

## Методика измерений поляризационно-запутанных состояний бифотонов с помощью квантового томографа

Дмитрий Николаевич Фроловцев<sup>1</sup>, Сергей Александрович Магницкий<sup>2</sup>, Андрей Васильевич Дёмин<sup>3</sup>✉

<sup>1, 2</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

<sup>3</sup> Всероссийский научно-исследовательский институт оптико-физических измерений, Москва, Россия, [demin@vniiofi.ru](mailto:demin@vniiofi.ru)✉

<sup>1</sup>[frolovtsev@yandex.ru](mailto:frolovtsev@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1065-9936>

<sup>2</sup>[sergeymagnitskiy@gmail.com](mailto:sergeymagnitskiy@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-8700-2516>

**Аннотация.** Выполнен статистический анализ погрешностей томографических измерений поляризационно-запутанных состояний бифотонов, которые генерируются источниками на основе эффекта спонтанного параметрического рассеяния света. Детально проанализирован уровень квантовых флуктуаций в схеме совпадений, являющихся неустранимым источником погрешности томографических измерений. С помощью квантового томографа измерена матрица плотности квантового поляризационного состояния бифотонов в поляризационном состоянии Белла. Проведено сравнение инструментальных погрешностей с погрешностями, вызванными квантовыми флуктуациями. Показано, что нет никаких препятствий для создания томографического метрологического стенда, предназначенного для характеристики источников спонтанного параметрического рассеяния света, генерирующих поляризационно-запутанные бифотоны.

**Ключевые слова:** фотоника, квантовые оптические технологии, квантовая томография, спонтанное параметрическое рассеяние, метрология

**Для цитирования:** Фроловцев Д. Н., Магницкий С. А., Дёмин А. В. Методика измерения поляризационно-запутанных состояний бифотонов с помощью квантового томографа // Измерительная техника. 2021. № 10. С. 21–27. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-10-21-27>

## The measurement method of the polarization-entangled states of biphotons using a quantum tomograph

Dmitry N. Frolovtssev<sup>1</sup>, Sergey A. Magnitskiy<sup>2</sup>, Andrey V. Demin<sup>3</sup>✉

<sup>1, 2</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

<sup>3</sup> All Russia Research Institute of Optophysical Measurements, Moscow, Russia, [demin@vniiofi.ru](mailto:demin@vniiofi.ru)✉

<sup>1</sup>[frolovtsev@yandex.ru](mailto:frolovtsev@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1065-9936>

<sup>2</sup>[sergeymagnitskiy@gmail.com](mailto:sergeymagnitskiy@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-8700-2516>

**Abstract.** A statistical analysis of errors in tomographic measurements of polarization-entangled biphoton states generated by sources based on the effect of spontaneous parametric down-conversion is carried out. The level of quantum fluctuations in the coincidence scheme, which is an unavoidable source of error in tomographic measurements, is analyzed in detail. A quantum tomograph was used to measure the density matrix of the quantum polarization state of biphotons in the Bell polarization state. The errors caused by quantum fluctuations are compared with the instrumental errors. It is shown that there are no obstacles to creating a tomographic metrological stand intended for characterizing SPDC-sources generating polarization-entangled biphotons.

**Keywords:** photonics, quantum optical technologies, quantum tomography, spontaneous parametric down-conversion, metrology

**Введение.** Источники одиночных фотонов являются одним из базовых элементов современных квантовых оптических технологий. Для таких ключевых направлений квантовой информатики, как квантовые вычисления [1] и квантовая коммуникация [2], важную роль играют источники, которые генерируют коррелированные по времени фотонные пары (бифотоны), находящиеся в так называемом запутанном квантовом состоянии [3]. Квантовые состояния описываются вектором состояния  $|\Psi\rangle$ , который представляет собой

вектор в гильбертовом пространстве и описывает амплитуды вероятностей нахождения фотонов в соответствующих базисных состояниях. Двухчастичное состояние называется запутанным, если оно не может быть представлено в факторизованном виде, т. е. в виде произведения состояний подсистем  $|\Psi_{12}\rangle \neq |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle$ , где  $|\Psi_{12}\rangle$  – вектор состояния бифотона;  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$  – векторы состояний первого и второго фотонов; символ  $\otimes$  означает тензорное произведение. Это означает, что для измерения квантового состояния системы,

находящейся в запутанном квантовом состоянии, недостаточно измерить квантовое состояние всех составляющих её подсистем. Для измерения квантового состояния бифотонов, находящихся в запутанном поляризационном состоянии, недостаточно информации, полученной при измерениях квантового состояния каждого фотона по отдельности (например, с помощью измерения параметров Стокса). Такие состояния могут быть измерены методами квантовой томографии. Свойства запутанных состояний лежат в основе многих протоколов фотонных квантовых технологий [4]. В настоящее время квантовые технологии входят в промышленную стадию развития [5–10]. Для успешной реализации этих технологий необходимо располагать надёжными методиками характеристики квантовых состояний используемого излучения, т. е. оценки (измерения) значений элементов матрицы плотности измеряемого состояния излучения. На квантовые состояния фотонов, как и на состояния практически любой квантовой системы, может оказывать негативное влияние окружающая среда. Поэтому квантовые состояния фотонов необходимо характеризовать не только после их приготовления источником, но и после корректировки искажений, вызванных прохождением через передающий тракт.

