

Анализ отношения средних квадратических отклонений ядерной оценки плотности вероятности в условиях независимых и зависимых случайных величин

Александр Васильевич Лапко¹, Василий Александрович Лапко²

^{1, 2} Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Красноярск, Россия

^{1, 2} Сибирский государственный университет науки и технологий им. академика М. Ф. Решетнёва, Красноярск, Россия

¹lapko@icm.krasn.ru, ²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>

Аннотация. Определено влияние информации о зависимости случайных величин на аппроксимационные свойства непараметрической оценки плотности вероятности типа Розенблатта-Парзена. Получено отношение асимптотических выражений средних квадратических отклонений независимых и зависимых случайных величин. Это отношение для двумерных случайных величин рассмотрено как количественная оценка влияния информации об их зависимости на аппроксимационные свойства ядерной оценки плотности вероятности. Установленное отношение определяется видом плотности вероятности и объёмами исходных статистических данных, которые используются при оценивании плотностей вероятностей зависимых и независимых случайных величин. Полученные общие результаты подробно рассмотрены применительно к двумерным линейно зависимым случайным величинам с нормальными законами распределения. Определена функциональная зависимость отношения средних квадратических отклонений независимых и зависимых двумерных случайных величин от коэффициента корреляции и проанализирована зависимость этого отношения от объёмов статистических данных. Разработана методика оценивания функционала от вторых производных двумерных случайных величин с нормальными законами распределения. Полученные результаты являются основой создания модификаций «быстрых» процедур оптимизации ядерных оценок плотностей вероятностей в условиях больших выборок.

Ключевые слова: ядерная оценка плотности вероятности, зависимые случайные величины, независимые случайные величины, двумерная случайная величина, аппроксимационные свойства, непараметрическая оценка типа Розенблатта-Парзена, количественная оценка зависимости случайных величин, нормальный закон распределения

Для цитирования: Лапко А. В., Лапко В. А. Анализ отношения средних квадратических отклонений ядерной оценки плотности вероятности в условиях независимых и зависимых случайных величин // Измерительная техника. 2021. № 3. С. 9–14. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-3-9-14>

Analysis of the ratio of the mean square deviations of the kernel probability density estimation in the conditions of independent and dependent random variables

Aleksandr V. Lapko¹, Vasily A. Lapko²

^{1, 2} Institute of Computational Modeling, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences (ICM SB RAS), Krasnoyarsk, Russia

^{1, 2} Reshetnev Siberian State University of Science and Technology, Krasnoyarsk, Russia

¹lapko@icm.krasn.ru, ²valapko@yandex.ru, <http://orcid.org/0000-0001-6938-9323>

Abstract. The influence on the approximation properties of a nonparametric probability density estimate of Rosenblatt-Parzen type of the information on the dependence of random variables is determined. The ratio of the asymptotic expressions of the mean square deviations of independent and dependent random variables is obtained. This relation for a two-dimensional random variable is considered as a quantitative assessment of the influence of information about their dependence on the approximation properties of the kernel probability density estimate. The established ratio is determined by the kind of probability density and the volumes of the initial statistical data that are used in estimating the probability densities of dependent and independent random variables. The general results obtained are considered in detail for two-dimensional linearly dependent random variables with normal distribution laws. The functional dependence of the ratio of the mean square deviations of the independent and dependent two-dimensional random variables on the correlation coefficient is determined. The dependence of the considered ratio on the volume of statistical data is analyzed. A method for estimating the functional of the second derivatives of two-dimensional random variables with normal distribution laws is developed. The results obtained are the basis for the development of modifications of “fast” procedures for optimizing kernel estimates of probability densities in conditions of large samples.

Keywords: kernel probability density estimation, dependent and independent random variables, two-dimensional random variable, approximation properties, nonparametric Rosenblatt-Parzen type estimate, quantitative estimation of the dependence of random variables, normal distribution law

Введение. Теоретическую основу разработки вероятностных алгоритмов обработки информации в условиях априорной неопределённости составляют методы оценивания плотностей вероятностей случайных величин. Для этого широко используется непараметрическая оценка плотности вероятности типа Розенблатта-Парзена [1–10]. На её основе создан ряд модификаций восстановления плотностей вероятностей для условий больших и малых объёмов статистических данных [11, 12]. Значимость полученных результатов заключается в возможности формирования алгоритмов обработки информации, адаптируемых к условиям исследования объектов различной природы [13–22].

