \quad g_{\alpha\beta} = (1 + 2\phi/c^2); \quad g_{0\alpha} = 0, \quad (8)$$

где ϕ — потенциал гравитационного поля, создаваемого распределением плотности масс Земли.

При решении практических задач компонентом, определяемым угловым моментом Земли, пренебрегаем в силу его малого значения [10]. Перейдя далее к прямоугольной системе координат, вращающейся вокруг оси OZ , и вычислив в новой системе пространственно-временной интервал (1), получим следующие компоненты метрического тензора:

$$g_{00} = -(1 - 2\Phi/c^2); \quad g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} (1 + 2\phi/c^2); \quad g_{0\alpha} = G_\alpha; \quad \mathbf{G} = [\mathbf{\Omega R}] / c,$$

где квадратные скобки означают векторное произведение.

Здесь $\mathbf{\Omega} = k\mathbf{\Omega}_z$ — вектор угловой скорости Земли, направленный вдоль оси OZ ; $\mathbf{\Omega}_x = \mathbf{\Omega}_y = 0$; $c\mathbf{G} = -i\mathbf{\Omega}_y + j\mathbf{\Omega}_x$; $\mathbf{R} = ix + jy + kz$ — радиус-вектор рассматриваемой точки с текущими координатами x, y, z ; $\delta_{\alpha\beta}$ — единичный тензор второго ранга; $\Phi = \phi + \phi_\Omega$ — полный гравитационный потенциал в рассматриваемой точке в окрестности Земли, равный сум-

ме потенциала истинного гравитационного поля Земли φ и потенциала поля сил, вызванных вращением Земли, $\varphi_\Omega = 0,5\mathbf{G}^2 = 0,5[\mathbf{\Omega R}]^2$, где $\mathbf{\Omega} = 7,29 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость Земли.

Потенциал гравитационного поля Земли наиболее полно можно описать разложением по сферическим функциям [11]. При этом его удобно разделить на нормальную φ_n и аномальную $\Delta\varphi_{ан}$ составляющие. Полный гравитационный потенциал Φ в этом случае представим в виде

$$\Phi = \varphi_n + \varphi_\Omega + \Delta\varphi_{ан},$$

где $\varphi_n = (\mu/\rho)[1 - J_2(R_3/\rho)^2 P_2(\sin \psi)]$ — нормальная составляющая потенциала, определяемая нулевой гармоникой и второй зональной гармоникой разложения с коэффициентом $J_2 = 1,0826 \cdot 10^{-3}$; $P_2(\sin \psi) = (3/2)\sin^2 \psi - 1/2$ — полином Лежандра; ψ — геоцентрическая широта; $\mu = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ м}^3/\text{с}^2$ — геоцентрическая гравитационная постоянная; $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — геоцентрическое расстояние рассматриваемой точки; $R_3 = 6,378 \cdot 10^6 \text{ м}$ — экваториальный радиус Земли (большая полуось референц-эллипсоида);

$$\varphi_\Omega = 0,5\Omega^2(x^2 + y^2) = 0,5\Omega^2\rho^2\cos^2 \psi; \quad (9)$$

$$\varphi_{ан} = (\mu/\rho) \left[- \sum_{n=3}^{\infty} J_n (R_3/\rho)^n P_n \sin \Psi + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n (R_3/\rho)^n (C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)) P_{nm} \sin \Psi \right]$$

— аномальная составляющая поля, включающая зональные гармоники, начиная с третьей, а также секториальные и тессеральные гармоники разложения потенциала по сферическим функциям с коэффициентами C_{nm}, S_{nm} ; $P_{nm} \sin \psi$ — присоединенные полиномы Лежандра; λ — долгота рассматриваемой точки.

На основе (8)—(9) коэффициенты преобразования шкал выразим как

$$\theta_0 = 1 - \Phi_0/c^2; \theta_m = 1 - (\Phi_m/c^2) - c^{-2}[\mathbf{\Omega R}_m] \mathbf{V} - V^2/2c^2, \quad (10)$$

где $\mathbf{R}_m$ — радиус-вектор положения мобильного хранителя времени.