Между интенсивным и малофотонным (квантовым) светом существует ряд принципиальных различий [11, 12], касающихся, например, квантовых флуктуаций излучения, а также требований приготовления достаточно большого ансамбля одинаковых «подсистем» для измерения. Поэтому нельзя ограничиваться использованием методик характеристики излучения традиционных источников интенсивного света и необходимо разрабатывать новые методики

характеризации квантовых состояний света, используемого в квантово-оптических устройствах. Свет, в частности, может генерироваться бифотонными источниками, которые основаны на эффекте спонтанного параметрического рассеяния света (СПР). При этом требуются новые подходы, направленные на приборную реализацию квантовых свойств света.

В последние годы методики характеристики состояний фотонов приобретают особое значение в связи с разработкой стандартов, регулирующих новую область квантовых технологий. К настоящему времени Европейским институтом телекоммуникационных стандартов (ETSI) выпущен ряд предварительных, имеющих рекомендательный статус, стандартов, в которых определены методы характеристики основных элементов квантово-оптических систем (см., например, ETSI GS QKD 012 V1.1.1 (2019-02) Quantum Key Distribution (QKD); Device and Communication Channel Parameters for QKD Deployment, ETSI, 2019: [сайт]. URL: [https://www.etsi.org/deliver/etsi\\_gs/QKD/001\\_099/011/01.01.01\\_60/gs\\_QKD011v010101p.pdf](https://www.etsi.org/deliver/etsi_gs/QKD/001_099/011/01.01.01_60/gs_QKD011v010101p.pdf); ETSI GS QKD 004 V2.1.1 (220-08) Quantum Key Distribution (QKD); Application Interface, ETSI, 2020: [сайт]. URL: [https://www.etsi.org/deliver/etsi\\_gs/QKD/001\\_099/004/02.01.01\\_60/gs\\_QKD004v020101p.pdf](https://www.etsi.org/deliver/etsi_gs/QKD/001_099/004/02.01.01_60/gs_QKD004v020101p.pdf)). Характеризация СПР-источников в указанных документах пока не затрагивается, однако актуальность разработки методов характеристики не вызывает сомнений: СПР-источники играют важную роль в современных квантовых оптических технологиях, обеспечивают генерацию жёстко коррелированных по импульсу и по времени фотонных пар, что является решающим преимуществом перед другими малофотонными источниками, так как позволяет использовать один из фотонов в качестве триггерного.

Цель работы – статистический анализ погрешностей при томографических измерениях поляризационно-запутанных состояний бифотонов, генерируемых СПР-источниками. Особое внимание уделено анализу погрешностей при определении количества коррелированных фотоотсчётов с помощью схемы совпадений, лежащей в основе методики томографических измерений.

**Томографические измерения квантовых поляризационных состояний бифотонов.** Схема тестируемого СПР-источника и квантового томографа КТ поляризационных состояний бифотонов приведена на рис 1. Источник собран по двухкристальной неколлинеарной схеме, предназначенной для генерации бифотонов в состоянии Бэлла

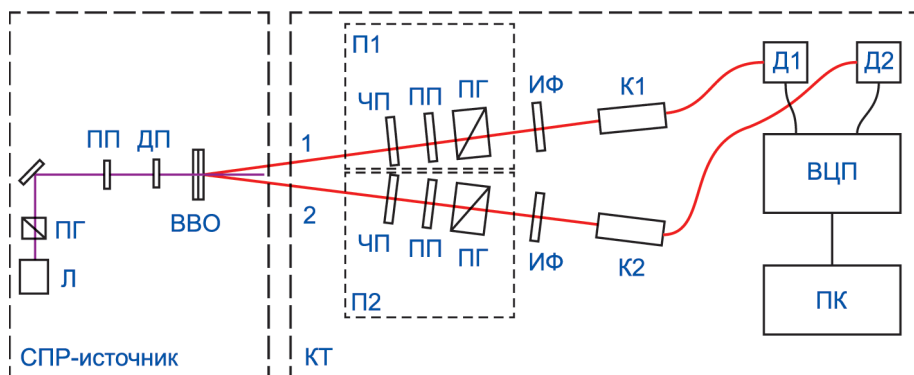


Рис. 1. Схема квантового томографа поляризационных состояний бифотонов: СПР-источник – источник на основе эффекта спонтанного параметрического рассеяния света; КТ – квантовый томограф; Л – лазер; ВВО – двойной нелинейный кристалл ВВО  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub>; П1, П2 – поляризационные проекторы; ПГ – призмы Глана; ИФ – интерференционные светофильтры; К1, К2 – коллиматоры; D1, D2 – детекторы одиночных фотонов; ВЦП – время-цифровой преобразователь idQuantique id800; ПК – персональный компьютер

Fig. 1. Schematic diagram of a quantum tomograph of polarization states of biphotons: SPDC source – the source based on the spontaneous parametric down-conversion; QT – quantum tomograph; L – laser; BBO – double nonlinear crystal BBO  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub>; P1, P2 – polarizing projectors; QWP – quarter-wave plates; HWP – half-wave plates; PG – Glan prisms; IF – interference filters; C1, C2 – collimators; D1, D2 – single photon detectors; TDC – idQuantique time-to-digital converter id800; PC – computer; HWP – half-wave plate; BP – birefringent plate

