

Научная статья

УДК 006.924.4, 531.761

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-8-56-66>

Релятивистская синхронизация часов навигационных космических аппаратов с использованием межспутниковых измерений

Николай Николаевич Василюк¹✉, Александр Петрович Червонкин²

¹ ООО «Топкон Позишинг Системз», Москва, Россия, nik-vasilyuk@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-2317-8066>

² Научно-производственная корпорация «Системы прецизионного приборостроения», Москва, Россия, al3296@yandex.ru

Аннотация. Задача синхронизации бортовых часов навигационных космических аппаратов рассмотрена с релятивистской точки зрения с использованием концепции «координатной одновременности». Эта концепция позволяет однозначно интерпретировать результаты синхронизации в рамках общей теории относительности. Алгоритм обработки межспутниковых измерений сформулирован в терминах приборной реализации собственного времени космического аппарата и координатного времени системы отсчёта. Указаны правила преобразования между координатной и собственной шкалами времени. Получено аналитическое выражение для периодической релятивистской поправки к оценённому значению относительного ухода часов, записанное в координатном времени наземного наблюдателя. Значение поправки превышает допустимую погрешность синхронизации и должно учитываться при обработке межспутниковых измерений. Вычислена погрешность определения релятивистской поправки, ограничивающая сверху период перезакладки эфемеридных данных на борт космических аппаратов.

Ключевые слова: межспутниковые измерения, межспутниковая лазерная связь, синхронизация часов, сверка шкал времени, релятивистские эффекты, гравитационное замедление времени

Для цитирования: Василюк Н. Н., Червонкин А. П. Релятивистская синхронизация часов навигационных космических аппаратов с помощью межспутниковых измерений // Измерительная техника. 2021. № 8. С. 56–66. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-8-56-66>

Relativistic synchronization of onboard clocks of navigation space vehicles with the aid of intersatellite measurements

Nikolay N. Vasilyuk¹✉, Alexander P. Chervonkin²

¹ Topcon Positioning Systems, Moscow, Russia, nik-vasilyuk@yandex.ru✉, <https://orcid.org/0000-0003-2317-8066>

² Scientific and production corporation «Systems of Precision Instruments Engineering», Moscow, Russia, al3296@yandex.ru

Abstract. The problem of the synchronization of onboard clocks of navigation satellites has considered from a relativistic point of view using the concept of “coordinate simultaneity”. This concept allows an unambiguous interpretation of the synchronization results within the framework of general relativity. The algorithm of intersatellite measurements processing has formulated in terms of a proper time of a space vehicle and the coordinate time of a reference frame. Rules of transformation between coordinate and proper time scales have indicated. An analytical expression has obtained for the periodic relativistic correction to the estimated value of the relative clock drift. This correction has expressed in terms of the coordinate time of a ground observer. The value of this correction exceeds the acceptable synchronization error and should be taken into account for the inter-satellite measurements processing. The error of the relativistic correction determination has calculated. This error provides an upper limit for the period of uploading of ephemeris data on the board of the space vehicle.

Keywords: intersatellite measurements, intersatellite laser communications, remote clock synchronization, timescales comparison, relativistic effects, gravitational time dilation

Введение. Нормальное функционирование глобальной навигационной спутниковой системы (ГЛОНАСС) требует регулярного обновления параметров орбитального движения навигационных космических аппаратов (КА) и уходов их бортовых часов относительно общесистемной шкалы времени. В настоящее время обновление параметров орбит и часов выполняется с помощью сети наземных контрольных станций. Контрольные и измерительные станции ГЛОНАСС размещены преимущественно на территории Российской

Федерации, поэтому измерение эфемеридно-временных параметров и их закладка на борт КА возможны не чаще одного-двух раз в сутки. Существующие средства измерений и синхронизации времени обеспечивают относительную стабильность бортовых часов КА ГЛОНАСС на уровне $1\text{--}5 \cdot 10^{-13}$. Среднее квадратическое отклонение (СКО) взаимной синхронизации времени составляет 8–20 нс. Погрешность сверки шкал времени КА со шкалой системного времени, формируемой наземным центральным синхронизатором,

не превышает 10 нс [1, 2]. Таким образом, СКО случайного ухода бортовых часов КА относительно системной шкалы времени при суточном интервале коррекции не превышает

$$\sqrt{(5 \cdot 10^{-13} \cdot 24 \cdot 3600)^2 + (10 \cdot 10^{-9})^2} \approx 44 \text{ нс.}$$

Для повышения точности навигационных измерений с помощью ГЛОНАСС необходимо повысить частоту измерений параметров орбит и часов и уменьшить период их полного обновления на КА [3]. Одно из возможных решений этой задачи – установка на борт КА системы, позволяющей КА обмениваться информацией между собой и измерять параметры движения и ухода часов одного спутника относительно другого. Результаты межспутниковых измерений, выполненных между отдельными парами КА, передаются по цепочке в наземный центр обработки, где по ним вычисляются уточнённые параметры орбит и часов. Результаты обработки из наземного центра поступают на какой-либо доступный для связи КА, а затем распространяются между остальными КА с помощью той же системы. Межспутниковые измерения позволяют автономно вычислять эфемеридно-временные параметры КА внутри космического сегмента ГЛОНАСС без участия наземных центров измерения и обработки информации. Результаты межспутниковых измерений предполагается использовать для контроля технического состояния часов КА, обнаружения кратковременных нестабильностей (скачков) в измерениях бортовых часов КА длительностью 10–180 с и амплитудой 0,5–2 нс [4].

На данный момент на КА ГЛОНАСС размещены две системы для решения задач межспутниковых измерений и связи. Бортовая аппаратура межспутниковых измерений использует радиосигналы с кодовым разделением каналов и несущей частотой 2,2 ГГц [3, 5, 6]. В межспутниковой лазерной навигационно-связной системе для измерений используются пачки лазерных импульсов с длиной волны 0,83 мкм, передаваемых от одного КА к другому. Передача информации в межспутниковой лазерной навигационно-связной системе выполняется в результате модуляции положения отдельных импульсов внутри пачки [7–10]. В обеих системах используется встречный беззапросный тип измерений, при котором сигнал передаётся только в одну сторону – от передатчика к приёмнику, без обратной передачи ответного или отражённого сигнала. Каждый из взаимодействующих КА самостоятельно начинает передачу измерительного сигнала согласно собственной циклограмме и одновременно принимает встречный сигнал, независимо передаваемый другим КА. Моменты излучения и приёма сигнала регистрируются в различных шкалах времени – шкале передающего и принимающего КА соответственно. Зарегистрированные моменты времени являются первичными измеряемыми величинами в межспутниковой измерительной системе. Эти моменты времени содержат информацию о движении одного КА относительно другого. Из первичных измерений формируются разностные комбинации, которые предполагается применять для вычисления параметров орбитального движения КА ГЛОНАСС и уходов часов отдельных КА относительно шкалы времени навигационной системы [4, 11–19].

Однако во всех цитируемых работах представление об абсолютном времени взято из классической механики. В то же время процедура обработки первичных измерений описана с неявным использованием постулата о независимости скорости света от инерциальной системы отсчёта, который вводится в специальной теории относительности. Заявленная точность межспутниковой синхронизации 1–2 нс описывается величинами того же порядка, что и релятивистские эффекты, возникающие при движении КА в поле тяготения Земли. В [19] сделана ограниченная рамками специальной теории относительности попытка рассмотрения релятивистских эффектов применительно к задаче межспутниковой синхронизации. Полный анализ релятивистских эффектов требует учёта поля тяготения Земли, т. е. задача