Значение исключенных членов, имеющих порядок $1/c^3$ и выше, для часов, движущихся по поверхности Земли, не превышает 10^{-18} .

Для прямоугольной земной системы координат ITRF формула (7) для относительного релятивистского смещения частоты приобретает окончательный вид:

$$\frac{\Delta f_p}{f_0} = - \frac{\varphi_0^n - \varphi_m^n}{c^2} - \frac{\Delta\varphi_0^{ан} - \Delta\varphi_m^{ан}}{c^2} - \frac{\Omega^2}{2c^2} [(x_0^2 + y_0^2) - (x_m^2 + y_m^2)] + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{\Omega}{c^2} (x_m V_y - y_m V_x), \quad (11)$$

где величины $\varphi_m^n, \Delta\varphi_m^{ан}, x_m, y_m$ и вектор скорости подвижных часов $\mathbf{V} = \{V_x V_y V_z\}$ являются функциями времени τ_0 . По этой

причине релятивистский сдвиг частоты мобильных часов также зависит от времени.

В (11) первые три слагаемых определяют частотные гравитационные сдвиги, вызванные разностью гравитационных потенциалов нормального, аномального и центробежного поля Земли между базовыми и мобильными часами, четвертое слагаемое описывает эффект Допплера 2-го порядка. Физический смысл последнего слагаемого проще установить на основе формулы для θ_m (см. (10)):

$$\frac{\delta f_\Omega}{f_0} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{\Omega R}_m] \mathbf{V} = \frac{\Omega}{c^2} [\mathbf{R V}] = \frac{\Omega}{c^2} \left[\mathbf{R} \frac{d\mathbf{R}}{d\tau_0} \right] = \frac{2\Omega}{c^2} \frac{d\mathbf{S}_m}{d\tau_0}, \quad (12)$$

где $d\mathbf{S}_m$ — элемент площади, заключенной между начальным и конечным положениями вектора положения $\mathbf{R}_m$ и вектором маршрута $d\mathbf{R}$ мобильного стандарта. Эффект смещения частоты, определяемый формулой (12), является производной по времени от текущего фазового набега, вызванного эффектом Саньяка [13]. Сдвиг частоты положителен ($f_m \geq f_0$), когда скалярное произведение $[\mathbf{\Omega R}_m] \mathbf{V}$ положительно. При этом азимут движения находится в пределах $0—180^\circ$ (мобильный стандарт частоты движется в восточном направлении).

Релятивистский эффект смещения времени определяется из соотношения (6) с учетом (10):

$$\Delta\tau_p = \Delta\tau_p^0 -$$

$$- \frac{1}{c^2} \int_{\tau_{01}}^{\tau_{02}} \left[(\varphi_m^n + \varphi_m^{ан}) + \frac{\Omega^2}{2} (x_m^2 + y_m^2) + \frac{1}{2} V^2 \right] d\tau_0 - \frac{2\Omega S_V}{c^2}, \quad (13)$$

где $\Delta\tau_p^0 = (\Delta\tau_0/c^2) [(\varphi_0^n + \varphi_0^{ан}) + 0,5\Omega^2 \cos^2 \Psi_0 (x_0^2 + y_0^2)]$ —

постоянная составляющая смещения, определяемая положением базовых часов; $S_V = \frac{1}{2} \int_{xy} (xdy - ydx)$ — площадь про-

екции треугольника с вершинами в точках $0, \mathbf{R}_m, \mathbf{R}_0$ на плоскость экватора. Подынтегральное выражение в (13) является функцией времени, поскольку $\rho_m = \rho_m(\tau_0), \mathbf{V} = \mathbf{V}_m(\tau_0)$. Последний член формулы (13) определяет эффект Саньяка, который также изменяется во времени.

Вычисление текущего значения релятивистского сдвига частоты в виде (11), (12) выполнено на основе текущих данных о координатах и скорости, получаемых от навигационной аппаратуры потребителей (НАП) ГЛОНАСС/GPS. По этим же данным вычисляется текущее смещение бортовой шкалы времени мобильных часов путем численного интегрирования выражения (13). При этом шаг интегрирования выбирается равным или превышающим интервал съема информации с навигационного приемника.