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HH\rangle + |VV\rangle),$$

где H обозначает горизонтальную поляризацию, а V – вертикальную [13–15]. Излучение лазера Л на длине волны 405 нм

проходит через призму Глана *ПГ*, полуволновую *ПП* и двулучепреломляющую *ДП* пластинки. Затем излучение накачки падает на двойной нелинейный кристалл  $\beta$ -BaB<sub>2</sub>O<sub>4</sub> *ВВО*. В источнике рождаются запутанные по поляризации фотонные пары с центральной длиной волны 810 нм, причём один из фотонов распространяется в пучке 1, а другой – в пучке 2, пучки пространственно разделены. Квантовый томограф [16] имеет два входа, в которые поступает излучение источника, образующее пучки 1, 2, собираемые коллиматорами *К1*, *К2*. Фотоны в каждом пучке последовательно проходят через четвертьволновую *ЧП* и полуволновую *ПП* пластинки, а также призму Глана *ПГ*. Эти три элемента образуют два идентичных поляризационных проектора *П1*, *П2*. Каждый проектор при различных положениях четверть- и полуволновых пластинок пропускает линейную  $|H\rangle$ ,  $|V\rangle$ ,  $|D\rangle = (|H\rangle + |V\rangle)/\sqrt{2}$  или циркулярную (правую  $|R\rangle = (|H\rangle + i|V\rangle)/\sqrt{2}$  или левую  $|L\rangle = (|H\rangle - i|V\rangle)/\sqrt{2}$ ) поляризацию. Погрешность установки волновых пластинок составляет 1°. Излучение перед сбором коллиматорами проходит через интерференционные светофильтры *ИФ* FBH810-10 (Thorlabs, США). Одиночные фотоны регистрируются детекторами *Д1*, *Д2* [17] российского производства (Лаборатория экспериментальной и теоретической квантовой оптики: [сайт]. URL: <https://labmsu.koddy.ru>) с квантовой эффективностью около 40 %. В детекторах используются фотодиоды SAP-500 (Laser Components, Германия), охлаждённые до температуры –20 °С. Джиттер фотодиодов менее 2 нс. Сигнал детекторов преобразуется с помощью время-цифрового преобразователя *ВЦП* id800 (idQuantique, Швейцария), а затем обрабатывается персональным компьютером *ПК*.

Томограф реализует протокол квантовой томографии, предложенный в [18]. Согласно указанному протоколу необходимо выполнить 16 квантовых измерений (таблица). В соответствии с описанной в [16] процедурой экспериментальные значения элементов матрицы плотности измеряемого состояния излучения источника получают следующим образом:

проекторы *П1*, *П2* устанавливаются так, чтобы они пропускали поляризацию, соответствующую *k*-му томографическому измерению;

в каждом положении проекторов с помощью время-цифрового преобразователя измеряют количество  $N_k$  одновременных фотоотсчётов в течение времени измерения *T*;

повторяют указанные выше процедуры для всех 16 томографических измерений.

Линейная реконструкция матрицы плотности квантового поляризационного состояния бифотонов вычисляется по экспериментальным данным согласно выражению [18]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N_H} \sum_{k=1}^{16} N_k \hat{M}_k, \quad (1)$$

где  $N_H = \sum_{k=1}^4 N_k$  – нормировочная постоянная, численно равная количеству одновременных фотоотсчётов с убранными проекторами *П1*, *П2*;  $\hat{M}_k$  – матрицы, описывающие вклад каждого  $N_k$  в  $\hat{\rho}$  при заданном наборе 16 томографических

измерений; явный вид матриц  $\hat{M}_k$  получен в [18], в [16] приведены те же матрицы с исправленными опечатками.

Оценочные значения элементов линейной реконструкции матрицы плотности поляризационно-запутанного состояния бифотонов тестируемого СПР-источника в соответствии с формулой (1) рассчитывали численно с помощью специально написанного на языке Python программного обеспечения квантового томографа [16]. Матрица плотности строилась в стандартном лабораторном базисе, в котором значения индексов 1–4 относятся к базисным векторам  $|HH\rangle$ ,  $|HV\rangle$ ,  $|VH\rangle$  и  $|VV\rangle$  соответственно.

**Анализ источников погрешностей измерений.** С экспериментальной точки зрения для получения элементов матрицы плотности (1) должно быть измерено лишь количество коррелированных фотоотсчётов  $N_k$ . Схема измерения  $N_k$  приведена на рис. 2. Методика измерения основана на схеме совпадений. Каждый фотон бифотонной пары после прохождения поляризационного фильтра поступает на счётчик одиночных фотонов *СОФ1* или *СОФ2*, с выхода которых импульсы фотоотсчётов поступают в схему совпадений, где с помощью время-цифрового преобразователя регистрируется время их появления. Результаты сводятся в таблицу (см. рис. 2).

