

Научная статья

УДК 681.2

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7>

Приближённый метод восстановления входных сигналов измерительных преобразователей

Илья Владимирович Бойков^{1✉}, Николай Петрович Кривулин²

^{1, 2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹i.v.boikov@gmail.com[✉], <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>

²krivulin@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1955-8472>

Аннотация. Рассмотрены задачи информационно-измерительной техники, моделируемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, когда некоторую физическую переменную невозможно измерить, но её значение можно определить по функционалу (или оператору) другой, доступной для измерения физической переменной. Непосредственное применение моделей с обыкновенными дифференциальными уравнениями для восстановления входных сигналов измерительных преобразователей не получило должного развития из-за необходимости вычисления производных (возможно, высоких порядков) от зашумлённых сигналов. Предложен метод восстановления входных сигналов, в котором для приближённого вычисления производных использован аппарат гиперсингулярных интегралов. Представлены приближённые методы вычисления производных, выраженные квадратурными формулами для гиперсингулярных интегралов. Метод восстановления входных сигналов апробирован для одной модели акселерометра. Продемонстрирована высокая эффективность предложенного метода.

Ключевые слова: измерительный преобразователь ускорения, акселерометр, восстановление входных сигналов, приближённые методы дифференцирования

Для цитирования: Бойков И. В., Кривулин Н. П. Приближённый метод восстановления входных сигналов измерительных преобразователей // Измерительная техника. 2021. № 12. С. 3–7. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-12-3-7>

On an approximate method for reconstructing input signals of measuring transformers

Ilia V. Boikov^{1✉}, Nikolay P. Krivulin²

^{1, 2} Penza State University, Penza, Russia

¹i.v.boikov@gmail.com[✉], <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>

²krivulin@bk.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1955-8472>

Abstract. In information and measuring technology, there are a large number of tasks when some physical variable, the values of which must be determined, are inaccessible to measurements, but its value can be determined knowing the functional (or operator) of another physical variable available to measurements. This range of tasks includes measuring transformers, the dynamics of which is modeled by ordinary differential equations. The direct application of these models for the reconstruction of input signals has not received proper development due to the need to calculate the derivatives (possibly high orders) of signals noisy with interference. In this paper, we propose a method for recovering the input signals of measuring transformers, in which the signal of interest to the observer is associated with the measured signal by the differentiation operator. For the numerical calculation of derivatives, the apparatus of hypersingular integrals is used. Approximate methods for calculating derivatives, expressed by quadrature formulas for hypersingular integrals, are presented. The method for recovering input signals is tested for one accelerometer model. The high efficiency of the proposed method has been demonstrated.

Keywords: measuring transformers of acceleration, accelerometer, restoration of input signals, approximate methods of differentiation

Введение. Большой круг задач информационно-измерительной техники, например восстановление входных сигналов и синтез измерительных преобразователей, моделируется обыкновенными дифференциальными уравнениями. В этих задачах необходимо найти значение некоторой физической величины, которую невозможно измерить, но при

этом её можно определить по функционалу (или оператору) от другой измеряемой физической величины. Большое число таких моделей описано в монографиях [1–3] и обзорных статьях [4, 5]. Для восстановления входных сигналов данные модели практически не применяются из-за отсутствия устойчивых алгоритмов дифференцирования

функций в присутствии помех. Численное дифференцирование является некорректной задачей, и для вычисления производных от зашумлённых сигналов требуются методы регуляризации [6]. В настоящее время разработано много различных подходов к решению этой задачи [7, 8], однако с их использованием невозможно полностью решить задачу устойчивого вычисления производных, особенно высоких порядков, при помехах.

Цель настоящей работы – разработать метод вычисления производных функций одной переменной, основанный на представлении производных гиперсингулярными интегралами. При этом используется вся известная информация о дифференцируемой функции.

Преобразователь измерения ускорения. Постановка задачи. Метод восстановления вектора ускорения излагается на примере измерительных преобразователей, в частности акселерометров, моделируемых обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка с сосредоточенными параметрами

$$a_2(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = f(t) \quad (1)$$

и начальными условиями $x(0) = x_0$; $x'(0) = x_1$. Здесь $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ – коэффициенты, характеризующие конструктивные параметры измерительного преобразователя; $x(t)$, $f(t)$ – выходной и входной сигналы соответственно.