Одно из перспективных направлений синтеза подобных алгоритмов – учёт априорных сведений о зависимости случайных величин, в пространстве которых принимается решение. Результаты исследования значимости влияния информации о независимости одномерных случайных величин при синтезе непараметрической оценки их плотности вероятности представлены в работе [23]. При этом установлены условия асимптотической несмещённости и состоятельности произведения непараметрических оценок плотностей вероятностей. На этой основе обоснована возможность существенного повышения аппроксимационных свойств непараметрических оценок плотностей вероятностей. Полученные результаты обобщены на многомерные случаи [24]. Априорные сведения о независимости случайных величин повышают эффективность оценивания плотностей вероятностей, что особо проявляется при больших размерностях. Эти результаты являются общими, так как основаны на сравнении порядков сходимости показателей эффективности непараметрических оценок плотностей вероятностей.

Цель настоящей работы – определение и анализ отношения асимптотических выражений средних квадратических отклонений ядерной оценки плотности вероятности для линейно зависимых двухмерных случайных величин.

Ядерная оценка многомерной плотности вероятности и её свойства. Многомерная непараметрическая оценка плотности вероятности $p(x_1, \dots, x_k)$ типа Розенблатта-Парзена, восстанавливаемая по выборке статистически независимых наблюдений случайных величин $(x_1^i, \dots, x_k^i, i = \overline{1, n})$ объёмом n , имеет вид

$$\bar{p}(x_1, \dots, x_k) = \left(n \prod_{v=1}^k c_v \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \prod_{v=1}^k \Phi \left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v} \right). \quad (1)$$

Ядерные функции $\Phi(u_v)$ в статистике (1) удовлетворяют условиям

$$\Phi(u_v) = \Phi(-u_v); \quad 0 \leq \Phi(u_v) < \infty;$$

$$\int \Phi(u_v) du_v = 1; \quad \int u_v^2 \Phi(u_v) du_v = 1;$$

$$\int u_v^m \Phi(u_v) du_v < \infty; \quad 0 \leq m < \infty; \quad v = \overline{1, k}.$$

Здесь и далее бесконечные пределы интегрирования опускаем. С ростом длины интервалов Δ_v изменений значений случайных величин x_v увеличиваются значения $c_v, v = \overline{1, k}$. Поэтому считаем, что $c_v(n) = c(n)\sigma_v$, где σ_v – средние квадратические отклонения (СКО) случайных величин $x_v, v = \overline{1, k}$.

Тогда ядерную оценку плотности вероятности (1) запишем в виде

$$\bar{p}(x_1, \dots, x_k) = \left(n \prod_{v=1}^k c_v \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \prod_{v=1}^k \Phi \left(\frac{x_v - x_v^i}{c_v} \right). \quad (2)$$

Последовательности коэффициентов размытости ядерных функций $c_v(n) = c(n)\sigma_v \rightarrow 0$, а значения $n \prod_{v=1}^k c_v(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Асимптотические свойства СКО $\bar{p}(x_1, \dots, x_k)$ при использовании технологии доказательства [8] рассмотрены в работах [23, 24].

Определим асимптотическое выражение СКО $\bar{p}(x_1, \dots, x_k)$ от восстанавливаемой плотности вероятности $p(x_1, \dots, x_k)$:

$$W(c) = M \int \dots \int [\bar{p}(x_1, \dots, x_k) - p(x_1, \dots, x_k)]^2 dx_1 \dots dx_k \sim \\ \sim (nc^k)^{-1} \prod_{v=1}^k (\sigma_v^{-1} \|\Phi(u_v)\|^2) + \frac{c^4}{4} B, \quad (3)$$