Смысл схемы совпадений заключается в том, что при обработке результатов измерений учитываются только те результаты, при получении которых одновременно сработали оба счётчика, т. е. импульсы фотоотсчётов зарегистрированы в одно и то же время. При этом процедура измерений осуществляется следующим образом. Задаются измерительный интервал *T* (время, в течение которого происходит накопление фотоотсчётов) и временное окно  $\tau$ , при попадании в которое импульсы фотоотсчётов *СОФ1*, *СОФ2*

Результаты томографических измерений и оценка статистической  $\delta_k$  и инструментальной  $\Delta N_k$  погрешностей

| <i>k</i> | Состояние поляризации | $N_k$ | $\delta_k$ | $\Delta N_k$ |
|----------|-----------------------|-------|------------|--------------|
| 1        | $ HH\rangle$          | 2896  | 50         | 9            |
| 2        | $ HV\rangle$          | 15    | 4          | 12           |
| 3        | $ VV\rangle$          | 2423  | 50         | 13           |
| 4        | $ VH\rangle$          | 13    | 4          | 11           |
| 5        | $ RH\rangle$          | 1475  | 40         | 130          |
| 6        | $ RV\rangle$          | 1172  | 34         | 120          |
| 7        | $ DV\rangle$          | 1065  | 33         | 90           |
| 8        | $ DH\rangle$          | 1260  | 35         | 90           |
| 9        | $ DR\rangle$          | 534   | 23         | 80           |
| 10       | $ DD\rangle$          | 2241  | 50         | 80           |
| 11       | $ RD\rangle$          | 478   | 22         | 80           |
| 12       | $ HD\rangle$          | 1110  | 33         | 90           |
| 13       | $ VD\rangle$          | 1327  | 36         | 90           |
| 14       | $ VL\rangle$          | 1038  | 32         | 120          |
| 15       | $ HL\rangle$          | 1554  | 40         | 130          |
| 16       | $ RL\rangle$          | 2357  | 50         | 15           |

считаются совпадающими, т. е. инициированными фотонами одной фотонной пары. Все несовпадающие фотоотсчёты игнорируются. Таким образом, при обработке результатов измерения будут учтены только результаты, зарегистрированные в моменты времени  $t_1, t_4, t_7$  (см. рис. 2).

Такая методика позволяет радикально подавить как оптические, так и темновые шумы, естественным образом возникающие при измерениях на уровне счёта одиночных фотонов, а также устранить влияние одного из самых серьёзных недостатков режима счёта фотонов, связанного с неидеальностью счётчиков (их квантовые эффективности  $\eta < 1$ , т. е. при попадании коррелированной пары фотонов срабатывает только один счётчик – появляется один импульс фотоотсчёта).

**Статистические погрешности.** Статистические погрешности, связанные с квантовыми флуктуациями света, становятся значительными при однофотонном режиме. Инструментальные погрешности (например, систематические погрешности, обусловленные нестабильностью мощности лазера накачки и температуры в помещении, погрешности, связанные с темновыми и оптическими шумами в однофотонных детекторах или с неточностью установки поляризационных элементов и т. п.) можно уменьшить до необходимого уровня путём улучшения качества регистрирующей аппаратуры, в отличие от статистических погрешностей, обусловленных квантовыми флуктуациями. Кроме того, источники статистических погрешностей являются нетипичными для сложившейся метрологии классических источников света и, на взгляд авторов настоящей статьи, требуют специального описания.

В рассматриваемой схеме для накачки СПР-источника используется непрерывный лазер. Как следует из физического механизма СПР, времена появления фотонных пар на выходе такого источника будут случайными, а средняя

частота генерации – пропорциональна интенсивности накачки. При этом вероятность  $p$  появления фотонных пар (бифотонов) на выходе СПР в единицу времени будет постоянной, не зависящей от времени. Из теории случайных процессов следует, что статистика случайного процесса с вышеперечисленными условиями является пуассоновской, т. е. вероятность  $P_n$  появления  $n$  бифотонов в течение измерительного интервала  $T$  определяется как

$$P_n = e^{-\lambda} \lambda^n / n!,$$

где  $\lambda = pT$  – среднее количество фотонов в течение времени  $T$ .

При любом  $k$ -м томографическом измерении каждый фотон пары проходит через один из проекторов  $P1, P2$  и затем регистрируется детекторами одиночных фотонов  $D1, D2$  (см. рис. 1). При этом проекторы пропускают фотонные пары в состоянии  $|\psi_k\rangle = |\psi_k^1\rangle \otimes |\psi_k^2\rangle$ , где  $|\psi_k^{1,2}\rangle$  – квантовые состояния поляризации, пропускаемой первым и вторым проекторами соответственно. Таким образом, фотоны оказываются в факторизованном состоянии. При этом вероятность того, что оба фотона пары пройдут через поляризационные проекторы одновременно, равна  $p_k = \langle \psi_k | \hat{\rho} | \psi_k \rangle$ . Если оба фотона прошли через поляризационные проекторы, то они попадают на детекторы, при этом первый фотон регистрируется с эффективностью  $\eta_1$ , а второй – с  $\eta_2$ . В итоге, вероятность одновременной регистрации двух фотоотсчётов  $\zeta_k = p_k \eta_1 \eta_2$ . Согласно томографической процедуре только эти фотоотсчёты учитываются при вычислении элементов матрицы плотности. Все остальные исходы считаются неуспешными.