В работе [9] описано устройство, которое позволяет регистрировать перемещения чувствительного элемента по трём взаимно перпендикулярным направлениям, а затем преобразовывать информацию о перемещении в параметры светового потока. Роль чувствительного элемента (рисунок) выполняет инерционная масса, представляющая собой линзу 1 (например, шаровую, выполненную из кварцевого стекла с малым температурным коэффициентом линейного расширения), уравновешенную упругими элементами 3 (упругой средой). Световой поток источника излучения через коллиматор 2 поступает в линзу 1, которая может совершать ограниченные перемещения, деформируя при этом упругую среду. Перемещение линзы относительно исходного положения изменяет освещённость. Таким образом, при пропускании светового потока через линзу в трёх взаимно перпендикулярных направлениях можно контролировать параметры (величину, направление и координаты) вектора перемещения в выбранной системе координат.

Функционирование акселерометра описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} mx'' + K_D^x x' + C^x x &= f_x(t); \\ my'' + K_D^y y' + C^y y &= f_y(t); \\ mz'' + K_D^z z' + C^z z &= f_z(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где $x, x', x'', y, y', y'', z, z', z''$ – соответственно перемещение, скорость и ускорение чувствительного элемента акселерометра (линзы) по осям Ox, Oy, Oz ; $f_x(t), f_y(t), f_z(t)$ – компоненты вектора

силы воздействия на чувствительный элемент; m – масса чувствительного элемента; C, K_D – соответственно жёсткость и коэффициент демпфирования упругого элемента.

В рассматриваемом случае доступны для измерений проекции перемещений чувствительного элемента на оси координат. Для восстановления вектора ускорения необходимо использовать численные методы дифференцирования. В настоящей работе для вычисления производных применяются приближённые методы вычисления гиперсингулярных интегралов, обладающие высокой точностью и устойчивостью при вычислении производных высших порядков.

В работе [10] приведены формулы, связывающие производные функций с гиперсингулярными интегралами от этих функций. Построим квадратурные формулы для вычисления производных. Пусть $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$, имеет непрерывные производные r -го порядка. Предположим, что $n = [N/r]$. Здесь $[c]$ означает целую часть неотрицательного числа c . Разделим сегмент $[a, b]$ на n равных частей точками $x_k = a + (b-a)k/n$, $k=0, 1, \dots, n$. На каждом сегменте $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, n-1$, построим интерполяционный полином r -го порядка $P_r(\varphi, \Delta_k)$ так, чтобы точки x_k, x_{k+1} входили в число узлов интерполяции.

Вычислим производные $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$. Пусть $t \in [x_l, x_{l+1}]$, $t \in [x_l, (x_l + x_{l+1})/2]$. Тогда первую производную рассчитаем по формуле

$$\begin{aligned} \varphi'_h(t) \approx & \frac{2h}{\pi} \left[\sum_{k=0}^{l-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k)(\tau-t)d\tau}{[(\tau-t)^2 + h^2]^2} + \right. \\ & + \int_{\Delta_{l-1} \cup \Delta_l} \frac{P_r(\varphi, \Delta_{l-1} \cup \Delta_l)(\tau-t)d\tau}{[(\tau-t)^2 + h^2]^2} + \\ & \left. + \sum_{k=l+1}^{n-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k)(\tau-t)d\tau}{[(\tau-t)^2 + h^2]^2} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичным образом можно построить квадратурную формулу при $t \in [x_l, x_{l+1}]$, $t \in [(x_l + x_{l+1})/2, x_{l+1}]$.

Вычислительная схема (3) имеет высокую точность и устойчивость. Параметром регуляризации в схеме (3) является h . Зависимость точности и устойчивости от параметра h исследуют методами, предложенными в [11], [12] при построении оптимальных квадратурных формул для вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Аналогичным образом запишем квадратурную формулу для вычисления второй производной $\varphi''(t)$:

$$\varphi''(t) \approx \varphi''_h(t) \approx -\frac{2h^b}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)d\tau}{a[(\tau-t)^2 + h^2]^2} + \frac{8h^b}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)(\tau-t)d\tau}{a[(\tau-t)^2 + h^2]^3}.$$

После преобразования получим

$$\varphi''(t) \approx \varphi''_h(t) \approx \frac{2h^b}{\pi} \int_a^b \frac{\varphi(t)[3(\tau-t) - h^2]d\tau}{a[(\tau-t)^2 + h^2]^3}.$$