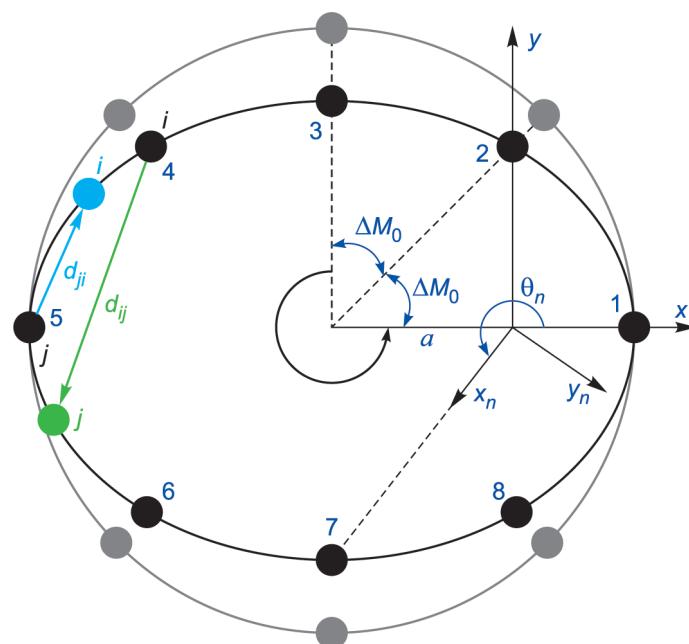


Рис. 1. Расположение КА на общей эллиптической орбите: направление движения показано круговой стрелкой в центре рисунка; 1–8 – порядковые номера восьми КА и их расположение в орбитальной плоскости в начальную эпоху (расчёта средней аномалии); «синий шар» – позиция КА_i ($i=4$) в момент приёма сигнала от КА_j ($j=5$); «зеленый шар» – позиция КА_j в момент приёма сигнала от КА_i; ΔM_0 – угловые расстояния между КА в начальную эпоху; a – большая полуось; КА_{i,j} – взаимодействующие КА; d_{ij} , d_{ji} – траектории сигналов от КА_i к КА_j и наоборот; θ_n – истинная аномалия КА_n ($n=7$); x , y – оси орбитальной системы координат; x_n , y_n – оси, повернутые на угол истинной аномалии КА_n

Fig. 1. Distribution of space vehicles on the common elliptic orbit. The direction of motion is shown by the round arrow in the center of figure. 1–8 – sequential numbers of eight space vehicles (SV) and their arrangement in the orbital plane at the initial epoch of the mean anomaly calculation; ΔM_0 – equal angular displacements between space vehicles at the initial epoch; a – major semiaxis; $i=4$, $j=5$ – connecting space vehicles; “blue ball” – position of the SV_i at the instant of reception of the signal from SV_j; “green ball” – position of the SV_j at the instant of reception of the signal from SV_i; d_{ij} – trajectory of the signal from SV_i to SV_j; d_{ji} – trajectory of the signal from SV_j to SV_i; θ_n – true anomaly for SV_n ($n=7$); x , y – axes of the orbital coordinate system; x_n , y_n – axes, have turned on the true anomaly angle of SV_n

синхронизации должна рассматриваться в рамках общей теории относительности.

Постановка задачи. Рассмотрим релятивистскую задачу межспутниковой синхронизации как задачу определения ухода бортовых часов одного КА относительно другого. Взаимные уходы часов между парами КА позволяют синхронизировать часы каждого отдельного КА с часами некоторого опорного КА вдоль замкнутой цепочки межспутниковых взаимодействий [4]. Рациональный выбор опорного КА (например, имевшего недавний сеанс связи с наземным центром управления) позволяет своевременно корректировать дрейфы и обнаруживать сбои бортовых часов отдельных КА.

Для выделения основных релятивистских эффектов и получения их численных значений в данной работе используется предельно упрощённая модель измерений и движения КА. Предполагается, что восемь КА движутся в одной орбитальной плоскости по общей эллиптической орбите (рис. 1). Параметры орбитальной конфигурации представлены в табл. 1.

Геометрия околоземного пространства в данной работе описывается метрикой теории относительности Эйнштейна в гармонической калибровке, рекомендуемый вид которой определён в резолюции В1.3 24-й Генеральной ассамблеи Международного астрономического союза (МАС) 2000 г., взятой с точностью до первых постньютоновских поправок для сферической Земли радиусом R_E (см. табл. 1). Радиус R_E соответствует среднему радиусу Земли для земного эллипсоида ПЗ-90.11. Несферичность Земли, а также гравитационное притяжение Луны и Солнца в метрике не учитываются. Учёт этих факторов необходим при постановке задачи релятивистской синхронизации с точностью лучше 1 нс. Также в данной работе не принимаются во внимание

всевозможные негравитационные факторы, влияющие на движение КА и не учитываются шумы передающей и принимающей аппаратуры [17, 18]. В качестве эксцентриситета взят максимальный эксцентриситет из 24 орбит, представленных в (Эфемериды ИАЦ; [сайт]. URL: <https://www.glonass-iac.ru>) на дату 22.10.2020 г.

Уход часов КА определяется относительно национальной шкалы координированного времени России UTC(SU), которая является опорной шкалой времени системы ГЛОНАСС и национальной реализацией шкалы всемирного координированного времени UTC. Шкала времени UTC является специфической реализацией международной шкалы земного времени TT (Time Terrestrial). Время TT измеряют часы, расположенные на уровне моря и неподвижные относительно вращающейся Земли.

Позиция и скорость КА (эфемериды КА) задаются относительно геоцентрической системы отсчёта GCRS (Geocentric Celestial Reference System), определённой в резолюции В1.3 24-й Генеральной ассамблеи МАС и рекомендованной для описания движения космических объектов в околоземном пространстве. Время в GCRS задаётся относительно шкалы времени TCG (Temps Coordonnée Géocentrique), определённой в рекомендации III резолюции А.4 22-й Генеральной ассамблеи МАС 1991 г. Физически это определение означает, что время TCG измеряется часами, размещёнными в центре масс Земли и находящимися под действием гравитационных полей всех тел Солнечной системы, кроме поля Земли. В принятом здесь приближении время TCG можно рассматривать как время, измеренное неподвижными относительно GCRS и бесконечно удалёнными от Земли часами.

Полученные результаты верны для любой другой геоцентрической системы отсчёта, в которой метрика околоземного пространства-времени совпадает с метрикой GCRS с точностью до членов порядка c^{-2} включительно (c – скорость света в вакууме). Способ определения такой системы отсчёта в рамках данной работы не имеет принципиального значения, так как решается задача синхронизации бортовых часов КА, а не определения их пространственных координат.

В работе приняты следующие обозначения. Моменты времени излучения и приёма сигналов, измеренные бортовыми часами КА (моменты собственного времени), обозначены соответственно τ , ρ , моменты возникновения этих же событий в шкале времени системы отсчёта, в которой рассматривается задача синхронизации, – соответственно t , q .

Первичная обработка встречных измерений. Процедура межспутниковых измерений представляет собой независимый обмен электромагнитными сигналами между двумя КА. Если показания бортовых часов КА достигают заранее заданного программного значения $\tau_{\text{пр}}$, то на КА включается передатчик для излучения электромагнитного сигнала в направлении другого КА. Численное значение $\tau_{\text{пр}}$ одинаково для обоих КА. Моменты времени фактического излучения сигнала фиксируются на каждом КА по его собственным бортовым часам. Момент излучения от КА i к КА j , измеренный часами КА i , обозначим $\tilde{\tau}_{ij}$, $i, j=1, \dots, 8$ (в обратную сторону – $\tilde{\tau}_{ji}$), причём $\tilde{\tau}_{ij} \neq \tilde{\tau}_{ji} \neq \tau_{\text{пр}}$. Различия между моментами фактического излучения сигналов обусловлены разными задержками в передающей аппаратуре

Таблица 1

Параметры орбитальной конфигурации

Параметр	Значение
Средний радиус Земли R_E , км	6371
Гравитационная постоянная GM , $\text{м}^3/\text{с}^2$	$398600,4418 \cdot 10^9$
Нормальный потенциал на поверхности общеземного эллипсоида W_0 , $\text{м}^2/\text{с}^2$	62636861,4
Номинальный радиус орбиты a_0 , км	25471
Эксцентриситет e	0,00274
Средняя скорость КА v , м/с	3955,905
Период обращения КА T_{SV} , ч	11,2377
Максимальная длина трассы вдогонку $ d_{ij} _{\text{max}}$, м	19544288,606
Минимальная длина трассы навстречу $ d_{ji} _{\text{min}}$, м	19445114,475
Разность длин трасс максимальная $ d_{ij} - d_{ji} _{\text{max}}$, м	477,525
минимальная $ d_{ij} - d_{ji} _{\text{min}}$, м	473,119
Разностная поправка: максимальная $ \delta t_{ij}^D _{\text{max}}$, нс	796,43
минимальная $ \delta t_{ij}^D _{\text{min}}$, нс	789,08

различных КА. Сигнал, излучённый КА_i, принимается на КА_j в момент времени $\tilde{t}_{ij}$, измеренный по часам КА_j. Измерения моментов времени, выполненные по бортовым часам, содержат уходы часов относительно шкалы времени навигационной системы:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{t}_{ij} &= t_{ij} + \delta_i, \quad \tilde{p}_{ij} = q_{ij} + \delta_j, \\ \tilde{t}_{ji} &= t_{ji} + \delta_j, \quad \tilde{p}_{ji} = q_{ji} + \delta_i, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где t_{ij}, t_{ji} – моменты излучения; q_{ij}, q_{ji} – моменты приёма в системной шкале времени; δ_i, δ_j – уходы бортовых часов КА_i, КА_j относительно системной шкалы времени.

