

Научная статья

УДК 519.7+004.93

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-17-21>

Оптимизация ядерной оценки плотности вероятности двумерной случайной величины с независимыми составляющими

Александр Васильевич Лапко^{1✉}, Василий Александрович Лапко², Анна Владимировна Бахтина³

^{1, 2} Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Красноярск, Россия

^{1, 2, 3} Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск, Россия

¹lapko@icm.krasn.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0002-0664-3870>

²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>,

³anna-denisuk@yandex.ru

Аннотация. Изучена проблема оптимизации непараметрических оценок плотностей вероятностей, актуальность которой обусловлена уменьшением эффективности непараметрических алгоритмов обработки информации при увеличении объема статистических данных. Рассмотрена методика оптимизации ядерной оценки плотности вероятности двумерной случайной величины с независимыми составляющими. Обоснована возможность использования оптимальных коэффициентов размытости ядерных оценок плотностей вероятностей одномерных случайных величин при синтезе непараметрической двумерной плотности вероятности случайной величины с независимыми составляющими. В основу предлагаемого подхода положены результаты исследования асимптотических свойств непараметрической оценки плотности вероятности Розенблатта-Парзена. Для двумерной случайной величины показано, что основной вклад в асимптотическое выражение среднего квадратического отклонения внесли соответствующие критерии для одномерных случайных величин. При оценивании двумерной плотности вероятности возможно использование коэффициентов размытости, минимизирующих средние квадратические отклонения одномерных случайных величин. Полученные выводы подтверждены результатами вычислительных экспериментов при анализе нормальных законов распределения. Показана возможность развития предлагаемой методики при оптимизации непараметрических оценок плотностей вероятностей многомерных случайных величин с независимыми составляющими.

Ключевые слова: независимые случайные величины, плотность вероятности, непараметрическая оценка, оптимизация оценок, ядерные функции, коэффициенты размытости, асимптотические свойства

Для цитирования: Лапко А. В., Лапко В. А., Бахтина А. В. Оптимизация ядерной оценки плотности вероятности двумерной случайной величины с независимыми составляющими. 2021. № 12. С. 17–21. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-17-21>

Optimization of the kernel probability density estimation of a two-dimensional random variable with independent components

Aleksandr V. Lapko^{1✉}, Vasiliy A. Lapko², Anna V. Bakhtina³

^{1, 2} Institute of Computational Modelling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, Russia

^{1, 2, 3} Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

¹lapko@icm.krasn.ru ✉, <https://orcid.org/0000-0002-0664-3870>,

²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>,

³anna-denisuk@yandex.ru

Abstract. The problem of optimization of nonparametric estimates of probability densities is studied, the relevance of which is due to a decrease in the efficiency of nonparametric algorithms for information processing with an increase in the volume of statistical data. A method for optimizing the kernel probability density estimation of a two-dimensional random variable with independent components is considered. The possibility of using optimal bandwidths of kernel probability densities estimates of one-dimensional random variables in the synthesis of a nonparametric two-dimensional probability density of a random variable with independent components is substantiated. The proposed approach is based on the results of a study of the asymptotic properties of a nonparametric Rosenblatt-Parzen probability density estimation. For a two-dimensional random variable, it is shown that the main contribution to the asymptotic expression of the mean square deviation is provided by the corresponding criteria for one-dimensional random variables. Therefore, it becomes possible to use the bandwidths that minimize the mean square deviations of one-dimensional random variables when estimating a two-dimensional probability density. The obtained conclusions are confirmed by the results of computational experiments in the analysis of normal distribution laws. The possibility of developing the proposed methodology is shown when optimizing nonparametric estimates of the probability densities of multidimensional random variables with independent components.