Поскольку фотоны после прохождения проекторов не запутаны, то процесс регистрации фотонной пары детекторами можно рассматривать как классическое испытание Бернулли. Успешным считается испытание, в котором будет зарегистрировано по одному фотоэлектрическому импульсу в обоих детекторах с вероятностью  $\zeta_k$ .

Найдём статистику совпадающих по времени фотоотсчётов при эффективности регистрации фотонной пары  $\zeta_k < 1$ . Процесс регистрации фотонной пары детекторами можно свести к стандартной классической задаче теории вероятностей [19]: имеется  $n$  фотонных пар, независимо падающих на детекторы, при этом с вероятностью  $\zeta_k$  оба детектора сработают. Требуется найти вероятность того, что после попадания на фотодетектор  $n$  бифотонов, будет зарегистрировано  $m$  срабатываний обоих детекторов. Такая условная вероятность определяется биномиальным распределением

$$Q(m|n) = C_n^m \zeta_k^m (1 - \zeta_k)^{n-m},$$

где  $C_n^m = n! / [(n-m)! m!]$  – биномиальный коэффициент.

Тогда безусловное распределение количества фотоотсчётов  $Q_m$ , зарегистрированных за время  $T$  будет определяться свёрткой распределения  $P_n$  с  $Q(m|n)$ :

$$Q_m = \sum_{n \geq m} C_n^m \zeta_k^m (1 - \zeta_k)^{n-m} P_n. \quad (2)$$



Рис. 2. Принцип работы схемы совпадений: СОФ1, СОФ2 – счётчики одиночных фотонов; остальные обозначения те же, что на рис. 1

Fig. 2. The principle of operation of the coincidence scheme: SPD1, SPD2 – single photon detectors; the other symbols are the same as in fig. 1

Измерительный интервал  $T$  входит в формулу (2) через вероятности  $P_n$ .

При ограниченной эффективности регистрации фотонов  $\eta < 1$  статистика фотоотсчётов при произвольном  $P_n$  не будет повторять статистику фотонов.

Вычислим относительную погрешность  $\delta = \sigma / \langle m \rangle$  определения среднего количества фотоотсчётов, обусловленную конечностью выборки. Для этого найдём среднее значение  $\langle m \rangle$  количества фотоотсчётов за время  $T$  и стандартное отклонение  $\sigma$  распределения фотоотсчётов, заданное формулой (2).

При биномиальном преобразовании распределения  $P_n$  факториальные моменты распределений  $Q_m$  и  $P_n$  связаны следующим образом [19, 20]:

$$\langle m^{(l)} \rangle = \zeta_k^l \langle n^{(l)} \rangle, \quad (3)$$

где  $\langle m^{(l)} \rangle = \langle m(m-1) \dots (m-l+1) \rangle$ ,  $\langle n^{(l)} \rangle$  – факториальные моменты  $l$ -го порядка распределений  $Q_m$ ,  $P_n$  соответственно.

Согласно формуле (3) справедливы равенства

$$\langle m \rangle = \zeta_k \langle n \rangle; \quad \sigma_m^2 = \zeta_k^2 \sigma_n^2 + \langle n \rangle (\zeta_k - \zeta_k^2).$$

Учитывая, что в рассматриваемой задаче распределение фотонов является пуассоновским, для которого  $\langle n \rangle = \lambda$ ;  $\sigma_n^2 = \lambda$ , окончательно получим

$$\sigma_m^2 = \zeta_k \lambda. \quad (4)$$

Соотношение (4) позволяет получить в явном виде выражение для относительной погрешности, связанной с квантовыми флуктуациями светового поля. При  $\langle m \rangle = \langle m^{(1)} \rangle$ ,  $\langle n \rangle = \lambda$  относительная погрешность определяется выражением

$$\delta = \frac{\sigma_m}{\langle m \rangle} = \frac{\sqrt{\zeta_k \lambda}}{\zeta_k \lambda} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_k \lambda}}.$$

С учётом равенств  $\lambda = pT$ ;  $\zeta_k = p_k \eta_1 \eta_2$  относительную погрешность количества совпадений запишем как

$$\delta = (p_k \eta_1 \eta_2 p T)^{-1/2}. \quad (5)$$

Таким образом, относительную погрешность количества совпадений, связанную с квантовыми флуктуациями светового поля, можно уменьшить до любого желаемого уровня за счёт увеличения времени  $T$ , поскольку все остальные величины в формуле (5) являются константами. В конкретном эксперименте вероятность  $p$  появления фотонной пары является константой, зависящей, в частности, от мощности накачки и эффективности нелинейного преобразования фотонов в процессе СПР. Эффективности детектирования  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  также являются константами, зависящими от квантовых выходов фотодиодов, эффективности заведения излучения в детекторы и параметров электронных схем счётчиков, а значение  $p_k$  определяется измеряемым квантовым поляризационным состоянием фотонных пар, а также номером томографического измерения.