Уход часов КА_j относительно КА_i задаётся величиной $\delta_{ij} = \delta_j - \delta_i$, такой что $\tilde{t}_{jX} = \tilde{t}_{iX} + \delta_{ij}$, где $\tilde{t}_{iX}, \tilde{t}_{jX}$ – моменты возникновения одного и того же события X по часам соответственно КА_i, КА_j.

Момент приёма $q_{nm}(n, m=i, j)$ находится из «светового» уравнения

$$q_{nm} = t_{nm} + |\mathbf{r}_m(q_{nm}) - \mathbf{r}_n(t_{nm})|/c = t_{nm} + d_{nm}/c,$$

где $\mathbf{r}_n(t)$ – координаты КА_n относительно GCRS в момент времени t ; $d_{nm} = |\mathbf{r}_m(q_{nm}) - \mathbf{r}_n(t_{nm})|$ – длина трассы распространения сигнала от КА_n к КА_m.

После завершения обмена измерительными сигналами КА передают друг другу по обычному каналу связи значения измеренных моментов времени $\tilde{p}_{ij}, \tilde{p}_{ji}, \tilde{t}_{ij}, \tilde{t}_{ji}$ (первичные измерения) из которых формируется двойная разность [6–16]:

$$\Delta_{ij} = [(\tilde{p}_{ij} - \tilde{t}_{ij}) - (\tilde{p}_{ji} - \tilde{t}_{ji})]/2, \quad (2)$$

которая интерпретируется как оценка ухода часов КА_j относительно КА_i. Подставим выражения из системы (1) в двойную разность (2):

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + (\Delta t_{ij} - \Delta t_{ji})/2 = \delta_{ij} + \delta t_{ij}^D; \quad (3)$$

$$\Delta t_{ij} = q_{ij} - t_{ij} = d_{ij}/c;$$

$$\Delta t_{ji} = q_{ji} - t_{ji} = d_{ji}/c,$$

где $\Delta t_{ij}, \Delta t_{ji}$ – длительности распространения сигналов в системной шкале времени; d_{ij}, d_{ji} – длины трасс распространения сигналов от КА_i до КА_j и обратно.

Оценка (3) относительного ухода часов δ_{ij} содержит поправку $\delta t_{ij}^D = (d_{ij} - d_{ji})/2c$, возникающую из-за разности расстояний, которые проходят сигналы, распространяющиеся навстречу d_{ji} и вдогонку d_{ij} между соседними КА (см. рис. 1). Эта поправка изменяется с периодом T_{SV} обращения КА в границах, приведённых в табл. 1, и должна учитываться при обработке первичных межспутниковых измерений.

Координатная синхронизация часов и геометрия пространства-времени. Согласно ГОСТ 8.567-99 «Измерение времени и частоты. Термины и определения» под синхронизацией часов понимается приведение часов в такое состояние, при котором их показания в момент возникновения любого события совпадают. В классической механике понятие синхронизации имеет однозначное толкование в силу абсолютности

одновременности, которая следует из абсолютности времени. В специальной теории относительности одновременность относительна и понятие синхронизации однозначно формулируется только для часов, неподвижных относительно инерциальной системы отсчёта. Часы считаются синхронизированными, если их показания настроены согласно процедуре синхронизации Эйнштейна, которая вводится по определению. Формальное применение этой процедуры в условиях общей теории относительности вызывает трудности и не всегда приводит к однозначному результату [20–22].

В общей теории относительности используются два связанных типа времени – собственное и координатное. В общем случае координатное время не является физической величиной, не измеряется никакими часами и имеет чисто геометрический смысл – одна из координат в четырёхмерном пространстве-времени. Момент координатного времени возникновения события может быть получен только в результате вычислительной обработки результатов наблюдений. Измеряемым временем в общей теории относительности является собственное время – время, измеряемое часами, скреплёнными с наблюдателем и расположенными с ним в одной точке пространства. Подбором системы координат можно выбрать часы, собственное время которых будет совпадать с координатным временем, но (в общем случае) только в месте расположения этих часов, а не во всём пространстве.

В математическом смысле четырёхмерное пространство-время является четырёхмерным псевдоевклидовым пространством, в котором возможны положительные, отрицательные и нулевые «расстояния» между различными точками. Далее это пространство будем называть континуумом, чтобы отличать его от обычного трёхмерного пространства (далее – пространство). Положение события в континууме задаётся координатами $\{x^\alpha\} \equiv \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, $\alpha = 0..3$, из которых координаты x^1, x^2, x^3 являются пространственными, а $x^0 \equiv ct$, где t – координатное время. Для того чтобы выйти из затруднения с синхронизацией часов в общей теории относительности, в прикладной астрономии введено понятие «координатной синхронизации» [21–23]. Координатная синхронизация основана на понятии координатной одновременности – два события «1» и «2» с координатами $\{x_1^\alpha\}$ и $\{x_2^\alpha\}$ считаются одновременными, если равны моменты координатного времени возникновения этих событий $t_1 = t_2$. Таким образом, пространственно-разнесённые часы считаются синхронизированными, если совпадают значения моментов координатного времени возникновения любого события, рассчитанные из значений моментов собственного времени возникновения этого события. Координатная одновременность относительна, поэтому часы, синхронизированные в одной системе отсчёта, не будут синхронизированы в другой.

Геометрия континуума описывается метрическим тензором (метрикой) $g_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 0..3$, с помощью которого вычисляются расстояния между бесконечно близкими точками. Шестнадцать компонент тензора $g_{\alpha\beta}$ в некоторой (исходной) системе координат получаются в результате решения уравнения Эйнштейна для гравитационного поля. Если часы переместились из точки $\{x^\alpha\}$ в бесконечно близкую точку

$\{x^a + dx^a\}$, то квадрат интервала («расстояния») между этими точками (используются тензорные обозначения для суммирования по одинаковым верхнему и нижнему индексам):

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g_{00} c^2 dt^2 + 2cg_{0k} dt dx^k + g_{km} dx^k dx^m, \quad k, m = 1 \dots 3.$$

С часами связана их собственная система координат, относительно которой часы неподвижны. В бесконечно малой окрестности часов между исходной и собственной системами координат существует взаимно-однозначное преобразование, переводящее тензор общего вида $g_{\alpha\beta}$ в диагональный тензор $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$, точку $\{x^a\}$ в точку $\{0, 0, 0, 0\}$, а точку $\{x^a + dx^a\}$ – в точку $\{cd\tau, 0, 0, 0\}$, где $d\tau$ – промежуток собственного времени, измеренный часами за время перемещения. Квадрат интервала инвариантен относительно локальных преобразований координат:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \eta_{00} c^2 d\tau^2 = -c^2 d\tau^2, \quad d\tau = \sqrt{-g_{00} - 2g_{0k} \frac{v^k}{c} - g_{km} \frac{v^k}{c} \frac{v^m}{c}} dt, \quad (4)$$

где $v^k = dx^k/dt$, $k = 1 \dots 3$ – координатная скорость часов.

Пусть в некоторый момент координатного времени t_0 значение собственного времени на часах равно τ_0 . Собственное время τ_1 в момент координатного времени t_1 получается интегрированием (4):

$$\tau_1 = \tau_0 + \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-g_{00} - 2g_{0k} \frac{v^k}{c} - g_{km} \frac{v^k}{c} \frac{v^m}{c}} dt. \quad (5)$$

Значение координатного времени t_1 восстанавливается из измеренного значения собственного времени τ_1 как решение уравнения (5) относительно верхнего предела интегрирования. Для решения этого уравнения необходимо знать траекторию движения часов и метрику континуума.

Электромагнитный сигнал – наиболее быстрое и удобное средство оповещения движущихся часов о возникновении синхронизирующего события. Этот сигнал распространяется хоть и с предельной, но конечной скоростью, поэтому в задаче синхронизации необходимо учитывать время распространения сигнала от точки возникновения события до часов. Интервал между двумя событиями, состоящими в перемещении сигнала из точки $\{x^a\}$ в $\{x^a + dx^a\}$ (или обратно), всегда равен нулю:

$$ds^2 = g_{00} c^2 dt^2 + 2cg_{0k} dt dx^k + g_{km} dx^k dx^m = 0.$$

Записанное квадратное уравнение относительно dt имеет два решения

$$dt = \frac{1}{c} \frac{g_{0k}}{-g_{00}} dx^k \pm \frac{1}{c\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{\left(g_{km} + \frac{g_{0k}g_{0m}}{-g_{00}}\right) dx^k dx^m}. \quad (6)$$

Знак «+» соответствует времени перемещения сигнала из точки $\{x^a\}$ в $\{x^a + dx^a\}$, знак «–» – в обратном направлении. Время распространения сигнала между разнесёнными точками

получается интегрированием первого решения (6) вдоль траектории сигнала в пространстве:

$$\Delta t = \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{1}{c} \frac{g_{0k}}{-g_{00}} dx^k + \frac{1}{c\sqrt{-g_{00}}} \sqrt{\left(g_{km} + \frac{g_{0k}g_{0m}}{-g_{00}}\right) dx^k dx^m} \right], \quad (7)$$

где r_1, r_2 – координаты начальной и конечной точек.