Keywords: independent random variables, probability density, nonparametric estimation, optimization of estimates, kernel functions, blur coefficients, asymptotic properties

Введение. При синтезе алгоритмов обработки статистических данных в условиях априорной неопределённости вида исследуемых закономерностей широко используются непараметрические оценки плотностей вероятностей $\bar{p}(x)$ типа Розенблатта-Парзена [1]. Традиционные методы оптимизации $\bar{p}(x)$ основываются на выборе коэффициентов размытости ядерных функций из условия минимума оценки среднего квадратического отклонения (СКО) $\bar{p}(x)$ от плотности вероятности $p(x)$. Реализация указанных методов требует больших временных затрат, возрастающих с увеличением объёма статистических данных. Поэтому в настоящее время значительное внимание уделяется решению проблемы быстрого выбора коэффициентов размытости ядерных оценок плотностей вероятностей [2–9]. Предлагаемый подход использует результаты анализа формулы выбора оптимального коэффициента размытости, минимизирующего асимптотическое выражение СКО $\bar{p}(x)$ от $p(x)$. Основная составляющая формулы расчёта оптимального коэффициента размытости является нелинейным функционалом от второй производной $p(x)$. В [9] установлено, что исследуемый функционал – константа для ряда семейств одномерных плотностей вероятностей, и получены зависимости указанного функционала от количественных характеристик законов распределения случайных величин.

С увеличением размерности случайных величин и ограниченности объёма статистических данных появляется проблема реализации разработанного подхода, например, при синтезе непараметрической оценки плотности вероятности независимых случайных величин. В этих условиях при реализации быстрых процедур выбора коэффициентов размытости ядерных функций исследуемой непараметрической оценки плотности вероятности используются результаты оптимизации одномерных плотностей. Асимптотическое выражение СКО произведения непараметрических оценок плотностей вероятностей содержит составляющую, которая зависит от свойств нелинейного преобразования ядерных оценок плотностей вероятностей одномерных случайных величин. Поэтому актуальной является задача исследования аппроксимационных свойств непараметрической оценки многомерной плотности вероятности независимых случайных величин при использовании оптимальных коэффициентов размытости её составляющих.

Цель работы – обосновать возможность использования оптимальных коэффициентов размытости ядерных функций непараметрических оценок одномерных плотностей вероятностей при синтезе ядерной оценки двухмерной плотности вероятности независимых случайных величин.

Непараметрические оценки плотностей вероятностей независимых случайных величин и их свойства. Имеется выборка $V = (x^i, i = 1, n)$, сформированная из n наблюдений двухмерной случайной величины $x = (x_v, v = 1, 2)$ с априори неизвестной плотностью вероятности, которая оценивается статистикой

$$\bar{p}(x_1, x_2) = \bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2);$$

$$\bar{p}(x_v) = (nc_v)^{-1} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v}\right), \quad v = 1, 2, \quad (1)$$

где c_v – коэффициент размытости ядерных функций для составляющей x_v .

Непараметрические оценки плотностей вероятностей восстанавливаются по выборке статистически независимых наблюдений $(x_v^i, v = 1, 2, i = \overline{1, n})$. Ядерные функции $\Phi(u_v)$ в статистике (1) удовлетворяют условиям

$$H: \begin{cases} \Phi(u_v) = \Phi(-u_v); \\ 0 \leq \Phi(u_v) < \infty; \\ \int \Phi(u_v) du_v = 1; \\ \int u_v^2 \Phi(u_v) du_v = 1; \\ \int u_v^m \Phi(u_v) du_v < \infty; \\ 0 \leq m < \infty. \end{cases}$$

Здесь и далее бесконечные пределы интегрирования опустим. Значения коэффициентов размытости ядерных функций $c_v \rightarrow 0, nc_v \rightarrow \infty$ с увеличением объёма статистических данных $n \rightarrow \infty$.

При исследовании свойств $\bar{p}(x_v)$ получим асимптотическое выражение средней квадратической ошибки аппроксимации [10]:

$$W(c_v) \sim (nc_v)^{-1} \|\Phi(u_v)\|^2 + \frac{c_v^4 \|p^{(2)}(x_v)\|^2}{4}, \quad (2)$$

где $p^{(2)}(x_v)$ – вторая производная $p(x_v)$ по x_v ; $\|\Phi(u_v)\|^2 = \int \Phi^2(u_v) du_v$, $\|p^{(2)}(x_v)\|^2 = \int [p^{(2)}(x_v)]^2 dx_v$.

Оптимальное значение $\bar{c}_v^*$ коэффициента размытости c_v ядерных функций непараметрической оценки плотности вероятности (1) из условия минимума критерия (2) определяется выражением

$$\bar{c}_v^* = \left[\frac{\|\Phi(u_v)\|^2}{n \|p^{(2)}(x_v)\|^2} \right]^{1/5}, \quad v = 1, 2. \quad (3)$$

Пусть плотности вероятностей $p_v(x_v)$ случайных величин $x_v, v = 1, 2$, и их первые производные ограничены и непрерывны. Ядерные функции $\Phi(u_v)$ удовлетворяют условиям H .