где M – знак математического ожидания; $p_v^{(2)}(x_1, \dots, x_k)$ – вторая производная функции $p(x_1, \dots, x_k)$ по компоненте x_v ;

$$B = \int \dots \int \left(\sum_{v=1}^k \sigma_v^2 p_v^{(2)}(x_1, \dots, x_k) \right)^2 dx_1 \dots dx_k;$$

$$\|\Phi(u_v)\|^2 = \int \Phi^2(u_v) du_v.$$

Оптимальное значение параметра c с коэффициентов размытости ядерных функций $c_v, v = \overline{1, k}$ непараметрической оценки плотности вероятности (2) определяется из условия минимума критерия $W(c)$ (3):

$$c^* = \left[k (\|\Phi(u)\|^2)^k / \left(n B \prod_{v=1}^k \sigma_v \right) \right]^{1/(k+4)} \quad (4)$$

при условии, что вид ядерных функций $\Phi(u_v) = \Phi(u), v = \overline{1, k}$.

Подставив значения c^* в выражение (3), получим минимальное СКО $\bar{p}(x_1, \dots, x_k)$ от $p(x_1, \dots, x_k)$:

$$\bar{W}_k = \frac{4+k}{4k^{k/(k+4)}} \left[\left(\|\Phi(u)\|^2 \right)^k / \left(n \prod_{v=1}^k \sigma_v \right) \right]^4 B^k \Bigg]^{1/(k+4)}. \quad (5)$$

Для одномерного случая при $k=1$ полученный результат (5) соответствует СКО $\bar{p}(x)$ от $p(x)$, полученному в работе [23].

Асимптотические выражения СКО $\bar{p}(x_1, x_2)$ и $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$. Значение СКО ядерной оценки плотности вероятности для двумерной случайной величины в соответствии с критерием (5) при $k=2$ представим в виде

$$\bar{W}_2 = \frac{3}{2^{4/3}} \left\{ \left[\left(\|\Phi(u)\|^2 \right)^2 / (n\sigma_1\sigma_2) \right]^4 B^2 \right\}^{1/6}. \quad (6)$$

Определим СКО непараметрической оценки плотности вероятности при условии независимости случайных величин x_1, x_2 . Нетрудно заметить, что поставленная задача сводится к вычислению функционала B в выражении (6). Для независимых случайных величин x_1, x_2 основные составляющие B определяются выражениями

$$p_1^{(2)}(x_1, x_2) = p^{(2)}(x_1)p(x_2);$$

$$p_2^{(2)}(x_1, x_2) = p(x_1)p^{(2)}(x_2),$$

где $p^{(2)}(x_v)$ – вторые производные функции $p(x_v)$ по компоненте $x_v, v=1,2$.

Тогда функционал B для независимых случайных величин запишем в виде

$$\bar{B} = \iint \left(\sigma_1^2 p^{(2)}(x_1)p(x_2) + \sigma_2^2 p(x_1)p^{(2)}(x_2) \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Предположим, что в общем случае объёмы статистических данных при оценивании плотностей вероятностей $p(x_1, x_2)$ и $p(x_1)p(x_2)$ отличаются. Обозначим через $\bar{n}, n$ объёмы исходных данных, используемых при восстановлении плотностей вероятностей $p(x_1)p(x_2)$ и $p(x_1, x_2)$ соответственно. Тогда запишем асимптотическое выражение СКО независимых случайных величин x_1, x_2 как

$$\bar{W}_2 = \frac{3}{2^{4/3}} \left[\left(\left(\|\Phi(u)\|^2 \right)^2 / (\bar{n}\sigma_1\sigma_2) \right)^4 \bar{B}^2 \right]^{1/6}. \quad (7)$$

Анализ аппроксимационных свойств ядерной оценки плотности вероятности для независимых и зависимых случайных величин. Вычислим R – отношение СКО $\bar{p}(x_1, x_2), \bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2)$ для независимых и зависимых двумерных случайных величин с учётом выражений (6), (7):

$$R = \frac{\bar{W}_2}{W_2} = \left[\frac{\bar{B}}{B} \left(\frac{n}{\bar{n}} \right)^2 \right]^{1/3}. \quad (8)$$

