

Научная статья

УДК 534.6.08

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-8-16-20>

Аналитическое представление комплексной частотной характеристики гидрофона

Александр Евгеньевич Исаев¹✉, Булат Ильгизович Хатамтаев²

Всероссийский научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений, г. п. Менделеево, Московская обл., Россия

¹isaev@vniiftri.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-0718-5234>

²bulat_3004@mail.ru

Аннотация. Рассмотрена задача аналитического представления экспериментальной комплексной частотной характеристики гидрофона на основе модели, состоящей из линии опережения и минимально-фазовой части. Модель учитывает резонансные свойства гидрофона и влияние дифракции звука на активном элементе. Предложены алгоритмы аппроксимации комплексной частотной характеристики дробно-рациональной функцией комплексной переменной по данным амплитудно-частотной и (или) фазочастотной характеристики гидрофона. Приведены примеры применения алгоритмов для обработки экспериментальных частотных характеристик измерительных гидрофонов. Полученные результаты позволят упростить калибровку и многократно сократить размерность калибровочных данных при сохранении точности, характерной для рабочих измерительных гидрофонов.

Ключевые слова: фазовая калибровка гидрофона, минимально-фазовая частотная характеристика, комплексная дробно-рациональная аппроксимация

Для цитирования: Исаев А. Е., Хатамтаев Б. И. Аналитическое представление комплексной частотной характеристики гидрофона // Измерительная техника. 2021. № 8. С. 16–20. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-8-16-20>

Analytical representation of hydrophone complex frequency response

Alexander E. Isaev¹✉, Bulat I. Khatamtaev²

Russian Metrological Institute of Technical Physics and Radio Engineering (VNIIFTRI), Mendeleevo, Moscow Region, Russia

¹isaev@vniiftri.ru✉, <https://orcid.org/0000-0002-0718-5234>

²bulat_3004@mail.ru

Abstract. The problem of analytical representation of hydrophone complex frequency response based on a model consisting of an advance line and a minimum-phase part, which describing the effect of sound diffraction and resonance properties of an active element, is considered. Algorithms are proposed for approximating the hydrophone complex frequency response by a fractional-rational function of the complex variable according to the data of the hydrophone amplitude-frequency and/or phase-frequency responses. Examples of the application of these algorithms for processing experimental frequency characteristics of hydrophones are given.

Keywords: hydrophone phase calibration, minimum-phase frequency response, complex fractional-rational approximation

Введение. В гидроакустике наметился переход от измерений энергии звуковой волны к определению точной формы акустического сигнала. Этот переход обусловил создание эталонных установок, которые наряду с традиционно используемой амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) позволяют определять фазочастотную характеристику (ФЧХ) гидрофона. Традиционная задача эталона в акустике – получение значения соответствующей физической величины для конкретной частоты, либо набора конкретных частот. Этого вполне достаточно для передачи единицы по ступеням поверочной схемы. Возможность определять

дискретные значения АЧХ и ФЧХ только на заданных частотах позволяет контролировать преобразователи, например, при их подборе для изготовления антенных решёток. Для решения задач, связанных с необходимостью восстанавливать форму акустического сигнала, требуются непрерывные АЧХ и ФЧХ. В таких случаях предпочтительно использовать аналитическое выражение комплексной чувствительности гидрофона, а не наборы данных АЧХ и ФЧХ.

Цель настоящей статьи – предложить приёмы, позволяющие представлять частотную характеристику чувствительности гидрофона аналитически в виде комплексной функции.

Аналитическое представление комплексной частотной характеристики чувствительности гидрофона. В [1] предложен способ построения модели гидрофона, состоящей из линии опережения и минимально-фазовой части, описывающей резонансные свойства гидрофона и влияние дифракции звука на активном элементе. При этом АЧХ гидрофона $M_r(f)$ не изменяется, а ФЧХ гидрофона $\varphi_r(f)$ имеет вид суммы двух составляющих:

$$\varphi_r(f) = \tilde{\varphi}_r(f) + \varphi_{л.о}(f),$$

где $\tilde{\varphi}_r(f)$ – минимально-фазовая частотная характеристика (МФЧХ) гидрофона; $\varphi_{л.о}(f)$ – фазовый набег на линии опережения.

Фазовый набег линии опережения аналитически представляет функция ka , где $k=2\pi f/c$ – волновое число; c – скорость звука; a – расстояние от поверхности активного элемента до опорной точки гидрофона [1]. Рассмотрим задачу аналитического представления частотной характеристики минимально-фазовой части модели гидрофона. В теории электрических цепей частотную характеристику минимально-фазовой системы принято описывать дробно-рациональной функцией комплексного переменного $p=jf$ [2]. Одно из преимуществ применения дробно-рациональной функции – физичность получаемого аналитического представления. Например, резонансы, найденные в результате решения дифференциального уравнения колебательного контура, являются полюсами, которые получены в результате факторизации дробно-рациональной функции.