Тогда при увеличении объёма статистических данных $n \rightarrow \infty$ значения коэффициентов размытости $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$, а $nc_1 \rightarrow \infty, nc_2 \rightarrow \infty$, асимптотическое выражение СКО $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ от $p(x_1)p(x_2)$ определим выражением [11]:

$$M \int \int [p(x_1)p(x_2) - \bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)]^2 dx_1 dx_2 \sim$$

$$\sim \frac{[\|\Phi(u)\|^2]^2}{n^2 c_1 c_2} + \frac{\|\Phi(u)\|^2 \|p(x_2)\|^2}{nc_1} + \frac{\|\Phi(u)\|^2 \|p(x_1)\|^2}{nc_2} +$$

$$+ \int \int \left[\frac{p(x_2)p^{(2)}(x_1)c_1^2}{2} + \frac{p(x_1)p^{(2)}(x_2)c_2^2}{2} \right]^2 dx_1 dx_2, \quad (4)$$

где M – математическое ожидание.

Из анализа выражения (4) следует, что при выполнении принятых выше условий статистика $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ обладает свойством сходимости в среднеквадратическом к $p(x_1)p(x_2)$ (выражение (4) стремится к нулю), а с учётом асимптотической несмещённости рассматриваемой статистики – является состоятельной.

Для удобства последующего анализа преобразуем критерий (4) к виду

$$W_{12}(c_1, c_2) = \frac{\|\Phi(u)\|^2 \|p(x_2)\|^2}{nc_1} + \frac{c_1^4}{4} \|p(x_2)\|^2 \|p^{(2)}(x_1)\|^2 + \\ + \frac{\|\Phi(u)\|^2 \|p(x_1)\|^2}{nc_2} + \frac{c_2^4}{4} \|p(x_1)\|^2 \|p^{(2)}(x_2)\|^2 + \frac{[\|\Phi(u)\|^2]^2}{n^2 c_1 c_2} + \\ + \frac{c_1^2 c_2^2}{2} \int p(x_1) p^{(2)}(x_1) dx_1 \int p(x_2) p^{(2)}(x_2) dx_2, \quad (5)$$

где $\|p(x_v)\|^2 = \int [p(x_v)]^2 dx_v$.

Определение оптимальных значений $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ коэффициентов размытости c_1, c_2 из условия минимума критерия (5) связано с решением двух уравнений пятой степени относительно c_1, c_2 . Общей формулы для нахождения корней уравнения выше четвертой степени не существует, но их можно найти приближенно. Трудности преодоления данной проблемы возрастают с увеличением размерности случайной величины.

Предлагаем при синтезе непараметрической оценки плотности вероятности $\bar{p}(x_1, x_2) = \bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$ использовать оптимальные коэффициенты размытости $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ (3), минимизирующие асимптотические выражения СКО $\bar{p}(x_1), \bar{p}(x_2)$ от $p(x_1), p(x_2)$ соответственно. Для обоснования данного подхода исследуем значения критерия $W_{12}(c_1, c_2)$ при $c_1 = \bar{c}_1^*, c_2 = \bar{c}_2^*$ (3) и в условиях, когда значения c_1, c_2 минимизируют критерий (5).

При значениях коэффициентов размытости $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ критерий (5) запишем в виде

$$W_{12}(c_1^*, c_2^*) = \left[\frac{\|\Phi(u)\|^2}{n} \right]^{4/5} \times \\ \times \left\{ \left[\frac{\|\Phi(u)\|^2}{n} \right]^{4/5} \left[\|p^{(2)}(x_1)\|^2 \|p^{(2)}(x_2)\|^2 \right]^{1/5} + \right. \\ + \frac{5}{4} \left(\left[\|p^{(2)}(x_1)\|^2 \right]^{1/5} \|p(x_2)\|^2 + \left[\|p^{(2)}(x_2)\|^2 \right]^{1/5} \|p(x_1)\|^2 \right) + \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\|p^{(2)}(x_1)\|^2 \|p^{(2)}(x_2)\|^2 \right]^{-2/5} \prod_{v=1}^2 \int p(x_v) p^{(2)}(x_v) dx_v \right\}.$$

При определении значений c_1^*, c_2^* , минимизирующих критерий (5), используем метод вычислительных экспериментов.