Электромагнитный сигнал распространяется в пространстве вдоль линии с наименьшим временем распространения, которая в континууме имеет нулевую длину. Такая линия называется изотропной геодезической. Таким образом, для расчёта времени распространения сигнала между двумя точками, нужно построить изотропную геодезическую между этими точками, а затем проинтегрировать (7) вдоль неё.

Преобразования шкал координатного времени. Метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ околоземного континуума в GCRS (с координатным временем TCG) в рамках нашего приближения сводится к виду [24]:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= -1 + 2U/c^2, \quad g_{0k} = 0, \\ g_{km} &= (1 + 2U/c^2) \delta_{km}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $U = GM/|r|$ – потенциал гравитационного поля сферической Земли в точке с геоцентрическим радиус-вектором r ; GM – гравитационная постоянная Земли (см. табл. 1); δ_{km} – символ Кронекера.

Промежутки координатных времён Δt_∞ (TCG) и Δt (UTC) связаны линейным отношением

$$\Delta t = \lambda_\infty \Delta t_\infty,$$

где $\lambda_\infty = \sqrt{1 - 2W_0/c^2} \approx 1 - W_0/c^2 = 1 - L_G$; W_0 – гравитационный потенциал на поверхности геоида (см. табл. 1), включающий в себя вращение Земли; $L_G = W_0/c^2$ – постоянная преобразования временных шкал (табл. 2).

При замене шкалы времени TCG на UTC координатные скорости КА (заданные относительно GCRS) преобразуются следующим образом:

$$v^k = \frac{dx^k}{dt} = \frac{dx^k}{\lambda_\infty dt_\infty} = \frac{v_\infty^k}{\lambda_\infty},$$

где $v^k = dx^k/dt$, $v_\infty^k = dx^k/dt_\infty$ – координатные скорости в шкалах времени UTC и TCG соответственно.

Подставим коэффициенты тензора (8) в (5):

$$\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_0 + \int_{t_{\infty 0}}^{t_{\infty 1}} \sqrt{1 - \frac{2U}{c^2} - \frac{v_\infty^2}{c^2} - \frac{2Uv_\infty^2}{c^4}} dt_\infty, \quad (9)$$

где $\hat{\tau}_0, \hat{\tau}_1$ – моменты собственного времени КА, соответствующие моментам координатного времени $t_{\infty 0}, t_{\infty 1}$;

$$v_\infty = \delta_{km} v_\infty^k v_\infty^m = \sqrt{(v_\infty^1)^2 + (v_\infty^2)^2 + (v_\infty^3)^2}.$$

Для номинальных значений параметров орбиты ГЛОНАСС (см. табл. 1):

$$(2U+v^2)/c^2 \approx 5,2236 \cdot 10^{-10}, \quad 2Uv^2/c^4 \approx 6,0636 \cdot 10^{-20}.$$

Подынтегральное выражение в (9) разлагается в ряд относительно слагаемого порядка c^{-2} , а слагаемые порядка c^{-4} и выше здесь и далее отбрасываются в силу малости:

$$\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_0 \approx \int_{t_{\infty 0}}^{t_{\infty 1}} \left[1 - \frac{U + 0,5v_{\infty}^2}{c^2} \right] dt_{\infty} + \delta k^I (t_{\infty 1} - t_{\infty 0}), \quad (10)$$

где $\delta k^I \approx 0,045 \cdot 10^{-15}$ – погрешность приближения подынтегрального выражения.

Эта погрешность даёт дрейф оценки собственного времени КА 4 пс/сут. и при регулярных коррекциях ей можно пренебречь. Интегрирование (10) вдоль эллиптической орбиты выполнено в [24]:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_0 \approx & \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\mu_E}{a} \right) (t_{\infty 1} - t_{\infty 0}) - \\ & - \frac{2}{c^2} [\mathbf{r}_{\infty}(t_{\infty 1}) \cdot \mathbf{v}_{\infty}(t_{\infty 1}) - \mathbf{r}_{\infty}(t_{\infty 0}) \cdot \mathbf{v}_{\infty}(t_{\infty 0})], \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mu_E = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус Земли (см. табл. 2); a – большая полуось орбиты; $\mathbf{r}_{\infty}(t_{\infty})$, $\mathbf{v}_{\infty}(t_{\infty})$ – радиус-вектор и вектор скорости КА для координатного времени t_{∞} .

Для применения (11) к КА ГЛОНАСС необходимо преобразовать это выражение к координатному времени UTC. Для этого достаточно выполнить подстановки

$$\left. \begin{aligned} t_{\infty} &= t_{\infty 0} + (t - t_0)/\lambda_{\infty}, \\ \mathbf{r}_{\infty}(t_{\infty}) &= \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{v}_{\infty}(t_{\infty}) &= \mathbf{v}(t)/\lambda_{\infty}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где $\mathbf{r}(t) = [x^1(t) \ x^2(t) \ x^3(t)]^T$, $\mathbf{v}(t) = [v^1(t) \ v^2(t) \ v^3(t)]^T$ – эфемериды КА относительно GCRS для координатного времени t ; $t_{\infty 0}$, t_0 – условные моменты начала отсчёта времени в шкалах TCG и UTC соответственно. В значении t_0 учитывается полное число високосных секунд на момент выполнения подстановки. После подстановки выражение (11) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_0 \approx & \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\mu_E}{a} + L_G \right) (t_1 - t_0) - \\ & - \frac{2}{c^2} [\mathbf{r}(t_1) \cdot \mathbf{v}(t_1) - \mathbf{r}(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Частота бортового стандарта 5 МГц КА ГЛОНАСС, задающего темп хода бортовых часов, смещена на $\Delta f = k_G \cdot 5 \cdot 10^6 = -2,18 \cdot 10^{-3}$ Гц, где $k_G = 3\mu_E/(4a_0) - L_G$ (см. табл. 2). За счёт этого смещения промежуток «приборного» времени $\Delta\tau$ на КА с точностью до периодического слагаемого уравнивается с промежуток координатного времени Δt

Таблица 2

Релятивистские постоянные и поправки

Параметр	Значение
Гравитационный радиус Земли μ_E , мм	8,87
Константа преобразования временных шкал L_G	$6,969290134 \cdot 10^{-10}$
Аппаратная коррекция темпа хода часов КА k_E	$-4,35748042 \cdot 10^{-10}$
Гравитационная задержка:	
максимальная вдогонку $\delta t_{ij\max}^G$, пс	23,994
минимальная навстречу $\delta t_{ij\min}^G$, пс	23,725
Максимальная абсолютная поправка:	
$ \delta t_{ij}^I _{\max}$, фс	0,6
$ \delta t_{ij}^{II} _{\max}$, фс	0,33
$ \delta t_{ij}^{III} _{\max}$, нс	4,7

на геоиде: $\Delta\tau = (1 + k_G)\Delta\hat{\tau}$, где $\Delta\hat{\tau} = \hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_0$ – промежуток собственного времени КА в (13). Поскольку все циклограммы и измерения на борту КА выполняются относительно «приборного» времени, оно часто рассматривается как единственное собственное время КА. Здесь время τ будем называть «приборным», чтобы подчеркнуть его отличие от «истинного» собственного времени КА, описанного в общей теории относительности. Умножим обе части (13) на $1 + k_G$ и получим уравнение связи приборного времени КА с координатным временем системы ГЛОНАСС:

$$\tau_1 - \tau_0 \approx t_1 - t_0 + \frac{3}{4} \frac{\mu_E}{a_0^2} (a - a_0) - \frac{2}{c^2} [\mathbf{r}(t_1) \cdot \mathbf{v}(t_1) - \mathbf{r}(t_0) \cdot \mathbf{v}(t_0)]. \quad (14)$$

Координатная синхронизация по встречным измерениям. Пусть в некоторый момент координатного времени t_{Sn} на КА $_n$ выставлено начальное значение приборного времени τ_{Sn} , $n = i, j$. КА $_i$ излучает в направлении КА $_j$ электромагнитный сигнал в момент времени $\tilde{\tau}_{ij} = \tau_{ij} + \delta_i$, измеренный по его бортовым часам. Этот сигнал принимается на борту КА $_j$ в измеренный момент времени $\tilde{\rho}_{ij} = \rho_{ij} + \delta_j$. Здесь τ_{ij} , ρ_{ij} – моменты приборного времени излучения на КА $_i$ и приёма на КА $_j$; δ_n – уход бортовых часов КА $_n$ от шкалы приборного времени. При «классическом» рассмотрении задачи синхронизации символ δ_n обозначал уход часов относительно шкалы времени системы.