Вычислительная схема подобна схеме (3) при $t \in [x_l, x_{l+1}]$, $t \in [x_l, (x_l + x_{l+1})/2]$:

$$\begin{aligned} \varphi''_h(t) \approx & \frac{2h}{\pi} \left[\sum_{k=0}^{l-2} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k) [3(\tau-t)-h^2] d\tau}{[(\tau-t)^2+h^2]^3} + \right. \\ & + \int_{\Delta_{l-1} \cup \Delta_l} \frac{P_r(\varphi, \Delta_{l-1} \cup \Delta_l) [3(\tau-t)-h^2] d\tau}{[(\tau-t)^2+h^2]^3} + \\ & \left. + \sum_{k=l+1}^{n-1} \int_{\Delta_k} \frac{P_r(\varphi, \Delta_k) [3(\tau-t)-h^2] d\tau}{[(\tau-t)^2+h^2]^3} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичным образом вычисляется вторая производная при $t \in [x_l, x_{l+1}]$, $t \in [(x_l + x_{l+1})/2, x_{l+1}]$.

Приближённые формулы для вычисления высших производных строятся аналогично.

Восстановление входного сигнала. Численный пример. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого моделируется системой дифференциальных уравнений (2). Расчёт проведём при следующих конструктивных параметрах: масса чувствительного элемента $m=0,1$ кг; для каждого измерительного канала коэффициент демпфирования $K_D^x=K_D^y=K_D^z=2Hc/m$ и коэффициенты упругости пружин $C^x=C^y=C^z=22,1H/m$.

Как отмечено выше, по измеренным значениям перемещений чувствительного элемента можно восстановить как действующую на него силу, так и возникающее при этом ускорение. При определении ускорения используют формулы (3), (4). Соответствующие интерполяционные полиномы в этих формулах строят по результатам измерений с постоянным шагом. Если измерения проводились с переменным шагом, то возможны три подхода:

использование в формулах (3), (4) интерполяционных формул с хаотическим распределением узлов;

построение методом наименьших квадратов интерполяционного полинома порядка $n-1$, где n – число измерений, и поиск по значениям построенного полинома значения функции перемещения $x(t)$ в равномерной сетке;

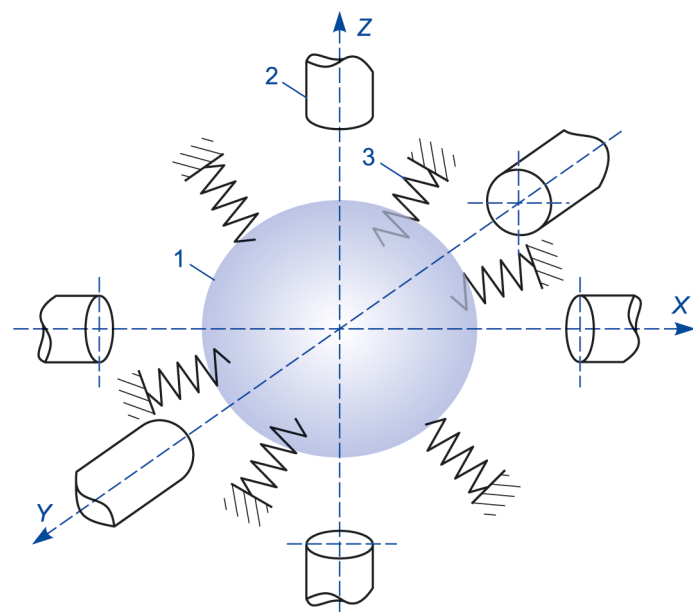
при большом (не менее 15–20) числе измерений разбиение измерений на группы и последующая обработка результатов в соответствии со вторым подходом.

Для определения силы воздействия на чувствительный элемент систему (2) приведём к виду

$$\begin{cases} f_x(t) = 0,1x''(t) + 2x'(t) + 22,1x(t); \\ f_y(t) = 0,1y''(t) + 2y'(t) + 22,1y(t); \\ f_z(t) = 0,1z''(t) + 2z'(t) + 22,1z(t). \end{cases} \quad (5)$$

Каждый измерительный канал параллелен координатным осям OX , OY , OZ , и искомые координаты вектора силы $\mathbf{f}(t) = (f_x(t), f_y(t), f_z(t))$ определяются формулами (5).

Предполагается, что погрешность измерения перемещений по каждому каналу составляет $\varepsilon = 3\%$.