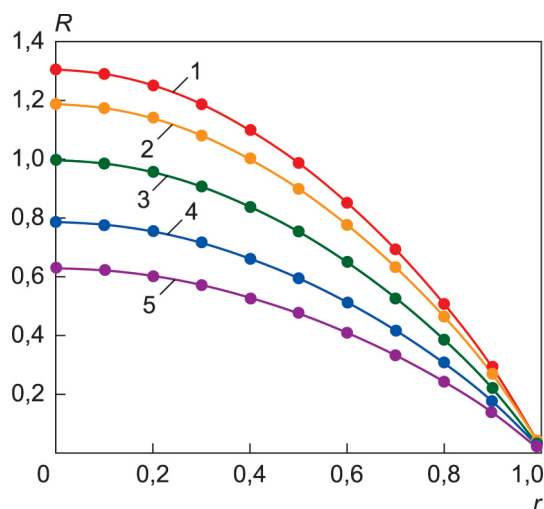
Рассмотрим частный случай, когда случайные величины x_1, x_2 являются линейно зависимыми. Считаем, что x_1, x_2 имеют нормальные законы распределения с параметрами СКО σ_1, σ_2 и коэффициентом корреляции r . Результаты вычислительных экспериментов для условий $r \in [0; 1]$ приведены на рисунке. Для независимых случайных величин при $r=0$ и $n=\bar{n}$ отношение $R=1$, что подтверждает корректность выполненных преобразований. При $n=\bar{n}$ с увеличением коэффициента корреляции r , определяющего линейную функциональную зависимость между x_1 и x_2 , значения R уменьшаются в соответствии с полиномом

$$\bar{R} = -0,1944r^3 - 0,7041r^2 - 0,0852r + 1. \quad (9)$$

Средняя относительная ошибка аппроксимации модели (9) зависимости R от r

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{|R^j - \bar{R}^j|}{R^j}$$

определяется значениями 0,01 и 0,02 соответственно для $r \in [0; 0,9]$ и $r \in [0; 0,99]$. Здесь количество N наблюдений соответствует данным таблицы. Для интервала значений $r \in [0; 0,9]$ количество наблюдений $N=9$.



Зависимость отношения R СКО плотностей вероятностей $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2), \bar{p}(x_1, x_2)$ от неотрицательного коэффициента корреляции r случайных величин x_1, x_2 при параметре $q=1.5; 1.3; 1; 0.7; 0.5$ (кривые 1–5 соответственно); точки характеризуют результаты вычислительных экспериментов

Dependence of the ratio R of the standard deviations of the probability densities $\bar{p}(x_1)\bar{p}(x_2), \bar{p}(x_1, x_2)$, on the non-negative correlation coefficient r of the random variables x_1, x_2 with the parameter $q=1.5; 1.3; 1; 0.7; 0.5$ (curves 1–5 respectively); points characterize the results of computational experiments

Зависимости значений отношения R , $B(\sigma_1; \sigma_2)$ от коэффициента корреляции r при $n = \bar{n}$

r	R	$B(0,5; 0,5)$	$B(1; 1)$	$B(2; 2)$	$B(1; 3)$
0	1,000	0,637	0,159	0,04	0,053
0,1	0,990	0,656	0,164	0,041	0,055
0,2	0,960	0,719	0,180	0,045	0,060
0,3	0,911	0,842	0,211	0,053	0,070
0,4	0,843	1,063	0,266	0,066	0,089
0,5	0,757	1,470	0,368	0,092	0,123
0,6	0,652	2,293	0,573	0,143	0,191
0,7	0,530	4,267	1,067	0,267	0,356
0,8	0,389	10,807	2,702	0,675	0,901
0,9	0,224	56,842	14,211	3,553	4,737