С учётом равенства  $\eta_1 \eta_2 p p_k T = \langle N_k \rangle$  запишем формулу (5) в виде, используемом для обработки экспериментальных данных:

$$\delta_k = N_k^{-1/2},$$

где примерное равенство  $\langle N_k \rangle \approx N_k$  выполняется для рассматриваемых измерений, поскольку экспериментально измеренные значения количества совпадений  $N_k \gg 1$ . Значения  $N_k$ , полученные в серии томографических измерений, как и статистические погрешности  $\delta_k$ , приведены в таблице, откуда минимальная абсолютная статистическая погрешность  $\Delta_{rc} = N_k \delta_k = 3,6$ .

**Инструментальная погрешность.** Из всех источников инструментальной погрешности, которые существенно влияют на погрешность томографических измерений в рассматриваемой экспериментальной конфигурации, существенным является неточность установки волновых пластинок. Неточность установки пластинок приводит к тому, что в  $k$ -м измерении измеряется проекция на искажённое состояние поляризации, а не на состояние, заданное таблицей. Инструментальная погрешность (стандартное отклонение)  $\Delta N_k^{(wp)}$ , вызванная неточностью установки волновых пластинок проекторов, определяется выражением [18]:

$$\Delta N_k^{(wp)} = \sqrt{\sum_{s=1}^4 \sum_{\mu, \lambda=1}^{16} f_{k,\mu}^{(s)} f_{k,\lambda}^{(s)} N_{\mu} N_{\lambda}};$$

$$f_{v,\mu}^{(s)} = \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_s} \langle \Psi_v | \right\} \hat{M}_{\mu} \langle \Psi_v | + \langle \Psi_v | \hat{M}_{\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta_s} \langle \Psi_v | \right\},$$

где  $|\Psi_v\rangle = |\Psi_v(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)\rangle$  – квантовое состояние, пропускаемое проекторами в  $v$ -м измерении, при этом учтена зависимость этого состояния от углов  $\theta_s$  установки волновых пластинок; четверть- и полуволновые пластинки проекторов обозначены индексом  $s$ .

В выполненных экспериментах погрешность установки волновых пластинок составила  $\Delta \theta \approx 1^\circ$ . Значения инструментальной погрешности томографических измерений сопоставимы со значениями статистической погрешности (см. таблицу). Вклад остальных источников инструментальной погрешности, вызываемой оптическими и темновыми шумами фотодетекторов, несущественен. Действительно, количество случайных совпадений, вызванных шумами, можно оценить сверху как  $N_{rc} = R_1 R_2 \tau T$ , где  $R_{1,2}$  – скорости счёта первого и второго фотодетекторов. В рассматриваемом случае  $R_1 \approx R_2 \approx 1,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $\tau = 8 \text{ нс}$ ;  $T = 30 \text{ с}$ , откуда  $\langle N_{rc} \rangle \approx 0,54$ , что намного меньше как статистической погрешности, так и погрешности, связанной с неточностью установки пластинок. Джиттеры детекторов одиночных фотонов и время-цифрового преобразователя не влияют на точность измерений, так как попадание либо непопадание импульсов фотоотсчётов во временное окно определяет лишь то, будет или не будет учтено данное измерение в процессе постселекции. Это влияет лишь на объём выборки, а не на точность измерений. В описываемой установке

джиттер фотодиодов не превышает 2 нс (FWHM), точность измерения используемым время-цифровым преобразователем составляет 81 пс. Ширина временного окна  $\tau=8$  нс выбрана из тех соображений, что при данных параметрах используемой аппаратуры в результате постселекции будет отобрано не менее 90 % зарегистрированных парных фотоотсчётов.

**Результаты томографических измерений квантовых поляризационных состояний бифотонов, генерируемых СПР-источником.** Результаты томографических измерений поляризационно-запутанного состояния Бэлла, генерируемого тестируемым СПР-источником, приведены в таблице, где использованы стандартные квантово-механические обозначения, например запись  $|RH\rangle$  означает, что проекторы  $P1$ ,  $P2$  (см. рис. 1) пропускают правую и горизонтальную поляризацию соответственно.

На основе полученных экспериментальных данных по формуле (1) рассчитана линейная реконструкция матрицы плотности

$$\hat{\rho}_{\text{exp}} = \begin{pmatrix} 0,542 & -0,065-0,018i & -0,036+0,004i & 0,425-0,261i \\ -0,065+0,018i & 0,003 & 0,023-0,011i & -0,029+0,009i \\ -0,036-0,004i & 0,023+0,011i & 0,002 & 0,020+0,034i \\ 0,425+0,261i & -0,029-0,009i & 0,020-0,034i & 0,453 \end{pmatrix}.$$

Согласно анализу погрешностей параметры экспериментальных измерений подобраны таким образом, что существенными являются только два вида погрешности: статистическая погрешность, вызванная квантовыми флуктуациями и погрешность при установке угла волновых пластинок. Поэтому для расчёта погрешности элементов матрицы можно использовать алгоритм обработки томографических измерений, приведенный в работе [18], который учитывает именно эти два вида погрешности. Входными данными алгоритма являются экспериментальные значения  $N_k$  16 томографических измерений и погрешность  $\Delta_\theta$  установки угла  $\theta_s$ . Для приведённых экспериментальных данных погрешности в значениях элементов матрицы плотности, численно рассчитанные по вышеуказанному алгоритму, оказались равными

$$\delta\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 0,010 & 0,019+0,027i & 0,019+0,026i & 0,037+0,037i \\ 0,019+0,027i & 0,002 & 0,036+0,038i & 0,018+0,023i \\ 0,019+0,026i & 0,036+0,038i & 0,002 & 0,019+0,024i \\ 0,037+0,037i & 0,018+0,023i & 0,019+0,024i & 0,0095 \end{pmatrix},$$