Положение модулирующего элемента относительно взаимно перпендикулярных измерительных каналов:

1 – чувствительный элемент (линза); 2 – коллиматор; 3 – упругий элемент

Position of the modulating element relative to mutually perpendicular measuring channels:

1 – sensing element (lens); 2 – collimator; 3 – elastic element

Таблица 1

Точные, приближённые значения и погрешность вычисления значений проекций вектора силы по осям OX , OY , OZ

k	f_x	$\tilde{f}_x$	Δf_x	f_y	$\tilde{f}_y$	Δf_y	f_z	$\tilde{f}_z$	Δf_z
1	1,000	0,971	0,029	0,127	0,123	0,004	0,655	0,635	0,020
2	1,000	1,000	0	0,161	0,161	0,000	0,990	0,991	0,001
3	1,000	1,029	0,029	0,204	0,210	0,006	0,841	0,865	0,024
4	1,000	1,013	0,013	0,259	0,263	0,004	0,281	0,284	0,003
5	1,000	0,977	0,023	0,329	0,321	0,008	-0,417	-0,406	0,011
6	1,000	0,976	0,024	0,417	0,407	0,010	-0,910	-0,888	0,022
7	1,000	1,011	0,011	0,529	0,535	0,006	-0,959	-0,970	0,011
8	1,000	1,030	0,030	0,672	0,692	0,020	-0,539	-0,554	0,015
9	1,000	1,004	0,004	0,852	0,856	0,004	0,145	0,146	0,001
10	1,000	0,972	0,028	1,082	1,051	0,031	0,758	0,735	0,023
11	1,000	0,983	0,017	1,372	1,348	0,024	1,000	0,983	0,017
12	1,000	1,019	0,019	1,741	1,775	0,034	0,753	0,768	0,015
13	1,000	1,027	0,027	2,209	2,269	0,060	0,139	0,141	0,002
14	1,000	0,994	0,006	2,803	2,787	0,016	-0,544	-0,540	0,004
15	1,000	0,970	0,030	3,557	3,449	0,108	-0,961	-0,931	0,030
16	1,000	0,991	0,009	4,513	4,473	0,040	-0,908	-0,901	0,007
17	1,000	1,026	0,026	5,726	5,874	0,148	-0,411	-0,421	0,010
18	1,000	1,021	0,021	7,265	7,421	0,156	0,287	0,294	0,007
19	1,000	0,985	0,015	9,219	9,077	0,142	0,844	0,830	0,014
20	1,000	0,971	0,029	11,697	11,356	0,341	0,989	0,960	0,029

Пусть перемещения относительно координатных осей в первом (по оси OX), втором (по оси OY) и третьем (по оси OZ) каналах определяются по формулам соответственно

$$x(t) = \frac{10}{221} \left[1 - e^{-10t} \left(\cos(11t) + \frac{10}{11} \sin(11t) \right) \right] + n_x(t); \quad (6)$$

$$y(t) = \frac{1}{242} \left\{ e^t - e^{-10t} [\cos(11t) + \sin(11t)] \right\} + n_y(t); \quad (7)$$

$$z(t) = \frac{5}{6068} \left\{ e^{-10t} [15\cos(11t) - 9\sin(11t)] - 15\cos(3t) + 53\sin(11t) \right\} + n_z(t), \quad (8)$$

где $|n_x(t)|, |n_y(t)| \leq 0,0014$, $|n_z(t)| \leq 0,0013$ – погрешности измерений.

Производные в системе (5) вычислим по формулам (3), (4) при значениях $r=7, n=12$.

Точные значения проекций по осям OX, OY, OZ вектора силы, действующей на чувствительный элемент, в каждом из каналов определим соответственно как $f_x(t)=1(t)$, $1(t)$ – единичный сигнал; $f_y(t)=0,1e^t$; $f_z(t)=\sin(3t)$.

Результаты восстановления вектора силы на интервале времени (в секундах) $t \in (0; 5)$ по узлам $t_k = a + (b-a)k/N$, $k=0, 1, \dots, N-1$; $a=0$; $b=5$; $N=21$ приведены в табл. 1–2. Средние абсолютные погрешности приближенного восстановления проекций f_x, f_y, f_z вектора силы и средние относительные погрешности составили соответственно $\Delta f_x=0,020$, $\varepsilon_x=1,952$ %; $\Delta f_y=0,058$, $\varepsilon_y=1,974$ %; $\Delta f_z=0,013$, $\varepsilon_z=1,966$ %.