Значения $\bar{B}(\sigma_1; \sigma_2)$ для независимых случайных величин x_1, x_2 при различных вариантах σ_1, σ_2 являются постоянными:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}(0,5; 0,5) &= 0,637; \\ \bar{B}(1; 1) &= 0,159; \\ \bar{B}(2; 2) &= 0,04; \\ \bar{B}(1; 3) &= 0,53. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Наблюдаемую тенденцию уменьшения значения R с ростом коэффициента r можно объяснить снижением аппроксимационных свойств непараметрической оценки плотности вероятности $\bar{p}(x_1, x_2)$ при увеличении линейной зависимости между случайными величинами x_1, x_2 . В этих условиях значения $\bar{B}$ в формуле (7) являются константой, так как не зависят от r и параметров σ_1, σ_2 нормальных законов распределения, а значения B увеличиваются. Данное утверждение подтверждается анализом формулы (4). Одна из основных составляющих (4) определяется значением функционала B от вторых производных восстанавливаемой плотности вероятности и СКО случайных величин.

Если объёмы $\bar{n}, n$ исходных статистических данных при восстановлении плотностей вероятностей $p(x_1)p(x_2), p(x_1, x_2)$ отличаются, то сохраняется обнаруженная тенденция зависимости R от коэффициента корреляции r , однако нарушается основное условие $R=1$ при $r=0$. Например, в условиях $r=0$: при $q=n/\bar{n}=1,5$ значение $R=1,31$; при $q=1,3$ значение $R=1,191$; при $q=0,7$ значение $R=0,788$; при $q=0,5$ значение $R=0,63$ (см. рисунок). Поэтому представленные результаты исследований обосновано могут быть использованы при $n=\bar{n}$.

Если в модели (9) принять $r=|r|$, то области её определения распространяется на интервал $r \in [-1; 1]$.

Анализ результатов вычислительных экспериментов для нормальных законов распределения двумерных линейно зависимых случайных величин позволил обнаружить закономерность, которая позволяет оценивать значения функционала B по исходным статистическим данным и модели (9). Преобразуем выражение (8) при $n=\bar{n}$ как

$$B = \bar{B}/R^3,$$

где отношение R определим с использованием модели (9). По результатам вычислительных экспериментов установлена возможность оценивания значений B по выражению

$$\tilde{B} = 0,159 / (\sigma_1 \sigma_2 \bar{R}^3). \quad (11)$$

Число 0,159 соответствует значению $\bar{B}$ при $n=\bar{n}, \sigma_1=\sigma_2=1$. Данный результат можно проверить с использованием таблицы и выражения (10).

Рассмотрим пример оценивания функционала B с использованием модели (11) при $\sigma_1=1; \sigma_2=3$ и $r=0,6$. В этих условиях с учётом моделей (9), (11) значение $\tilde{B}=0,19$. Сравним значение $\tilde{B}$ с результатами вычислительного эксперимента (см. таблицу). На пересечении строки при $r=0,6$ и столбца $B(1; 3)$ значение $B=0,191$, т. е. $\tilde{B} \approx B$. В других условиях средние относительные ошибки оценивания B не превышают значение 0,01 для $r \in [0; 0,9]$.

Полученные результаты являются основой разработки новых модификаций «быстрых» алгоритмов оптимизации непараметрических оценок плотностей вероятностей по коэффициентам размытости ядерных функций [25–34].

Заключение. Отношение СКО непараметрических оценок плотностей вероятностей случайных величин является количественным критерием их зависимости. При формировании отношения используются результаты исследования асимптотических свойств плотностей вероятностей независимых и зависимых случайных величин. Для двумерных случайных величин отношение СКО независимых и зависимых случайных величин определяется в основном видом плотности вероятности, их вторых производных и объёмом исходных статистических данных. Рассматриваемое отношение в меньшей степени зависит от вида ядерной функции непараметрической оценки плотности вероятности.

Для двумерных нормальных законов распределения отношение СКО независимых и линейно зависимых случайных величин равно единице, если объёмы статистических данных $\bar{n}, n$ равны. В противном случае, это отношение не выполняется. С ростом коэффициента корреляции наблюдается уменьшение указанного отношения СКО.

Полученные результаты можно обобщить на многомерный случай и на их основе синтезировать «быстрые» процедуры оптимизации непараметрических алгоритмов обработки информации при больших объёмах статистических данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки в рамках научного проекта № 20-41-240001.