Обозначим моменты координатного времени излучения и приёма сигнала t_{ij} и q_{ij} и запишем (14) для измеренных моментов излучения и приёма $\tilde{\tau}_{ij}$ и $\tilde{\rho}_{ij}$:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\tau}_{ij} &= \delta_i + t_{ij} + [\tau_{Si} - t_{Si}] + \frac{3\mu_E}{4a_0^2} (a_i - a_0) - \frac{2}{c^2} [h_i(t_{ij}) - h_i(t_{Si})], \\ \tilde{\rho}_{ij} &= \delta_j + q_{ij} + [\tau_{Sj} - t_{Sj}] + \frac{3\mu_E}{4a_0^2} (a_j - a_0) - \frac{2}{c^2} [h_j(q_{ij}) - h_j(t_{Sj})], \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где a_n – большая полуось орбиты КА $_n$, $h_n(t) = \mathbf{r}_n(t) \cdot \mathbf{v}_n(t)$.

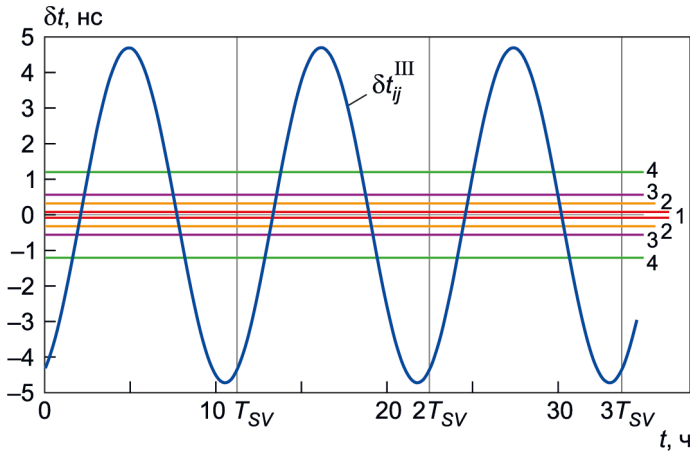


Рис. 2. Релятивистская поправка и суммарные погрешности исправления двойной разности межспутниковых измерений между КА1 и КА2 (см. рис. 1); t – текущее время UTC; δt – временной интервал UTC; $\delta t_{ij}^{\text{III}}$ – релятивистская поправка; 1, 2, 3, 4 – границы $\pm\sigma_{\Sigma ij}$ для окончательных, предварительных и оперативных эфемерид СВОЭВП и для широковегательных эфемерид ГЛОНАСС-М (см. табл. 3)

Fig. 2. Relativistic correction and accumulated errors of the correction of the double difference of the intersatellite measurements between of the SV1 and SV2 on the fig. 1; t – current time UTC, [hour]; δt – time interval UTC [ns]; $\delta t_{ij}^{\text{III}}$ – relativistic correction; 1, 2, 3, 4 – $\pm\sigma_{\Sigma ij}$ limits for final, rapid and ultra-rapid products of the System of High-Precision Determination of Ephemeris and Time Corrections (SHPDETC) and for broadcast ephemeris of a GLONASS-M (Table 3)

Выражения (15) упрощаются, если момент t_{Sn} начальной выставки бортовых часов привязывать к моменту прохождения апогея или перигея $КА_n$ (когда $h_n(t_{Sn})=0$), а начальный момент приборного времени выставять как $\tau_{Sn}=t_{Sn}$. Разность между упрощёнными выражениями (15)

$$\tilde{\rho}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} = \delta_{ij} + [q_{ij} - t_{ij}] + \delta t_{ij}^E - \frac{2}{c^2} [h_j(q_{ij}) - h_i(t_{ij})], \quad (16)$$

где $\delta t_{ij}^E = \frac{3\mu_E}{4a_0^2} (a_j - a_i)$ – релятивистская поправка на разность больших полуосей орбит взаимодействующих КА.

Подставим релятивистскую модель встречных измерений (16) в двойную разность (2):

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \delta t_{ij}^E + \frac{\Delta t_{ij} - \Delta t_{ji}}{2} - \frac{[h_j(q_{ij}) - h_i(t_{ij})] - [h_i(q_{ji}) - h_j(t_{ji})]}{c^2}. \quad (17)$$

На круговой орбите $h_n(t)=0$, $\delta t_{ij}^E=0$ и (17) по форме совпадает с (3).

Длительность распространения сигнала по шкале времени TCG получается интегрированием (7) в околоземном пространстве с метрикой (8) [25]:

$$\Delta t_{\infty ij} = \frac{d_{\infty ij}}{c} + \delta t_{\infty ij}^G,$$

$$\delta t_{\infty ij}^G = \frac{\mu_E}{c} \ln \frac{r_{\infty i}(t_{\infty ij}) + r_{\infty j}(q_{\infty ij}) + d_{\infty ij}}{r_{\infty i}(t_{\infty ij}) + r_{\infty j}(q_{\infty ij}) - d_{\infty ij}}, \quad (18)$$

где $d_{\infty ij} = |r_{\infty j}(q_{\infty ij}) - r_{\infty i}(t_{\infty ij})|$; $\delta t_{\infty ij}^G$ – релятивистская поправка на гравитационную задержку распространения сигнала, $r_{\infty n}(t_{\infty}) = |r_{\infty n}(t_{\infty})|$. Для общей теории относительности Эйнштейна значения параметров в обозначениях [25] равны $m = \mu_E/2$, $\alpha = 0$, $\gamma = 1$. Длительность Δt_{ij} по шкале UTC получается из $\Delta t_{\infty ij}$ после подстановки (12) в (18):

$$\Delta t_{ij} = \frac{\lambda_{\infty} d_{ij}}{c} + \delta t_{ij}^G, \quad (19)$$

$$\delta t_{ij}^G = \frac{\lambda_{\infty} \mu_E}{c} \ln \frac{r_i(t_{ij}) + r_j(q_{ij}) + d_{ij}}{r_i(t_{ij}) + r_j(q_{ij}) - d_{ij}}.$$

Подставим (18) в (16):

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \delta t_{ij}^D + \delta t_{ij}^E + \delta t_{ij}^I + \delta t_{ij}^{\text{II}} + \delta t_{ij}^{\text{III}},$$

$$\delta t_{ij}^I = -L_G \delta t_{ij}^D;$$

$$\delta t_{ij}^{\text{II}} = (\delta t_{ij}^G - \delta t_{ji}^G)/2;$$

$$\delta t_{ij}^{\text{III}} = -([h_j(q_{ij}) - h_i(t_{ij})] - [h_i(q_{ji}) - h_j(t_{ji})])/c^2,$$

где δt_{ij}^I , $\delta t_{ij}^{\text{II}}$, $\delta t_{ij}^{\text{III}}$ – релятивистские поправки с периодом повторения T_{SV} .

Поправка $\delta t_{ij}^E = 0,1$ нс соответствует разности больших полуосей орбит $КА_i$ и $КА_j$ $|a_i - a_j| = 9752$ км, которая на практике не встречается. Поэтому поправкой δt_{ij}^E при практических расчётах можно пренебречь. Максимальные абсолютные значения поправок δt_{ij}^I , $\delta t_{ij}^{\text{II}}$ приведены в табл. 2 и ими тоже можно пренебречь. График поправки $\delta t_{ij}^{\text{III}}$ показан на рис. 2. Это наиболее значимая релятивистская поправка, максимальное абсолютное значение которой равно 4,7 нс (для эксцентриситета $e = 0,00274$) превышает требуемую точность определения относительного ухода часов. Эта поправка должна учитываться при обработке межспутниковых измерений на эллиптических орбитах. Для чисто круговых орбит эта поправка равна нулю.