Анализ результатов вычислительных экспериментов. Исследуем зависимость отношения СКО, определяемую как

$$R(n) = W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*) / W_{12}(c_1^*, c_2^*).$$

Значения $W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*), W_{12}(c_1^*, c_2^*)$ определим при оптимальных коэффициентах размытости $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ (3) и c_1^*, c_2^* , минимизирующих критерий (5). При определении значений c_1^*, c_2^* используем программные средства MathCad. При реализации вычислительного эксперимента считаем, что плотности вероятностей $p(x_1), p(x_2)$ являются гауссовскими $N(0; \sigma_1), N(0; \sigma_2)$ и характеризуются СКО $\sigma_1=1; \sigma_2=0,5; 1; 2; 3$ соответственно. Полученные результаты представлены в табл. 1, 2.

Введём обозначения $Q(c_1, c_2)$ и $Q_1(c_1, c_2)$, которые определяют соответственно первые четыре слагаемых и последние два слагаемых критерия (5). Если коэффициенты размытости $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ используются при оценивании непараметрических оценок плотностей вероятностей (1), то $\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*) = Q(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*) / W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$, $\bar{R}_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*) = Q_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*) / W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$ не зависят от параметра σ_2 плотности вероятности $N(0, \sigma_2)$. Например, при $n=100$ и $\sigma_2=0,5$ значения $\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)=0,93$, а $\bar{R}_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)=0,07$. При $n=500$ и $\sigma_2=0,5$ значения $\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)=0,936$ и $\bar{R}_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)=0,064$ (табл. 2). При изменении объема исходных статистических данных значения $\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$ и $\bar{R}_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$ отличаются незначительно.

При оптимальных значениях коэффициентов размытости ядерных функций c_1^*, c_2^* в статистике $\bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$, минимизирующих критерий (5) в условиях $n=100, \sigma_2=0,5$, отношения СКО примут значения

$$R(c_1^*, c_2^*) = Q(c_1^*, c_2^*) / W_{12}(c_1^*, c_2^*) = 0,94;$$

$$R_1(c_1^*, c_2^*) = Q_1(c_1^*, c_2^*) / W_{12}(c_1^*, c_2^*) = 0,06.$$

С увеличением объема статистических данных, например при $n=500, \sigma_2=0,5$, значения $R(c_1^*, c_2^*)=0,948$, $R_1(c_1^*, c_2^*)=0,052$.

Поэтому основной вклад в формирование критерия (5) вносит его составляющая $Q(c_1, c_2)$, которая определяется СКО непараметрических оценок плотностей вероятностей $\bar{p}(x_v)$ от $p(x_v), v=1, 2$. Поэтому выбор коэффициентов размытости c_1, c_2 ядерных функций в статистике $\bar{p}(x_1) \bar{p}(x_2)$ можно заменить на задачи определения значений $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ по формуле (3), которые минимизируют СКО $\bar{p}(x_1), \bar{p}(x_2)$ от $p(x_1), p(x_2)$ соответственно. Дополнительное подтверждение полученного

Таблица 1

СКО $W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*), W_{12}(c_1^*, c_2^*)$ и их отношения $R(n)$ при различных значениях n, σ_2

σ_2	$\bar{c}_2^*$	$W_{12}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$	c_2^*	$W_{12}(c_1^*, c_2^*)$	$R(n)$
$n=100, \bar{c}_1^*=0,417, c_1^*=0,396$					
0,5	0,209	0,00975	0,197	0,00269	1,0059
1,0	0,417	0,00487	0,396	0,00485	1,0058
2,0	0,835	0,00244	0,787	0,00242	1,0058
3,0	1,253	0,00162	1,181	0,00162	1,0056
$n=250, \bar{c}_1^*=0,348, c_1^*=0,327$					
0,5	0,174	0,00467	0,163	0,00463	1,0067
1,0	0,348	0,00233	0,327	0,00232	1,0069
2,0	0,695	0,00117	0,654	0,00116	1,0060
3,0	1,043	0,00078	0,980	0,00077	1,0066
$n=500, \bar{c}_1^*=0,303, c_1^*=0,285$					
0,5	0,151	0,00267	0,142	0,00266	1,0064
1,0	0,303	0,00134	0,285	0,00133	1,0075
2,0	0,605	0,00067	0,568	0,00066	1,0068
3,0	0,908	0,00045	0,853	0,00044	1,0068