Список литературы

1. Parzen E., *Annals of Mathematical Statistics*, 1962, vol. 33, no. 3, pp. 1065–1076. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704472>
2. Rosenblatt M., *Annals of Mathematical Statistics*, 1971, vol. 42, no. 6, pp. 1815–1842. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693050>

3. Rudemo M., *Scandinavian Journal of Statistics*, 1982, vol. 9, no. 2, pp. 65–78.
4. Hall P., *Annals of Statistics*, 1983, vol. 11, no. 4, pp. 1156–1174.
5. Bowman A. W., *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1985, vol. 21, pp. 313–327.
<https://doi.org/10.1080/00949658508810822>
6. Li Q., Racine J. S., *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*, Princeton, Princeton University Press, 2007, 768 p.
7. Dutta S., *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 2016, vol. 45, no. 2, pp. 472–490.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2013.862275>
8. Епанечников В. А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и её применения. 1969. Т. 14. № 1. С. 156–161.
9. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотностей (L1 – подход): Пер. с англ. Б. А. Цыбакова / Под ред. М. Б. Малютва. М.: Мир, 1988. 407 с.
10. Мания Г. М. Статистическое оценивание распределения вероятностей. Тбилиси: Тбилисский государственный университет, 1974. 238 с.
11. Лапко А. В., Лапко В. А. Непараметрическая оценка плотности вероятности парзеновского типа с неявно заданной формой ядерной функции // Измерительная техника. 2016. № 6. С. 14–17.
12. Лапко А. В., Лапко В. А. Регрессионная оценка многомерной плотности вероятности и её свойства // Автометрия. 2014. Т. 50. № 2. С. 50–56.
13. Лапко А. В., Лапко В. А. Непараметрические алгоритмы оценивания состояний природных объектов // Автометрия. 2018. Т. 54. № 5. С. 33–39. <https://doi.org/10.15372/AUT20180504>
14. Лапко А. В., Лапко В. А., Им С. Т., Тубольцев В. П., Авдеенок В. А. Непараметрический алгоритм выделения классов, соответствующих одномерным фрагментам плотности вероятности многомерных случайных величин // Автометрия. 2019. Т. 55. № 3. С. 22–30. <https://doi.org/10.15372/AUT20190303>
15. Лапко А. В., Лапко В. А. Методика проверки гипотез о распределениях многомерных спектральных данных с использованием непараметрического алгоритма распознавания образов // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 2. С. 238–244. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-2-238-244>
16. Борзов С. М., Потатуркин О. И. Выбор информативной системы признаков при классификации сельскохозяйственных культур по гиперспектральным данным // Автометрия. 2020. Т. 56. № 4. С. 134–144. <https://doi.org/10.15372/AUT20200414>
17. Борзов С. М., Потатуркин О. И. Повышение эффективности классификации гиперспектральных изображений за счет разномасштабной пространственной обработки // Компьютерная оптика. 2020. Т. 44. № 6. С. 937–943. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-779>
18. Борзов С. М., Гурьянов М. А., Потатуркин О. И. Исследование эффективности классификации трудноразличимых типов растительности по гиперспектральным изображениям // Компьютерная оптика. 2019. Т. 43. № 3. С. 464–473. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-3-464-473>