Окончательное выражение для релятивистской двойной разности межспутниковых измерений по форме совпадает с (3) с точностью до релятивистской поправки

$$\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \delta t_{ij}^D + \delta t_{ij}^{\text{III}}. \quad (20)$$

В момент выполнения межспутниковых измерений на борту КА доступно только его приборное время. Согласно (15), значения моментов приборного времени КА отличаются от моментов координатного времени UTC на сумму значений ухода часов и релятивистской поправки. При наихудшем значении нестабильности бортовой шкалы времени СКО этого отличия не превышает 50 нс (при суточной коррекции). Поэтому для расчёта поправок в (20) в реальном времени в выражения

Таблица 3

СКО доступных эфемерид

Тип эфемерид	СКО позиции, м			$\sigma_{\Sigma ij}$, нс
	радиальной	трансверсальной	бинормальной	
Окончательные	0,1	0,5	0,2	0,1
Предварительные	0,4	3,0	1,5	0,3
Оперативные	0,7	5,0	2,0	0,6
Широковещательные	1,5	7,0	7,0	1,2

для $\delta t_{ij}^D, \delta t_{ij}^{III}$ можно подставить значения эфемерид, вычисленные на моменты приборного времени излучения и приёма сигналов:

$$\left. \begin{aligned} \delta t_{ij}^D &= \frac{|\mathbf{r}_j(\tilde{\rho}_{ij}) - \mathbf{r}_i(\tilde{\tau}_{ij})| - |\mathbf{r}_i(\tilde{\rho}_{ji}) - \mathbf{r}_j(\tilde{\tau}_{ji})|}{2c}, \\ \delta t_{ij}^{III} &= -\frac{h_j(\tilde{\rho}_{ij}) - h_i(\tilde{\tau}_{ij}) - h_i(\tilde{\rho}_{ji}) + h_j(\tilde{\tau}_{ji})}{c^2} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Погрешности расчёта поправок. Оценим погрешности расчёта разностной δt_{ij}^D и релятивистской δt_{ij}^{III} поправок, обусловленные только погрешностями задания эфемерид КА и уходами часов. Считается, что все КА движутся в одной плоскости по общей эллиптической орбите (см. рис. 1). Погрешности эфемерид и часов для каждого КА имеют одинаковые распределения, независимы и постоянны в течение измерительного сеанса. Погрешности эфемерид приведены в табл. 3, где указаны СКО окончательных (final), предварительных (rapid) и оперативных (ultra-rapid) эфемерид системы высокоточного определения эфемерид и временных поправок (СВОЭВП) (Характеристики СВОЭВП: [сайт]. URL: <http://glonass-svoevp.ru>). Там же приведены при суточном прогнозе СКО широковещательных (broadcast) эфемерид, передаваемых в навигационных кадрах КА ГЛОНАСС-М [2]. СКО погрешностей отдельных компонент скорости одинаковы для всех типов эфемерид и составляют 0,2; 0,03; 0,03 см/с соответственно для радиальной, трансверсальной и бинормальной скоростей.

Дисперсии отдельных погрешностей расчёта поправок вычисляются как математические ожидания квадратов их вариаций $\delta\{\delta t_{ij}^D\}$ и $\delta\{\delta t_{ij}^{III}\}$ в окрестностях расчётных значений

$$\delta\{\delta t_{ij}^D\} = \frac{\delta\{\tilde{d}_{ij}\} - \delta\{\tilde{d}_{ji}\}}{2c},$$

$$\delta\{\delta t_{ij}^{III}\} = -c^{-2} \left[\delta\{h_j(\tilde{\rho}_{ij})\} - \delta\{h_i(\tilde{\tau}_{ij})\} - \delta\{h_i(\tilde{\rho}_{ji})\} + \delta\{h_j(\tilde{\tau}_{ji})\} \right],$$

где $\tilde{d}_{nm} = |\mathbf{r}_m(\tilde{\rho}_{nm}) - \mathbf{r}_n(\tilde{\tau}_{nm})| = |\Delta \tilde{\mathbf{r}}_{nm}|$, $n, m = i, j$. Вариации отдельных слагаемых:

$$\delta\{\tilde{d}_{nm}\} = \tilde{\mathbf{u}}_{nm}^T [S_m(\tilde{\rho}_{nm}) \delta \hat{\mathbf{r}}_m - S_n(\tilde{\tau}_{nm}) \delta \hat{\mathbf{r}}_n + \mathbf{v}_m(\tilde{\rho}_{nm}) \delta m - \mathbf{v}_n(\tilde{\tau}_{nm}) \delta n],$$

$$\delta\{h_n(\tilde{\tau})\} = \mathbf{v}_n^T(\tilde{\tau}) S_n(\tilde{\tau}) \delta \hat{\mathbf{r}}_n + \mathbf{r}_n^T(\tilde{\tau}) S_n(\tilde{\tau}) \delta \hat{\mathbf{v}}_n + [\mathbf{v}_n^2(\tilde{\tau}) + \mathbf{r}_n^T(\tilde{\tau}) \mathbf{a}_n(\tilde{\tau})] \delta n,$$

где $\mathbf{a}_n(\tilde{\tau}) = \dot{\mathbf{v}}_n(\tilde{\tau})$ – ускорение КА n ; $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_{ij}, \tilde{\tau}_{ji}, \tilde{\rho}_{ij}, \tilde{\rho}_{ji}$ – измеренный момент времени; $\delta \hat{\mathbf{r}}_n, \delta \hat{\mathbf{v}}_n$ – погрешности радиальной (ось x_n), трансверсальной (ось y_n) и бинормальной (ось z_n) компонент позиции и скорости КА n ; $\tilde{\mathbf{u}}_{nm} = \Delta \tilde{\mathbf{r}}_{nm} / |\Delta \tilde{\mathbf{r}}_{nm}|$ – единичный вектор из передающего КА n в принимающий КА m ;

$S_n(\tilde{\tau})$ – матрица преобразования из «повёрнутой» системы координат $\{x_n, y_n, z_n\}$ в орбитальную $\{x, y, z\}$ (см. рис. 1):

$$S_n(\tilde{\tau}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_n(\tilde{\tau}) & -\sin \theta_n(\tilde{\tau}) & 0 \\ \sin \theta_n(\tilde{\tau}) & \cos \theta_n(\tilde{\tau}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\theta_n(\tilde{\tau})$ – истинная аномалия КА n в момент времени $\tilde{\tau}$.

Вариации поправок с учётом вариаций отдельных слагаемых:

$$\delta\{\delta t_{ij}^D\} = (2c)^{-1} [\bar{\mathbf{s}}_j^T \delta \mathbf{r}_j - \bar{\mathbf{s}}_i^T \delta \mathbf{r}_i + A_j \delta j - A_i \delta i],$$

$$\delta\{\delta t_{ij}^{III}\} = -c^{-2} [\bar{\mathbf{v}}_j^T \delta \mathbf{r}_j - \bar{\mathbf{v}}_i^T \delta \mathbf{r}_i + \bar{\mathbf{r}}_j^T \delta \mathbf{v}_j - \bar{\mathbf{r}}_i^T \delta \mathbf{v}_i + B_j \delta j - B_i \delta i],$$

где

$$\bar{\mathbf{s}}_n^T = \tilde{\mathbf{u}}_{mn}^T S_n(\tilde{\rho}_{mn}) + \tilde{\mathbf{u}}_{nm}^T S_n(\tilde{\tau}_{nm});$$

$$\bar{\mathbf{v}}_n^T = \mathbf{v}_n^T(\tilde{\rho}_{mn}) S_n(\tilde{\rho}_{mn}) + \mathbf{v}_n^T(\tilde{\tau}_{nm}) S_n(\tilde{\tau}_{nm});$$

$$\bar{\mathbf{r}}_n^T = \mathbf{r}_n^T(\tilde{\rho}_{mn}) S_n(\tilde{\rho}_{mn}) + \mathbf{r}_n^T(\tilde{\tau}_{nm}) S_n(\tilde{\tau}_{nm});$$

$$A_n = \tilde{\mathbf{u}}_{mn}^T \mathbf{v}_n(\tilde{\rho}_{mn}) + \tilde{\mathbf{u}}_{nm}^T \mathbf{v}_n(\tilde{\tau}_{nm});$$

$$B_n = \mathbf{v}_n^2(\tilde{\rho}_{mn}) + \mathbf{v}_n^2(\tilde{\tau}_{nm}) + \mathbf{r}_n^T(\tilde{\rho}_{mn}) \mathbf{a}_n(\tilde{\rho}_{mn}) + \mathbf{r}_n^T(\tilde{\tau}_{nm}) \mathbf{a}_n(\tilde{\tau}_{nm}).$$

Дисперсии погрешностей разностной σ_{Dij}^2 и релятивистской σ_{IIIij}^2 поправок запишем как

$$\sigma_{Dij}^2 = 4c^{-2} [\bar{\mathbf{s}}_j^T P_r \bar{\mathbf{s}}_j + \bar{\mathbf{s}}_i^T P_r \bar{\mathbf{s}}_i + (A_i^2 + A_j^2) \sigma_\delta^2],$$

$$\sigma_{IIIij}^2 = c^{-4} [\bar{\mathbf{v}}_j^T P_r \bar{\mathbf{v}}_j + \bar{\mathbf{v}}_i^T P_r \bar{\mathbf{v}}_i + \bar{\mathbf{r}}_j^T P_v \bar{\mathbf{r}}_j + \bar{\mathbf{r}}_i^T P_v \bar{\mathbf{r}}_i + (B_i^2 + B_j^2) \sigma_\delta^2],$$

где $P_r = M\{\delta \mathbf{r}_n \delta \mathbf{r}_n^T\}$, $P_v = M\{\delta \mathbf{v}_n \delta \mathbf{v}_n^T\}$ – ковариационные матрицы погрешностей позиции и скорости КА; $M\{\dots\}$ – оператор математического ожидания; $\sigma_\delta = 50$ нс – максимальное СКО ухода часов.