Таблица 2

Составляющие $Q(c_1, c_2)$ и $Q_1(c_1, c_2)$ критерия (5) и отношения $\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*), R(c_1^*, c_2^*)$ при различных значениях n, σ_2

n	σ_2	$Q(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$	$Q_1(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$	$Q(c_1^*, c_2^*)$	$Q_1(c_1^*, c_2^*)$	$\bar{R}(\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*)$	$R(c_1^*, c_2^*)$
100	0,5	0,009065	0,0006871	0,009118	0,0005766	0,930	0,940
	1,0	0,004533	0,0003422	0,004557	0,0002905	0,930	0,940
	2,0	0,002266	0,0001714	0,002280	0,0001439	0,929	0,941
	3,0	0,001511	0,0001144	0,001520	0,00009524	0,930	0,941
250	0,5	0,004356	0,0003108	0,004388	0,0002477	0,934	0,947
	1,0	0,002178	0,0001554	0,002193	0,0001245	0,934	0,946
	2,0	0,001089	0,0000775	0,001097	0,00006225	0,934	0,947
	3,0	0,0007258	0,00005171	0,000731	0,00004143	0,934	0,946
500	0,5	0,002502	0,0001729	0,002519	0,0001375	0,936	0,948
	1,0	0,001251	0,00008698	0,001259	0,00006917	0,935	0,948
	2,0	0,0006254	0,00004335	0,0006299	0,00003436	0,935	0,948
	3,0	0,0004169	0,00002893	0,0004198	0,00002296	0,935	0,948

вывода следует из анализа отношений СКО $R(n)$ по данным табл. 1. Значения критерия $R(n) \in [1,0056; 1,0075]$ при изменении параметра $\sigma_2 \in [0,5; 3]$ и объёма $n \in [100; 500]$. Результат исследования обосновывает определение коэффициентов размытости в непараметрической оценке плотности вероятности $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ из условия минимума СКО её составляющих $\bar{p}(x_v), v=1, 2$.

На основе полученных результатов появляется возможность использования методики быстрого выбора коэффициентов размытости непараметрической оценки плотности вероятности $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ в соответствии с рекомендациями работы [9], что особенно актуально при обработке большого объёма статистических данных. Обоснуем эту возможность. После несложных преобразований формулу (3) представим в виде

$$\bar{c}_v^* = \beta_v \sigma_v n^{-1/5};$$

$$\beta_v = \left(\frac{\|\Phi(u_v)\|^2}{\sigma_v^5 \|p_v^{(2)}(x)\|^2} \right)^{1/5}, \quad v=1, 2.$$

В работе [9] показано, что функционал $\lambda_v = \sigma_v^5 \|p_v^{(2)}(x)\|^2$ плотности вероятности $p(x_v)$ оценивается линейной аппроксимацией по значениям коэффициента контрэксцесса случайной величины $x_v, v=1, 2$. Например, для законов распределения нормального, логистического и Стюдента функциональная зависимость между λ_v и коэффициентом контрэксцесса δ_v определяется выражением

$$\bar{\lambda}_v = -2,185\delta_v + 1,4685$$

при средней относительной погрешности аппроксимации 0,0365.

Результаты исследования открывают возможность их обобщения при синтезе непараметрической оценки плотности вероятности многомерной случайной величины с независимыми компонентами.

Заключение. Оптимизация непараметрической оценки плотности вероятности $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ независимых случайных величин допускает выбор коэффициентов размытости ядерных функций из условий минимума СКО $\bar{p}(x_1)$ от $p(x_1)$ и $\bar{p}(x_2)$ от $p(x_2)$. Полученные выводы подтверждаются результатами вычислительных экспериментов при анализе законов распределения Гаусса независимых случайных величин. Среднее квадратическое отклонение $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ от $p(x_1)p(x_2)$ в основном определяется СКО непараметрических оценок плотностей вероятностей $\bar{p}(x_1), \bar{p}(x_2)$ от $p(x_1), p(x_2)$. При исследуемых объёмах $n \in [100; 500]$ статистических данных и изменении параметра $\sigma_2 \in [0,5; 3]$ отношение СКО $R(n) \leq 1,0075$ для значений $\bar{c}_1^*, \bar{c}_2^*$ (см. формулу (3)) и c_1^*, c_2^* (см. условие минимума критерия (5)).