19. Гашиков М. В. Адаптивная интерполяция на основе оптимизации решающего правила в многомерном признаковом пространстве // Компьютерная оптика. 2020. Т. 44. № 1. С. 101–108. <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-661>
20. Kharuk V. I., Im S. T., Dvinskaya M. L., Ranson K. J., Petrov I. A., *Journal of Mountain Science*, 2017, vol. 14, no. 3, pp. 442–452. <https://doi.org/10.1007/s11629-016-4286-7>
21. Kharuk V. I., Im S. T., Petrov I. A., Dvinskaya M. L., Fedotova E. V., Ranson K. J., *Regional Environmental Change*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 803–812.
<https://doi.org/10.1007/s10113-016-1073-5>
22. Зеньков И. В., Нефедов Б. Н., Анищенко Ю. А., Гильц Н. Е., Стукова О. О., Вокин В. Н., Кирюшина Е. В., Скорнякова С. Н. Информационное обеспечение дистанционного мониторинга экологии нарушенных земель угольными разрезами на Южном Урале // Уголь. 2020. № 9. С. 72–75. <https://doi.org/10.18796/0041-5790-2020-9-72-75>
23. Лапко А. В., Лапко В. А. Непараметрическая оценка плотности вероятности независимых случайных величин // Информатика и системы управления. 2011. Т. 29. № 3. С. 118–124.
24. Лапко А. В., Лапко В. А. Свойства непараметрической оценки многомерной плотности вероятности независимых случайных величин // Информатика и системы управления. 2012. Т. 31. № 1. С. 166–174.
25. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman & Hall, 1986, 175 p.
26. Sheather S., Jones M., *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 1991, vol. 53, no. 3, pp. 683–690.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1991.tb01857.x>
27. Sheather S. J., *Statistical Science*, 2004, vol. 19, no. 4, pp. 588–597. <https://doi.org/10.1214/088342304000000297>
28. Terrell G. R., Scott D. W., *Journal of the American Statistical Association*, 1985, vol. 80, pp. 209–214.
29. Jones M. C., Marron J. S., Sheather S. J., *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, pp. 401–407.
30. Scott D. W. *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New Jersey, John Wiley & Sons, 2015. 384 p.
31. Лапко А. В., Лапко В. А. Быстрый алгоритм выбора коэффициентов размытости ядерных функций в непараметрической оценке плотности вероятности // Измерительная техника. 2018. № 6. С. 16–20. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it-2018-6-16-20>
32. Лапко А. В., Лапко В. А. Быстрый алгоритм выбора коэффициентов размытости в многомерных ядерных оценках плотности вероятности // Измерительная техника. 2018. № 10. С. 19–23. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-10-19-23>
33. Лапко А. В., Лапко В. А. Выбор коэффициента размытости ядерных оценок плотности вероятности в условиях больших выборок // Измерительная техника. 2019. № 5. С. 3–6. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-5-3-6>
34. Лапко А. В., Лапко В. А. Оценивание интеграла от квадрата производных симметричных плотностей вероятностей одномерных случайных величин // Метрология. 2020. № 1. С. 15–27. <https://doi.org/10.32446/0132-4713.2020-1-15-27>