Методы компенсации гравитационно-релятивистских эффектов. Представив (6) в виде $\Delta\tau_m = \Delta\tau_0 + \Delta\tau_p$ и прибавив к обеим частям выражения корректирующую поправку $-\Delta\tau_p^*$, получим

$$\Delta\tau_m^* = \Delta\tau_0 + \delta\tau_p, \quad (14)$$

где $\Delta\tau_m^* = \Delta\tau_m - \Delta\tau_p^*$ — скорректированное значение времени мобильных часов; $\delta\tau_p = \Delta\tau_p - \Delta\tau_p^*$ — погрешность компенса-

ции времени релятивистских эффектов; если она пренебрежимо мала, то из (14) имеем $\Delta t_m^* = \Delta t_0$, т. е. скорректированная шкала времени мобильных часов полностью совпадает со шкалой базовых часов.

Корректирующую поправку $-\Delta t_p^*$ в текущую шкалу времени мобильных часов можно вносить как непрерывно на маршруте, так и однократно в конце маршрута. В первом случае процесс вычисления поправок по данным НАП и их цифровой ввод в шкалу ведутся непрерывно, поэтому на маршруте движения постоянно поддерживается синхронность шкал мобильного и базового хранителей времени. Во втором случае задача компенсации решается в конце маршрута по накопленным за время движения навигационным данным.

Представим (8) в виде $f_m = f_0 + \Delta f_p$, учтем поправку $-\Delta f_p^*$ и найдем

$$f_m^* = f_0 + \delta f_p, \quad (15)$$

где $f_m^* = f_m - \Delta f_p^*$ — скорректированное значение частоты мобильного стандарта; $\delta f_p = \Delta f_p - \Delta f_p^*$ — погрешность коррекции (компенсации) частотных релятивистских эффектов. При достижении необходимой точности компенсации, когда $\delta f_p = 0$, из (15) имеем $f_m^* = f_0$, что означает равенство скорректированной частоты мобильного стандарта и частоты базового стандарта. Следствием этого является синхронизация шкал времени мобильного и базового стандартов. Действительно, на основе (5), (7), (15) по результатам коррекции частоты мобильного стандарта можно записать: $d t_m = (f_0/f_m^*) d t_0 = (1 - \delta f_p/f_0) d t_0$, откуда при $\delta f_p = 0$ получим совпадение хода времени мобильного и базового хранителей: $d t_m = d t_0$. Естественно, для полного совмещения обеих шкал времени необходима их начальная синхронизация.

Метод компенсации на основе коррекции частоты удобен для синхронизации неподвижных стандартов. Действительно, при $V = 0$ согласно (11) релятивистский сдвиг частоты постоянен, поскольку определяется только неизменными гравитационными потенциалами в точках размещения стандартов. Соответственно, постоянна и корректирующая поправка частоты, которая вводится однократно.

Вторая возможность использования этого метода открывается при одновременном постоянстве разности потенциалов и квадратов скоростей вдоль трассы движения мобильных часов. Перейдя в (10) от вращающейся геоцентрической системы к невращающейся с помощью соотношения $[\Omega \mathbf{R}_i] + \mathbf{V}_i = \mathbf{V}_{\text{нв}} (i = 0; \mathbf{V}_{\text{нв}} — скорость рассматриваемых часов в невращающейся системе), формулу (11) получим в виде$

$$\Delta f_{\text{rp}}/f_0 = -(\varphi_0 - \varphi_m)/c^2 - \left[(V_{\text{нв}}^2)_0 - (V_{\text{нв}}^2)_m \right] / 2c^2. \quad (16)$$

Условие постоянства правой части выражения (16) выполняется при размещении мобильных часов на борту космического аппарата, движущегося по круговой орбите. Такой вариант размещения характерен для космических аппаратов систем связи, дистанционного зондирования Земли, космической навигации и др. При этом для строго круговой орбиты условие постоянства смещения (см. (16)) выполняется независимо от пространственной ориентации и высоты орбиты. Компенсация релятивистского расхождения

бортового и наземного времени с помощью постоянного частотного сдвига реализована, в частности, в спутниковых бортовых часах навигационных систем ГЛОНАСС/GPS [14].