Вариации поправок $\delta\{\delta t_{ij}^D\}$ и $\delta\{\delta t_{ij}^{III}\}$ содержат общие случайные компоненты. Поэтому дисперсия $\sigma_{\Sigma ij}^2$ погрешности суммы $\delta t_{ij}^D + \delta t_{ij}^{III}$ поправок не равна сумме дисперсий этих поправок:

$$\sigma_{\Sigma ij}^2 = \sigma_{Dij}^2 + \sigma_{IIIij}^2 - \frac{1}{2c^3} [\bar{\mathbf{s}}_j^T P_r \bar{\mathbf{v}}_j + \bar{\mathbf{s}}_i^T P_r \bar{\mathbf{v}}_i + (A_i B_i + A_j B_j) \sigma_\delta^2].$$

Максимальное значение СКО σ_{Dij} определения разностной поправки даже при наихудших погрешностях широкоэмитальных эфемерид (табл. 3) не превосходит $\sigma_{Dij} < 73$ фс и ей можно пренебречь. Суммарная погрешность исправленного выражения (20) определяется исключительно погрешностью расчёта релятивистской поправки. Графики $\sigma_{\Sigma ij}$ СКО суммарной погрешности расчёта поправки показаны на рис. 2 для погрешностей различных типов эфемерид, встречающихся на практике (см. табл. 3). Погрешность определения релятивистской поправки на широкоэмитальных эфемеридах (линия 4) превосходит требуемую точность в 1 нс синхронизации часов между двумя КА. Это значение погрешности вписывается в заданные пределы на оперативных эфемеридах СВОЭВП (линия 3), публикуемых с задержкой в 1–2 ч относительно реального времени. Отсюда можно сделать вывод, что максимальный период перезакладки эфемеридной информации на КА, необходимый для межспутниковой синхронизации часов с требуемой точностью, не должен превышать двух часов.

Заключение. Релятивистское рассмотрение задачи межспутниковой синхронизации показывает, что различие в промежутках времени, измеренных бортовыми часами различных КА, обусловлено не только их техническим состоянием. Заметный вклад в это различие вносят движение КА и геометрия пространства-времени, в котором происходит это движение. Для того, чтобы связать измерения двух бортовых часов, необходимо выразить их пространственные траектории через общий параметр – координатное время. Координатное время не является физической величиной и определяется чисто математическими методами. Наблюдения КА выполняются с поверхности Земли и подавляющее большинство пользователей навигационной системы ГЛОНАСС также находится на её поверхности. Поэтому координатное время ГЛОНАСС определяется так, чтобы его ход совпадал с ходом часов наземного наблюдателя.

Синхронизация часов основана на понятии одновременности, под которым в данной работе понимается координатная одновременность, т. е. два события считаются одновременными, если равны значения их координатного времени. Координатная одновременность – чисто математическое понятие, поэтому уходы бортовых часов относительно координатного времени нельзя измерить непосредственно. Эти уходы могут быть получены только в результате вычислительной обработки доступных наблюдений, использующей согласованную модель геометрии околоземного пространства.

Межспутниковые измерения предполагается использовать, в том числе, для определения уходов часов одного КА относительно другого. Так как в конструкции бортовых часов уже учтены основные релятивистские эффекты, то релятивистское выражение для относительного ухода часов можно записать в аналитическом виде, который получается при рассмотрении задачи межспутниковой синхронизации в рамках классической механики. Различие между классическим и релятивистским выражением проявляется в физическом смысле термина *относительный уход часов* и в виде аддитивной релятивистской поправки. В классическом выражении *относительный уход часов* – разность между индивидуальными

техническими уходами часов КА относительно шкалы времени навигационной системы. В релятивистском выражении – это разность между индивидуальными техническими уходами часов КА относительно воображаемых идеальных бортовых часов. Эти часы измеряют собственное время, ход которого относительно других идеальных часов определяется различиями в их траекториях. Релятивистская поправка заметно превосходит требуемую точность межспутниковой синхронизации в 1 нс. Эта поправка должна учитываться при первичной обработке межспутниковых измерений.

При расчёте релятивистской поправки используются векторы координат и скоростей взаимодействующих КА в моменты излучения и приёма электромагнитных сигналов. Погрешности широкоэмитальных эфемерид, имеющихся на борту КА, не позволяют рассчитать эту поправку с приемлемой точностью. Однако уровень погрешностей оперативных эфемерид СВОЭВП, полученных по результатам обработки наблюдений за движением КА в течение 1–2 ч, оказывается достаточным для расчёта релятивистской поправки с СКО 0,6 нс. Поэтому максимальный период перезакладки точных эфемеридных данных, допустимый для нормального функционирования межспутниковой измерительной системы, не должен превышать двух часов.

Список литературы

1. Бакитько Р. В., Болденков Е. Н., Булавский Н. Т. и др. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования: монография / Под ред. А. И. Перова, В. Н. Харисова. М.: Радиотехника, 2010. 800 с.
2. Глобальная навигационная спутниковая система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Навигационный радиосигнал в диапазонах L1, L2. Редакция 5.1. М.: РНИИ КП, 2008. 74 с.
3. Мальцев Г. Н., Сакулин А. Н. Резервы повышения точности навигационных определений потребителей при введении в систему ГЛОНАСС режима межспутниковых измерений // Труды военно-космической академии им А. Ф. Можайского. 2011. № 630. С. 73–77.
4. Щекутьев А. Ф. Оперативная синхронизация бортовых шкал времени аппаратов ГЛОНАСС по межспутниковым измерениям вдоль замкнутой цепочки взаимодействий // Космонавтика и ракетостроение. 2014. № 1. С. 134–145.
5. Бартенев В. А., Гречкосеев А. К., Марарескул Т. А. Использование межспутниковых измерений для определения орбит и уходов бортовых часов в КНС ГЛОНАСС // Труды ИПА РАН. 2007. № 17. С. 120–127.
6. Сакулин А. Н., Мальцев Г. Н. Сравнительный анализ вариантов использования в системе ГЛОНАСС радиотехнической и лазерной аппаратуры межспутниковых измерений // I-Methods. 2014. Т. 6. № 3. С. 10–13.
7. Сумерин В. В., Чубыкин А. А., Шаргородский В. Д. Межспутниковая навигационно-связная система // Вестник ГЛОНАСС. 2012. № 3 (7). С. 36–38.
8. Садовников М. А., Сумерин В. В. Беззапросные квантово-оптические системы контроля и передачи шкал времени ГЛОНАСС // Вестник ГЛОНАСС. 2012. № 3 (7). С. 39–42.