References

1. Parzen E., *Annals of Mathematical Statistics*, 1962, vol. 33, no. 3, pp. 1065–1076. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177704472>

2. Rosenblatt M., *Annals of Mathematical Statistics*, 1971, vol. 42, no. 6, pp. 1815–1842. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177693050>
3. Rudemo M., *Scandinavian Journal of Statistics*, 1982, vol. 9, no. 2, pp. 65–78.
4. Hall P., *Annals of Statistics*, 1983, vol. 11, no. 4, pp. 1156–1174.
5. Bowman A. W., *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1985, vol. 21, pp. 313–327.
<https://doi.org/10.1080/00949658508810822>
6. Li Q., Racine J. S., *Nonparametric Econometrics: Theory and Practice*, Princeton, Princeton University Press, 2007, 768 p.
7. Dutta S., *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 2016, vol. 45, no. 2, pp. 472–490.
<https://doi.org/10.1080/03610918.2013.862275>
8. Epanechnikov V. A., *Theory of Probability & Its Applications*, vol. 14, iss. 1, 1969, pp. 153–158.
<https://doi.org/10.1137/1114019>
9. Devroye L., Györfi L. *Nonparametric Density Estimation: The L1 View*, New York, Wiley, 1985, 380 p.
10. Mania G. M. *Statisticheskoe ocenivanie raspredeleniya veroyatnostej*, Tbilisi, Tbilisskij gosudarstvennyj universitet Publ., 1974, 238 p. (in Russ.).
11. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2016, vol. 59, no. 6, pp. 571–576.
<https://doi.org/10.1007/s11018-016-1010-5>
12. Lapko A. V., Lapko V. A., *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2014, vol. 50, no. 2, pp. 148–153.
13. Lapko A. V., Lapko V. A., *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 451–456.
<https://doi.org/10.3103/S8756699018050047>
14. Lapko A. V., Lapko V. A., Im S. T., Tuboltsev V. P., Avdeenok V. A., *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 230–236.
<https://doi.org/10.3103/S8756699019030038>
15. Lapko A. V., Lapko V. A., *Computer Optics*, 2019, vol. 43, no. 2, pp. 238–244 (in Russ.).
<https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-2-238-244>
16. Borzov S. M., Potaturkin O. I., *Optoelectronics Instrumentation and Data Processing*, 2020, vol. 56, no. 4, pp. 431–439.
<https://doi.org/10.3103/S8756699020040032>
17. Borzov S. M., Potaturkin O. I., *Computer Optics*, 2020; vol. 44, no. 6, pp. 937–943 (in Russ.).
<https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-779>
18. Borzov S. M., Guryanov M. A., Potaturkin O. I., *Computer Optics*, 2019, vol. 43, no. 3, pp. 464–473 (in Russ.).
<https://doi.org/10.18287/2412-6179-2019-43-3-464-473>
19. Gashnikov M. V., *Computer Optics*, 2020, vol. 44, no. 1, pp. 101–108 (in Russ.). <https://doi.org/10.18287/2412-6179-CO-661>
20. Kharuk V. I., Im S. T., Dvinskaya M. L., Ranson K. J., Petrov I. A., *Journal of Mountain Science*, 2017, vol. 14, no. 3, pp. 442–452. <https://doi.org/10.1007/s11629-016-4286-7>
21. Kharuk V. I., Im S. T., Petrov I. A., Dvinskaya M. L., Fedotova E. V., Ranson K. J., *Regional Environmental Change*, 2017, vol. 17, no. 3, pp. 803–812. <https://doi.org/10.1007/s10113-016-1073-5>
22. Zenkov I. V., Nefedov B. N., Anishenko Yu. A., Giltis N. E., Stukova O. O., Vokin V. N., Kiryushina E. V., Scornyakova S. N., *Ugol*, 2020, no. 9, pp. 72–75 (in Russ.).
<https://doi.org/10.18796/0041-5790-2020-9-72-75>
23. Lapko A. V., Lapko V. A., *Informatika i sistemy upravleniya*, 2011, vol. 29, no. 3, pp. 118–124 (in Russ.).
24. Lapko A. V., Lapko V. A., *Informatika i sistemy upravleniya*, 2012, vol. 31, no. 1, pp. 166–174 (in Russ.).
25. Silverman B. W., *Density estimation for statistics and data analysis*, London, Chapman & Hall, 1986, 175 p.
26. Sheather S., Jones M., *Journal of Royal Statistical Society Series B*, 1991, vol. 53, no. 3, pp. 683–690.
<https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1991.tb01857.x>
27. Sheather S. J., *Statistical Science*, 2004, vol. 19, no. 4, pp. 588–597. <https://doi.org/10.1214/088342304000000297>
28. Terrell G. R., Scott D. W., *Journal of the American Statistical Association*, 1985, vol. 80, pp. 209–214.
29. Jones M. C., Marron J. S., Sheather S. J., *Journal of the American Statistical Association*, 1996, vol. 91, pp. 401–407.
30. Scott D. W., *Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization*, New Jersey, John Wiley & Sons, 2015. 384 p.
31. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2018, vol. 61, no. 6, pp. 540–545.
<https://doi.org/10.1007/s11018-018-1463-9>
32. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 61, no. 10, pp. 979 – 986.
<https://doi.org/10.1007/s11018-019-01536-x>
33. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 62, no. 5, pp. 383–389. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01634-w>
34. Lapko A. V., Lapko V. A., *Measurement Techniques*, 2020, vol. 63, no. 3, pp. 171–176. <https://doi.org/10.1007/s11018-020-01768-2>

Статья поступила в редакцию 13.07.2020; принята к публикации 14.09.2020.