где действительная (мнимая) часть некоторого элемента матрицы  $\delta\hat{\rho}$  означает погрешность действительной (мнимой) части соответствующего элемента матрицы плотности (например,  $\text{Re } \rho_{41}=0,425\pm 0,037$ ;  $\text{Im } \rho_{41}=0,261\pm 0,037$ ).

Сравним экспериментально полученную матрицу плотности состояния, генерируемого тестируемым источником с матрицей плотности  $\hat{\rho}_0$  эталонного состояния  $|\Phi^+\rangle$ , которое теоретически должен генерировать идеальный источник. Для состояния  $|\Phi^+\rangle$  матрица  $\hat{\rho}_0=|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|$  имеет вид

$$\hat{\rho}_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Визуальное сравнение матриц  $\hat{\rho}_{\text{exp}}$  и  $\hat{\rho}_0$  показывает, что измеряемое состояние слабо отличается от эталонного, так как угловые элементы матрицы  $\hat{\rho}_{\text{exp}}$  близки к 0,5, а остальные элементы – к нулю. Относительно большая мнимая часть элементов  $\rho_{14}$ ,  $\rho_{41}$  объясняется тем, что фаза этих комплексных чисел является фазой между векторами  $|HH\rangle$  и  $|VV\rangle$ , которая определяется эллиптичностью поляризации накачки, т. е. источник отъюстирован неточно.

Для практических целей, в частности, для создания томографического метрологического стенда, визуального сравнения состояний недостаточно. Нужен количественный критерий, например критерий степени совпадения (fidelity) [21], с помощью которого количественно определяется степень совпадения измеренного квантового состояния  $\hat{\rho}_{\text{exp}}$  и эталонного состояния (в рассмотренных экспериментах  $|\Phi^+\rangle$ ). Для этого вводится численный параметр  $F=[0, 1]$  (степень совпадения), вычисляемый по формуле

$$F = \langle \Phi^+ | \hat{\rho}_{\text{exp}} | \Phi^+ \rangle. \quad (6)$$

Здесь в матричном представлении  $|\Phi^+\rangle = 2^{-1/2}(1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ ;  $\langle\Phi^+| = 2^{-1/2}(1 \ 0 \ 0 \ 1)$ . В случае  $F=1$  сравниваемые состояния тождественны, в случае  $F=0$  – ортогональны. Для тестируемого источника согласно выражению (6)  $F=0,92\pm 0,04$ .

**Заключение.** Результаты детального анализа погрешностей томографических измерений при тестировании СПР-источников поляризационно-запутанных бифотонов показывают, что нет никаких препятствий для создания томографического метрологического стенда, предназначенного для характеристики СПР-источников, генерирующих поляризационно-запутанные бифотоны. Описанная в работе методика позволяет полностью автоматизировать данный стенд, который будет не только измерять квантовое состояние, но и вычислять погрешности всех измеряемых величин. Если к методике квантовой томографии состояний добавить критерий степени совпадения, то с использованием томографического метрологического стенда можно получить обобщённую количественную оценку близости реального, генерируемого СПР-источником, состояния к эталонному.

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность П. П. Гостеву за помощь в анализе факториальных моментов и профессору А. С. Чиркину за полезные обсуждения по вопросам статистической оптики.

#### Список источников

1. Kok P. et al., *Reviews of Modern Physics*, 2007, vol. 79, no. 1, p. 135. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.135>
2. Gisin N., Thew R., *Nature Photonics*, 2007, vol. 1, no. 3, p. 165. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2007.22>