Список источников

1. Зеньков И. В., Лапко А. В., Лапко В. А., Им С. Т., Тубольцев В. П., Авдеев В. Л. Непараметрический алгоритм автоматической классификации многомерных статистических данных большого объёма и его применение // Компьютерная оптика. 2021. Т. 45. № 2. С. 253–260. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-801>
2. Варжапетян А. Г., Михайлова Е. Ю. Методы выбора определяющих характеристик непараметрических алгоритмов идентификации моделей надёжности сложных систем по эксплуатационным данным // Вопросы кибернетики. 1982. Вып. 94. С. 77–87.
3. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman and Hall, 1986, 175 p.
4. Botev Z. I., Grotowski J. F., Kroese D. P., *Annals of Statistics*, 2010, vol. 38, no. 5, pp. 2916–2957.
5. Добровидов А. В., Рудько И. М. Выбор ширины окна ядерной функции в непараметрической оценке производной плотности методом сглаженной кросс-валидации // Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 42–58.
6. O'Brien T. A., Kashinath K., Cavanaugh N. R., Collins W. D., O'Brien J. P., *Computational Statistics and Data Analysis*, 2016, vol. 101, pp. 148–160. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.02.014>
7. Chen S., *Journal of Probability and Statistics*, 2015, vol. 2015, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1155/2015/242683>
8. Scott D. W., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New York, Wiley, 2015, 384 p.
9. Лапко А. В., Лапко В. А. Модифицированный алгоритм быстрого определения коэффициента размытости ядерной оценки плотности вероятности // Автометрия. 2020. Т. 56. № 6. С. 11–18. <https://doi.org/10.15372/AUT20200602>
10. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и ее применения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156–161.
11. Лапко А. В., Лапко В. А. Непараметрическая оценка плотности вероятности независимых случайных величин // Информатика и системы управления. 2011. Т. 29. № 3. С. 118–124.

References

1. Zenkov I. V., Lapko A. V., Lapko V. A., Im S. T., Tuboltsev V. P., Avdeenok V. L., *Computer Optics*, 2021, vol. 45, no. 2, pp. 253–260. (In Russ.) <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-801>
2. Varzhapetyan A. G., Mikhailova E. Yu., *Voprosy kibernetiki*, 1982, no. 94, pp. 77–87. (In Russ.)
3. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman and Hall, 1986, 175 p.
4. Botev Z. I., Grotowski J. F., Kroese D. P., *Annals of Statistics*, 2010, vol. 38, no. 5, pp. 2916–2957.
5. Dobrovidov A. V., Ruds'ko I. M., *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 2, pp 209–224. <https://doi.org/10.1134/S0005117910020050>
6. O'Brien T. A., Kashinath K., Cavanaugh N. R., Collins W. D., O'Brien J. P., *Computational Statistics and Data Analysis*, 2016, vol. 101, pp. 148–160. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.02.014>
7. Chen S., *Journal of Probability and Statistics*, 2015, vol. 2015, pp. 1–21. <https://doi.org/10.1155/2015/242683>
8. Scott D. W., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New York, Wiley, 2015, 384 p.
9. Lapko A. V., Lapko V. A., *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2020, vol. 56, no. 6, pp. 566–572. <https://doi.org/10.3103/S8756699020060102>
10. Epanechnikov V. A., *Theory of Probability and Its Applications*, 1969, vol. 14, no. 1, pp. 153–158. <https://doi.org/10.1137/1114019>
11. Lapko A. V., Lapko V. A., *Informatika i sistemy upravleniya*, 2011, vol. 29, no. 3, pp. 118–124. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 08.07.2021; одобрена после рецензирования 30.09.2021; принята к публикации 11.10.2021.
 The article was submitted 08.07.2021; approved after reviewing 30.09.2021; accepted for publication 11.10.2021.