Для аналитического представления используем идентификацию комплексной частотной характеристики чувствительности гидрофона в классе дробно-рациональных функций.

Дробно-рациональная аппроксимация по известным АЧХ и МФЧХ. Требуется представить комплексную частотную зависимость, заданную АЧХ гидрофона $M_r(f)$ и МФЧХ $\tilde{\varphi}_r(f) = \varphi_r(f) - \varphi_{л.о}(f)$ дробно-рациональной функцией

$$\frac{A(p) + a_0}{B(p) + 1} = \frac{\sum_{i=1}^M a_i p^i + a_0}{\sum_{i=1}^N b_i p^i + 1},$$

наилучшим (в смысле минимальной среднеквадратической погрешности) образом приближающей $M_r(f) \exp(j\tilde{\varphi}_r(f))$.

Без ущерба общности рассуждений в целях сокращения размерности задачи коэффициенты при нулевых степенях частоты в знаменателе и числителе дробно-рациональной функции будем считать известными. Примем эти коэффициенты равными соответственно единице и значению АЧХ, экстраполированной в сторону низких частот, на частоте нуль герц. При известных b_0, a_0 задача получения оценок $M+N$ коэффициентов $a_M, \dots, a_1; b_N, \dots, b_1$ по набору значений $M_r(f_k) \exp(j\tilde{\varphi}_r(f_k))$, $k=1, \dots, K$ ($K \geq M+N$), сводится к минимизации функционала невязки, нелинейного по искомым коэффициентам полинома знаменателя:

$$\sum_{k=1}^K \left[\frac{A(p_k) + a_0}{B(p_k) + 1} - M_r(f_k) \exp(j\tilde{\varphi}_r(f_k)) \right]^2. \quad (1)$$

В настоящее время используют различные подходы к решению задач подобного рода [3–10]. Один из таких подходов состоит в минимизации функционала методом последовательных приближений с использованием итерационной процедуры Санатанана-Кернера.

В предположении, что на итерации с номером $n-1$ получены приближенные оценки коэффициентов полинома знаменателя $b_{1n-1}, \dots, b_{Nn-1}$, из полученных коэффициентов образуют полином $B_{n-1}(p) = \sum_{i=1}^N b_{in-1} p^i + 1$. На шаге n итерационной процедуры вместо функционала невязки (1) минимизируют функционал

$$\sum_{k=1}^K \left(\frac{A(p_k) - (x_k + jy_k) B(p_k) - x_k + a_0 - jy_k}{B_{n-1}(p_k) + 1} \right)^2, \quad (2)$$

где $x_k = M_r(f_k) \cos(\tilde{\varphi}_r(f_k))$, $y_k = M_r(f_k) \sin(\tilde{\varphi}_r(f_k))$.

В выражение (2) искомые коэффициенты полиномов входят линейно, а множители $(B_{n-1}(p_k) + 1)^{-2}$ являются взвешивающими коэффициентами. Дифференцированием (2) по искомым коэффициентам получают систему нормальных уравнений, решение которой относительно оценок искомых коэффициентов $\Theta_n = (a_{1n}, \dots, a_{Mn}, b_{1n}, \dots, b_{Nn})^T$, получаемых на шаге с номером n итерационной процедуры, в матричной записи имеет вид

$$\Theta_n = [W^T S_n W]^{-1} W^T S_n H; \quad (3)$$

$$H = (x_1 - a_0, \dots, x_K - a_0, jy_1, \dots, jy_K)^T;$$

$$S_n = \text{diag} \{ (B_{n-1}(p_1) + 1)^{-2}, (B_{n-1}(p_2) + 1)^{-2}, \dots, \rightarrow \\ \rightarrow (B_{n-1}(p_K) + 1)^{-2} \};$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & p_1^2 & 0 & p_1^4 & 0 & \dots & -jy_1 p_1 & -x_1 p_1^2 & -jy_1 p_1^2 & -x_1 p_1^4 & -jy_1 p_1^5 & \dots \\ 0 & p_2^2 & 0 & p_2^4 & 0 & \dots & -jy_2 p_2 & -x_2 p_2^2 & -jy_2 p_2^2 & -x_2 p_2^4 & -jy_2 p_2^5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_K^2 & 0 & p_K^4 & 0 & \dots & -jy_K p_K & -x_K p_K^2 & -jy_K p_K^2 & -x_K p_K^4 & -jy_K p_K^5 & \dots \\ p_1 & 0 & p_1^3 & 0 & p_1^5 & \dots & -x_1 p_1 & -jy_1 p_1^2 & -x_1 p_1^3 & -jy_1 p_1^4 & -x_1 p_1^5 & \dots \\ p_2 & 0 & p_2^3 & 0 & p_2^5 & \dots & -x_2 p_2 & -jy_2 p_2^2 & -x_2 p_2^3 & -jy_2 p_2^4 & -x_2 p_2^5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_K & 0 & p_K^3 & 0 & p_K^5 & \dots & -x_K p_K & -jy_K p_K^2 & -x_K p_K^3 & -jy_K p_K^4 & -x_K p_K^5 & \dots \end{pmatrix}.$$

На первом шаге итерационной процедуры коэффициенты $b_{10}, \dots, b_{N0}$ принимают равными нулю.