Точность компенсации релятивистских эффектов определяется точностью их вычисления по (11), (13), которая, в свою очередь, определяется точностью навигационных определений. Погрешности современных широко используемых навигационных приемников, например, типа TrimbleGeoExplorer 6000 GeoXH достаточно малы: при определении скорости среднее квадратическое значение случайной погрешности $\sigma_v = 5$ см/с, координат в дифференциальном режиме — $\sigma_x = 1$ м. Частота съема информации — 1 Гц. При этих условиях найдем относительную погрешность вычисления наиболее значимых составляющих рассматриваемых эффектов, модули которых определяются потенциалом и квадратом скорости: $\Delta f_p^{\text{ф}} = f_0 \mu / (c^2 \rho)$, $\Delta f_p^v = f_0 V^2 / (2c^2)$. Соответствующие относительные случайные погрешности определяются как

$$\frac{\sigma(f_p^{\text{ф}})}{f_0} = \frac{\Delta f_p^{\text{ф}}}{f_0} \frac{\sigma(\rho)}{\rho}, \quad \frac{\sigma(f_p^v)}{f_0} = \frac{\Delta f_p^v}{f_0} \frac{2\sigma(V)}{V}.$$

Из этих соотношений для точки на экваторе при $\rho = X_e = 6,378 \cdot 10^6$ м, $\sigma_x = 1$ м получаем $\sigma(f_p^{\text{ф}})/f_0 \approx 10^{-16}$, при

$V = 400$ м/с, $\sigma(V) = 5$ см/с, $\sigma(f_p^v)/f_0 \approx 10^{-16}$. Погрешности вычисления смещения шкалы времени на суточном интервале не превысят в обоих случаях 9 пс. Погрешности вычисления других составляющих формул (11), (13), содержащих ΩR и V , существенно ниже, поскольку их значения значительно меньше.

Точность учета других гравитационных эффектов смещения времени и частоты определяется погрешностью учета второй зональной гармоники нормального поля и длиной ряда разложения аномального потенциала в виде сферических функций (9). Вторая зональная гармоника потенциала φ_{n2} максимальна вблизи полюса ($\psi = 90^\circ$), и вызываемое ей относительное смещение у поверхности Земли достигает $\varphi_{n2}/c^2 \approx 7,5 \cdot 10^{-13}$. При установленной выше точности навигационного обеспечения погрешность вычисления этого эффекта не превысит 10^{-18} .

Количество членов разложения современных моделей аномального потенциала достигает сотен и даже тысяч. Одна из совершенных моделей гравитационного поля Земли EGM2008 содержит $n \times m = 2159 \times 2159$ членов разложения [15]. Вместе с тем, при решении конкретных практических задач этот ряд может быть существенно сокращен в результате отбрасывания пренебрежимо малых членов разложения. Так, коэффициенты при третьей и четвертой зональных гармониках составляют соответственно $J_{30} = -2,5 \cdot 10^{-6}$, $J_{40} = -1,6 \cdot 10^{-6}$. Соответствующие относительные гравитационные эффекты составляют $-2 \cdot 10^{-15}$ и $-1,1 \cdot 10^{-15}$, что вызывает расхождение шкал времени на суточном интервале около -17 пс и -10 пс соответственно и их можно рассчитать по навигационным данным. С ростом номера зональной гармоники ее коэффициент уменьшается. Начиная с 13-й зональной гармоники эти эффекты примерно на порядок меньше эффектов третьей и четвертой зональных гармоник и их

можно не учитывать без потери точности вычислений. Коэффициенты при зональных и тессеральных гармониках также достаточно малы и уменьшаются с ростом номера и порядка, например $C_{22} = 1,57 \cdot 10^{-6}$, $S_{22} = -0,9 \cdot 10^{-6}$ и т. д.