Модуль вектора силы определяется как $|f| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}$. В табл. 2 приведены результаты восстановления модуля

Таблица 2

Точные, приближенные значения и погрешность вычисления значений модуля вектора силы

k	$ f $	$\tilde{ f }$	$\Delta f $	k	$ f $	$\tilde{ f }$	$\Delta f $
1	1,202	1,167	0,035	11	1,971	1,936	0,035
2	1,416	1,418	0,002	12	2,145	2,186	0,041
3	1,322	1,361	0,039	13	2,429	2,495	0,066
4	1,070	1,085	0,015	14	3,026	3,008	0,018
5	1,132	1,106	0,026	15	3,818	3,702	0,116
6	1,415	1,380	0,035	16	4,711	4,669	0,042
7	1,483	1,500	0,017	17	5,827	5,978	0,151
8	1,320	1,359	0,039	18	7,340	7,497	0,157
9	1,322	1,327	0,005	19	9,311	9,168	0,143
10	1,656	1,610	0,046	20	11,781	11,438	0,343

вектора силы – точные $|f|$ и приближенные $\tilde{|f|}$ значения. Средние абсолютная и относительная погрешности восстановления модуля вектора силы составили соответственно $\Delta|f|=0,068$ и $\varepsilon_{|f|}=1,972$ %.

Резкие изменения погрешности при $k=1; 20$ вызваны эффектом Гиббса [13]. Для подавления этого эффекта используют специальные алгоритмы [14], простейшим алгоритмом является усреднение результатов вычислений на концах сегментов.

Сравним результаты восстановления проекций и модуля вектора силы при различных способах вычисления производных. Измеряемые проекции вектора силы восстановим на интервале времени $t \in (0; 5)$ по узлам $t_k = a + (b-a)(k+1)/n$, $k=0, 1, \dots, n-1$; $a=0$; $b=5$; $n=20$.

Наиболее известный и широко распространенный метод вычисления производных основан на построении интерполяционных полиномов Лагранжа. Построим для функции $\varphi(t)$ интерполяционный полином по указанным выше узлам

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^n \varphi(t_k) \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^n \frac{t-t_l}{t_k-t_l}.$$

Первую и вторую производную аналитически вычислим по следующим формулам:

$$\varphi'(t) \approx L'_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_l} \sum_{m=0}^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k, l \neq m}}^n (t-t_l); \quad (9)$$

$$\varphi''(t) \approx L''_n(t) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi(t_k)}{t_k-t_l} \sum_{m=0}^n \sum_{p=0}^n \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq k, l \neq m, l \neq p}}^n (t-t_l). \quad (10)$$

Результаты восстановления проекций и модуля вектора силы с использованием формул (3)–(4) и (9)–(10) двух методов дифференцирования – предложенным интегральным методом 1 ($h=10^{-4}$, $n=12$, $r=7$) и интерполяционным методом 2 ($n=20$), при двух значениях максимальной погрешности $\varepsilon_{\max}$ измерения перемещения приведены в сводной табл. 3, где Δf , ε_f – средние абсолютная и относительная погрешности восстановления проекций вектора силы в каждом измерительном канале и восстановления модуля вектора силы.

При больших погрешностях измерения перемещения результаты измерений методами 1, 2 сопоставимы, а при малых погрешностях точность метода 1 превышает точность метода 2 на два порядка.

Таблица 3

Результаты восстановления проекций и модуля вектора силы

$\varepsilon_{\max}$, %	Метод	Δf_x	ε_{f_x} , %	Δf_y	ε_{f_y} , %	Δf_z	ε_{f_z} , %	$\Delta f $	$\varepsilon_{ f }$, %
3,00	1	0,020	1,952	0,058	1,974	0,013	1,966	0,068	1,972
	2	0,020	1,982	0,052	1,859	0,017	4,370	0,058	1,639
0,01	1	0,00007	0,007	0,0003	0,007	0,0001	0,020	0,0003	0,008
	2	0,0006	0,055	0,034	1,221	0,025	6,859	0,037	1,008

Заключение. Предложенный метод восстановления моделируемых обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка входных сигналов измерительных преобразователей основан на регуляризации вычисления производных первого и второго порядков

квадратурными формулами вычисления гиперсингулярных интегралов. Применение метода проиллюстрировано восстановлением входного сигнала модели акселерометра. Представленный метод может быть применён к широкому классу измерительных преобразователей со сосредоточенными параметрами.