9. Шаргородский В. Д., Сумерин В. В., Дмитриев С. В., Григорьев В. Н. Бортовые космические лазерные информационно-измерительные системы // Электромагнитные волны и электронные системы. 2014. № 8. С. 4–10.
10. Шаргородский В. Д., Косенко В. Е., Садовников М. А., Чубыкин А. А., Мокляк В. И. Роль лазерных средств в обеспечении точности системы ГЛОНАСС // Космические аппараты и технологии. 2013. № 3–4 (6). С. 17–27.
11. Игнатович Е. И., Щекутьев А. Ф. Исследование возможностей модернизации эфемеридно-временного обеспечения КНС ГЛОНАСС с использованием межспутниковых измерений // Сборник трудов XIII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 29–31 мая 2006. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2006. С. 202–210.
12. Игнатович Е. И., Щекутьев А. Ф. Методы и алгоритмы уточнения частотно-временных параметров и синхронизации бортовых шкал навигационных КА перспективной ГЛОНАСС с использованием межспутниковых измерений // Сборник трудов XIV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 28–30 мая 2007. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2007. С. 322–331.
13. Игнатович Е. И., Щекутьев А. Ф. Результаты имитационных испытаний некоторых вариантов бортовых алгоритмов обработки межспутниковых измерений космических аппаратов ГЛОНАСС // Сборник трудов XV Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 26–28 мая 2008. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2008. С. 331–337.
14. Лукин А. Б., Чубыкин А. А., Сумерин В. В., Шаргородский В. Д. и др. Модельные оценки информационных свойств межспутниковых измерений лазерной навигационно-связной системы МЛНСС для космического эксперимента на КА ГЛОНАСС // Сборник трудов XVI Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 25–27 мая 2009. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2009. С. 259–264.
15. Чубыкин А. А., Сумерин В. В., Шаргородский В. Д., Золкин И. А., Игнатович Е. И., Щекутьев А. Ф. Новые результаты в области обработки и применения межспутниковых измерений // Сборник трудов XIX Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 28–30 мая 2012. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2012. С. 306–314.
16. Мильковский А. Г., Середин С. В., Карутин С. Н., Игнатович Е. И., Золкин И. А., Щекутьев А. Ф. Направления развития методов и средств высокоточной синхронизации шкал времени НКА ГЛОНАСС с использованием межспутниковых навигационно-связных технологий // Сборник трудов XXII Санкт-Петербургской междунар. конф. по интегрированным навигационным системам, Санкт-Петербург, Россия, 25–27 мая 2015. СПб.: ЦНИИ «Электроприбор», 2015. С. 429–438.
17. Марарескул Т. А., Гречкосеев А. К., Василенко А. В. Эксперимент по синхронизации бортовых шкал времени навигационных космических аппаратов ГЛОНАСС по взаимным межспутниковым измерениям // Радиотехника. 2013. № 6. С. 18–21.
18. Чубыкин А. А., Рой Ю. А., Корнишев О. М., Падун П. П. Использование бортовых лазерных измерительно-связных средств для повышения точности и оперативности эфемеридно-временного обеспечения спутников системы ГЛОНАСС // Электромагнитные волны и электронные системы. 2007. № 7. Т. 12. С. 25–30.
19. Дмитриев С. В. Относительность одновременности событий в лазерных измерениях с искусственными спутниками Земли // Электромагнитные волны и электронные системы. 2014. № 8. С. 38–43.
20. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. 7-е изд., испр. М.: Наука, 1988. 512 с.
21. Klioner S. A. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1992, vol. 53, no. 1, pp. 81–109.
<https://doi.org/10.1007/BF00049363>
22. *Relativistic Geodesy: Foundations and Applications*, ed. D. Puetzfeld, C. Lämmerzahl, Springer, 2019, 479 p.
23. Борисова Л. Б., Бронников К. А., Мельников В. Н. Учёт гравитационно-релятивистских эффектов при введении единой шкалы времени на Земле и в околоземном пространстве // Измерительная техника. 1988. № 5. С. 31–33.
24. Handbook. Satellite time and frequency transfer and dissemination, ITU Radiocommunication Bureau, Geneva, 2010, 199 p.
25. Брумберг В. А. Релятивистские эффекты при радиолокационных, оптических и радиоинтерферометрических измерениях // Астрономический журнал. 1981. Т. 58. № 1. С. 181–193.

References

1. Bakit'ko R. V., Boldenkov E. N., Bulavskii N. T. etc., *GLONASS. Printsipy postroeniya i funktsionirovaniya: monografiya*, Moscow, Radiotekhnika Publ., 2010, 800 p. (In Russ.)
2. Global navigation satellite system GLONASS. Interface control document. Navigation radio signal in bands L1, L2. Edition 5.1, Moscow, RSS Publ., 2008, 63 p.
3. Mal'tsev G. N., Sakulin A. N., *Proceedings of the Mozhaisky Military Space Academy*, 2011, no. 630, pp. 73–77. (In Russ.)
4. Shchekut'ev A. F., *Cosmonautics and Rocket Engineering*, 2014, no. 1, pp. 134–145. (In Russ.)
5. Bartenev V. A., Grechkoseev A. K., Marareskul T. A., *Transactions of IAA RAS*, 2007, no. 17, pp. 120–127. (In Russ.)
6. Sakulin A. N., Mal'tsev G. N., *I-Methods*, 2014, vol. 6, no. 3, pp. 10–13. (In Russ.)
7. Sumerin V. V., Chubykin A. A., Shargorodskii V. D., *GLONASS Herald*, 2012, no. 3, pp. 36–38. (In Russ.)
8. Sadovnikov M. A., Sumerin V. V., *GLONASS Herald*, 2012, no. 3, pp. 39–42. (In Russ.)
9. Shargorodskii V. D., Sumerin V. V., Dmitriev S. V., Grigor'ev V. N., *Journal Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2014, no. 8, pp. 4–10. (In Russ.)
10. Shargorodskii V. D., Kosenko V. E., Sadovnikov M. A., Chubykin A. A., Moklyak V. I., *Spacecrafts & Technologies*, 2013, no. 3–4, pp. 17–27. (In Russ.)
11. Ignatovich E. I., Schekut'ev A. F., *Research-Analysis of Opportunities of GNSS GLONASS Ephemerides-Time Maintenance Modernization Using Intersatellite Measurement System*, Proceedings

of the 13th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 29–31, 2006, pp. 202–210.

12. Ignatovich E. I., Schekut'ev A. F., *Methods and Algorithms of Frequency-Time Parameters Refinement and Onboard Clock Synchronization for Modernized GNSS Glonass Spacecrafts with Use of Intersatellite Measurements*, Proceedings of the 14th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 28–30, 2007, pp. 322–331.

13. Ignatovich E. I., Schekut'ev A. F., *Simulations results of some variants of onboard intersatellite measurements processing algorithms for GLONASS space vehicles*, Proceedings of the 15th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 26–28, 2008, pp. 331–337.

14. Lukin A. B., Chubykin A. A., Sumerin V. V., Shargorodskii V. D., Zolkin I. A., Ignatovich E. I., Schekut'ev A. F., *Model Estimation of Intersatellite Measurements Information Features of Laser Navigation-Link System ISLNLs for Space Experiment 2009 on 2 SC GLONASS*, Proceedings of the 16th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 25–27, 2009, pp. 259–264.

15. Chubykin A. A., Sumerin V. V., Shargorodskii V. D., Zolkin I. A., Ignatovich E. I., Schekut'ev A. F., *New Results in the Field of Processing and Using Intersatellite Measurements*, Proceedings of the 19th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 28–30, 2012, pp. 306–314.

16. Milkovskiy A. G., Seredin S. V., Karutin S. N., Ignatovich E. I., Zolkin I. A., Schekut'ev A. F., *Lines of Development of Methods and Means of GLONASS SVs Time Scales High Accuracy Synchronization Using Intersatellite Navigation-Link Technologies*, Proceedings of the 22th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, St. Petersburg, Russia, CSRI Elektropribor, May 25–27, 2015, pp. 429–438.

17. Marareskul T. A., Grechkoseev A. K., Vasilenko A. V., *Radiodengineering*, 2013, no. 6, pp. 18–21. (In Russ.)

18. Chubykin A. A., Roi Yu. A., Kornishev O. M., Padun P. P., *Journal Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2007, no. 7, pp. 25–30. (In Russ.)

19. Dmitriev S. V., *Journal Electromagnetic Waves and Electronic Systems*, 2014, no. 8, pp. 38–43. (In Russ.)

20. Landau L. D., Lifshitz E. M., *The classical theory of fields (course of theoretical physics; v.2)*, Butterworth-Heinemann, 1975, 428 p.

21. Klioner S. A. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1992, vol. 53, no. 1, pp. 81–109.
<https://doi.org/10.1007/BF00049363>

22. *Relativistic Geodesy: Foundations and Applications*, ed. D. Puetzfeld, C. Lämmerzahl, Springer, 2019, 479 p.

23. Borisova L. B., Bronnikov K. A., Mel'nikov V. N., *Measurement Techniques*, 1988, vol. 31, no. 5, pp. 450–455.
<https://doi.org/10.1007/BF00864470>

24. Handbook. Satellite time and frequency transfer and dissemination, ITU Radiocommunication Bureau, Geneva, 2010, 199 p.

25. Brumberg V. A., *Soviet Astronomy*, 1981, vol. 25, Jan.-Feb., pp. 101–107.

Статья поступила в редакцию 24.12.2020; принята к публикации 03.03.2021.