Следует отметить, что относительная инструментальная погрешность современных перевозимых квантовых часов на суточном интервале в режиме транспортирования составляет $1 \cdot 10^{-14}$, в стационарном режиме — $(2 \dots 4) \cdot 10^{-15}$ [12]. В ближайшей перспективе эта цифра может быть снижена до $1 \cdot 10^{-15}$. Таким образом, остаточная релятивистская погрешность существенно ниже инструментальной.

Заключение. Практические формулы для расчета релятивистских эффектов смещения частоты и времени в часах, перемещающихся на глобальные расстояния в аномальном гравитационном поле, выведены на основе общей теории относительности. Относительное значение неучтенных членов не превышает 10^{-18} . Компенсация эффектов возможна как на маршруте по результатам текущих навигационных определений по системам ГЛОНАСС/GPS, так и в конце маршрута движения часов по накопленным навигационным данным. В первом случае шкалы движущихся и базовых часов на маршруте находятся в режиме постоянной синхронизации. Компенсация эффектов может быть выполнена путем цифровой коррекции шкалы времени и введением сдвига частоты задающего генератора. Точность компенсации на основе использования современных навигационных приемников ГЛОНАСС/GPS в дифференциальном режиме навигации, а также с использованием современных глобальных моделей аномального гравитационного поля Земли, оценивается относительной случайной погрешностью не более 10^{-16} .

Л и т е р а т у р а

1. Hafele J., Keating R. Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains // Science. 1972. V. 177. P. 166—168.
2. Vessot R., Levine M. A. Test of the Equivalence Principle Using a Space-Borne Clock // Gen. Rel. Grav. 1979. V. 10. N. 3. P. 181—204.
3. Борисова Л. Б., Мельников В. Н. Релятивистские поправки в показаниях транспортируемых эталонов времени // Измерительная техника. 1988. № 4. С. 13—15; Borisova L. B., Mel'nikov V. N. Relativistic corrections to readings from a portable clock // Measurement Techniques. 1988. V. 31. N. 4. P. 323—327.

4. Фатеев В. Ф. Релятивистская теория радионавигации и синхронизации. Л.: ВКА им. А. Ф. Можайского, 1988.

5. Медведев Ю. Н., Смирнов Ю. Ф. Оценка релятивистских и гравитационных поправок при транспортировании перевозимых квантовых часов // Метрология времени пространства: Тр. 5-го Рос. симп. М.: ВНИИФТРИ, 1994. С. 342—343.

6. Petit G., Wolf P. Relativistic theory for time comparisons: a review // Metrologia. 2005. V. 42. S. 138—144.

7. Гайгеров Б. А., Сысоев В. П. Учет релятивистских эффектов при сличении шкал времени с помощью перевозимых квантовых часов // Измерительная техника. 2012. № 2. С. 25—29; Gaygerov B. A., Sysoev V. P. Relativistic effects in comparisons of time scales by means of transportable quantum clocks time and frequency measurements // Measurement Techniques. 2012. V. 55. N. 2. P. 143—150.

8. Меллер К. Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975.

9. Kopeikin S., Efroimsky M., Kaplan G. Relativistic celestial mechanics of the solar system. Berlin: WILEY-VCH, 2011.

10. Recommendation ITU-R TF.2018 (08/2012). Relativistic time transfer in the vicinity of Earth and in the solar system [Электрон. версия]. http://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/tf/R-REC-TF.2018-0-201208-!!!PDF-R.pdf (дата обращения 28.03.2014 г.)

11. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М.: Наука, 1976.

12. Сысоев В. П. и др. Перевозимые квантовые часы на основе водородного генератора // Метрология времени и пространства: Тр. 6-го Междунар. симп. М.: ВНИИФТРИ, 2012. С. 31—33.

13. Андропова И. А., Малыкин Г. Б. Физические проблемы волоконной гироскопии на эффекте Саньяка // УФН. 2002. Т. 172. № 8. С. 849—873.

14. Ashby N. Relativity in the Global Positioning System // Living Reviews in Relativity. 2003. V. 6. S. 1—42.

15. Pavlis N. K. et al. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008) // J. Geophys. Res. 2012. V. 117. B04406.

Дата принятия 28.05.2014 г.