Список источников

1. Грановский В. А. Динамические измерения. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 220 с.
2. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 297 с.
3. Hasanoğlu A. H., Romanov V. G., *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*, Springer International Publishing AG, 2017. 264 p.
4. Грановский В. А. Теоретическая метрология: проблемы и перспектива // Датчики и системы. 2018. № 4 (224). С. 60–68.
5. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Методы идентификации динамических систем // Программные системы: теория и приложения: электронный научный журнал. 2014. Т. 5. № 5 (23). С. 79–96. URL: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5.79-96.pdf (дата обращения: 10.06.2021).
6. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. Арестов В. В. Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами // Труды ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24. № 4. С. 34–56. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-34-56>
8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматгиз, 1961. 523 с.
9. Пат. RU 2147750 С1. Способ измерения параметров ускорения / Кривулин Н. П., Мещеряков В. А., Капезин С. В., Мурашкина Т. И., Баранов С. С. // Патентное ведомство: Россия. 20.04.2000.
10. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2016. 398 с.
11. Бойков И. В. Приближённые методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть I. Сингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2005. 360 с.
12. Бойков И. В. Приближённые методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть II. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пензенского государственного университета, 2009. 252 с.

13. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики: Пер. с нем. Book of Demand Ltd., 2019. 466 с.

14. Archibald R., Gelb A., *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, vol. 21, no. 4, pp. 305–319. <https://doi.org/10.1109/TMI.2002.1000255>

References

1. Granovskiy V. A., *Dinamicheskiye izmereniya*, Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1984, 220 p. (In Russ.)
2. Denisov A. M., *Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach*, Moscow, MGU Publ., 1994, 297 p. (In Russ.)
3. Hasanoğlu A. H., Romanov V. G., *Introduction to Inverse Problems for Differential Equations*, Springer International Publishing AG, 2017, 264 p.
4. Granovskiy V. A., Theoretical metrology: problems and perspectives, *Datchiki i sistemy (Sensors & Systems)*, 2018, no. 4 (224), pp. 60–68. (In Russ.)
5. Boykov I. V., Krivulin N. P., *Programnie sistemy: teoria i prilozhenia: elektronniy nauchnyy zhurnal*, 2014, vol. 5, no. 5 (23), pp. 79–96, available at: http://psta.psiras.ru/read/psta2014_5.79-96.pdf (accessed: 10.06.2021). (In Russ.)
6. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya., *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1986, 288 p. (In Russ.)
7. Arestov V. V., Nailuchsheye ravnomernoye priblizheniye operatora differentsirovaniya ograničennymi v prostranstve L_2 operatorami, *Trudy IMM UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 4, pp. 34–56. (In Russ.) <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-4-34-56>
8. Lantsosh K., *Prakticheskiye metody prikladnogo analiza*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 523 p. (In Russ.)
9. Pat. RU no. 2147750, Krivulin N. P., Meshcheryakov V. A., Kapezin S. V., Murashkina T. I., Baranov S. S., 2000. (In Russ.)
10. Boykov I. V., Krivulin N. P., *Analiticheskie i chislennye metody identifikatsii dinamicheskikh system*, Penza, PGU Publ., 2016, 398 p. (In Russ.)
11. Boykov I. V., *Priblizennye metody vichisleniy singularnykh i gipersingularnykh integralov. Chast I. Singularnye integraly*, Penza, PGU Publ., 2005, 360 p. (In Russ.)
12. Boykov I. V., *Priblizennye metody vichisleniy singularnykh i gipersingularnykh integralov. Chast II. Gipersingularnye integraly*, Penza, PGU Publ., 2009, 252 p. (In Russ.)
13. Zommerfeld A., *Differentsialnyye uravneniya v chastnykh proizvodnykh fiziki*, Book of Demand Ltd., 2019, 466 p. (In Russ.)
14. Archibald R., Gelb A., *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, vol. 21, no. 4, pp. 305–319. <https://doi.org/10.1109/TMI.2002.1000255>

Статья поступила в редакцию 13.07.2021; одобрена после рецензирования 27.09.2021; принята к публикации 25.10.2021.
The article was submitted 13.07.2021; approved after reviewing 27.09.2021; accepted for publication 25.10.2021.