## References

3. Kwiat P. G., Mattle K., Weinfurter H., Zeilinger A. et al., *Physical Review Letters*, 2005, vol. 75, p. 4337. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4337>
4. O'Brien J. L., Furusawa A., Vučković E., *Nature Photonics*, 2009, vol. 3, no. 12, p. 687. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.229>
5. Магницкий С. А., Фроловцев Д. Н., Агапов Д. П. и др. Метрология одиночных фотонов для квантовых информационных технологий // Измерительная техника. 2017. № 3. С. 24–29. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2017-3-24-29>
6. Sussman B. et al., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020503. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab029d>
7. Riedel M. et al., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020501. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab042d>
8. Monroe C., Raymer M. G., Taylor J., *Science*, 2019, vol. 364, no. 6439, pp. 440–442. <https://doi.org/10.1126/science.aax0578>
9. Yamamoto Y., Sasaki M., Takesue H., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020502. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab0077>
10. Raymer M. G., Monroe C., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020504. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab0441>
11. Клышко Д. Н. Фотоны и нелинейная оптика. М.: Наука, 1980. 254 с.
12. Клышко Д. Н. Когерентный распад фотонов в нелинейной среде // Письма в ЖЭТФ. 1967. Т. 6. № 1. С. 490–492.
13. Kwiat P. G., et al., *Physical Review A*, 1999, vol. 60, no. 2, R773. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.60.R773>
14. Magnitskiy S., Frolovtssev D., Firsov V. et al., *Journal of Russian Laser Research*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 618–629. <https://doi.org/10.1007/s10946-015-9540-x>
15. Frolovtssev D. N., Magnitskiy S. A., *Physics of Wave Phenomena*, 2017, vol. 25, no. 3, pp. 180–184. <https://doi.org/10.3103/S1541308X17030049>
16. Фроловцев Д. Н., Магницкий С. А., Дёмин А. В. Квантовый томограф для измерения и характеристики бифотонных источников // Измерительная техника. 2020. № 4. С. 20–26. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2020-4-20-26>
17. Гостев П. П., Агапов Д. П., Дёмин А. В. и др. Измерение квантовой эффективности счётчиков фотонов на базе лавинных фотодиодов методом спонтанного параметрического рассеяния с асимметричными по спектру каналами // Измерительная техника. 2018. № 12. С. 27–32. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2018-12-27-32>
18. James D. F. V et al., *Physical Review A*, 2001, vol. 64, no. 5, 052312. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.052312>
19. Гостев П. П., Магницкий С. А., Чиркин А. С. Обратная задача статистики фотоотсчётов. М.: Физический факультет МГУ, 2020.
20. Abate J. A., Kimble H. J., Mandel L., *Physical Review A*, 1976, vol. 14, no. 2, p. 788. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.14.788>
21. Jozsa R., *Journal of Modern Optics*, 1994, vol. 41, no. 12, pp. 2315–2323. <https://doi.org/10.1080/09500349414552171>
1. Kok P. et al., *Reviews of Modern Physics*, 2007, vol. 79, no. 1, p. 135. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.79.135>
2. Gisin N., Thew R., *Nature Photonics*, 2007, vol. 1, no. 3, p. 165. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2007.22>
3. Kwiat P. G., Mattle K., Weinfurter H., Zeilinger A. et al., *Physical Review Letters*, 2005, vol. 75, p. 4337. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.4337>
4. O'Brien J. L., Furusawa A., Vučković E., *Nature Photonics*, 2009, vol. 3, no. 12, p. 687. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2009.229>
5. Magnitskii S. A., Frolovtssev D. N., Agapov D. P. et al., *Measurement Techniques*, 2017, vol. 60, no. 3, pp. 235–241. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1179-2>
6. Sussman B. et al., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020503. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab029d>
7. Riedel M. et al., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020501. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab042d>
8. Monroe C., Raymer M. G., Taylor J., *Science*, 2019, vol. 364, no. 6439, pp. 440–442. <https://doi.org/10.1126/science.aax0578>
9. Yamamoto Y., Sasaki M., Takesue H., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020502. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab0077>
10. Raymer M. G., Monroe C., *Quantum Science and Technology*, 2019, vol. 4, no. 2, 020504. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/ab0441>
11. Klyshko D. N., *Photons nonlinear optics*, CRC Press, 1988, 438 p.
12. Klyshko D. N., Coherent photon decay in a nonlinear medium, *JETP Letters*, 1967, vol. 6, iss. 1, pp. 23–25.
13. Kwiat P. G., et al., *Physical Review A*, 1999, vol. 60, no. 2, R773. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.60.R773>
14. Magnitskiy S., Frolovtssev D., Firsov V. et al., *Journal of Russian Laser Research*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 618–629. <https://doi.org/10.1007/s10946-015-9540-x>
15. Frolovtssev D. N., Magnitskiy S. A., *Physics of Wave Phenomena*, 2017, vol. 25, no. 3, pp. 180–184. <https://doi.org/10.3103/S1541308X17030049>
16. Frolovtssev D. N., Magnitskiy S. A., Demin A. V., *Measurement Techniques*, 2020, vol. 63, no. 4, pp. 273–280. <https://doi.org/10.1007/s11018-020-01783-3>
17. Gostev P. P., Agapov D. P., Demin A. V. et al., *Measurement Techniques*, 2019, vol. 61, no. 12, pp. 1166–1173. <https://doi.org/10.1007/s11018-019-01565-6>
18. James D. F. V et al., *Physical Review A*, 2001, vol. 64, no. 5, 052312. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.64.052312>
19. Gostev P. P., Magnitskiy S. A., Chirkin A. S., *The inverse problem of photocount statistics*, Moscow, MGU Publ., 2020. (In Russ.)
20. Abate J. A., Kimble H. J., Mandel L., *Physical Review A*, 1976, vol. 14, no. 2, p. 788. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.14.788>
21. Jozsa R., *Journal of Modern Optics*, 1994, vol. 41, no. 12, pp. 2315–2323. <https://doi.org/10.1080/09500349414552171>

Статья поступила в редакцию 06.04.2021; одобрена после рецензирования 14.07.2021; принята к публикации 21.07.2021.  
The article was submitted 06.04.2021; approved after reviewing 14.07.2021; accepted for publication 21.07.2021.