Применение предложенной процедуры проиллюстрируем на примере гидрофона TC4033 (Teledyne RESON A/S, Дания). Частоту f задали в килогерцах. Данные МФЧХ получили вычитанием из экспериментальной ФЧХ фазового набег линии опережения. На рисунке представлены результаты минимизации функционала (1) при степенях полиномов числителя и знаменателя дробно-рациональной функции $M=2$ и $N=5$ соответственно. Нули и полюса дают более наглядное представление об аппроксимирующей дробно-рациональной функции в сравнении с коэффициентами полиномов. Получили решение: пара нулей $-49,88 \pm j90,93$; две пары полюсов

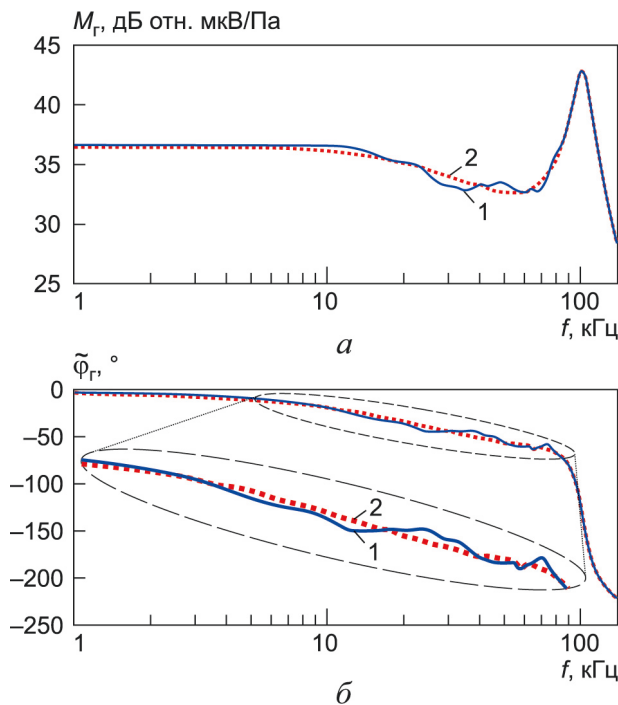
$-51,85 \pm j119,3$ и $-8,68 \pm j101,8$, расположенных симметрично относительно действительной оси комплексной плоскости; один отрицательный действительный полюс $-28,45$.

Согласно рисунку различие между экспериментальной АЧХ гидрофона 1 и её дробно-рациональной аппроксимацией 2 не превышает 0,7 дБ, что сопоставимо с погрешностями рутинных калибровок рабочих гидрофонов, а различие между МФЧХ гидрофона 1 и её дробно-рациональной аппроксимацией 2 не превышает 3° , что можно считать пренебрежимо малым.

Таким образом, комплексную частотную характеристику чувствительности гидрофона ТС4033 можно с достаточной точностью представить аналитически, используя фазовый набег на линии опережения ka и восемь параметров: константу $a_0 = M_r(0)$; два нуля (корни полинома числителя); пять полюсов (корни полинома знаменателя). Все нули и полюсы лежат в левой части комплексной плоскости – отличительное свойство минимально-фазовой системы.

Дробно-рациональная аппроксимация по известной АЧХ. Квадрат АЧХ гидрофона $M_r^2(f) = M_r(f)M_r^*(f)$ – действительная функция (* – символ комплексного сопряжения), которую можно представить отношением действительных полиномов чётных степеней переменной $p = jf$:

$$\frac{C(p) + c_0}{D(p) + 1} = \frac{\sum_{i=1}^M c_i(p)^{2i} + c_0}{\sum_{i=1}^N d_i(p)^{2i+1}}.$$



Экспериментальные (1) амплитудно-частотная (а) и минимально-фазовая частотная (б) характеристики гидрофона ТС4033 и их аппроксимации (2)

Frequency response of TC 4033 hydrophone (a), minimum-phase frequency response of TC 4033 hydrophone (b), experimental (1), approximation (2)

Без ущерба общности рассуждений, так же как и в рассмотренном выше случае обработки комплексных данных, в целях сокращения размерности задачи коэффициенты при нулевой степени частоты в знаменателе d_0 и числителе c_0 предположим известными, приняв их равными соответственно единице и квадрату АЧХ гидрофона на частоте нуль герц $M_r^2(0)$.

Оценки $M+N$ неизвестных коэффициентов $c_1, \dots, c_M, d_1, \dots, d_N$ получим минимизацией квадратичного функционала невязки:

$$\sum_{k=1}^K \left[\frac{C(p_k) + c_0}{D(p_k) + 1} - g_k \right]^2, \quad (4)$$

где $g_k = M_r^2(f_k)$, $k=1, \dots, K$ ($K \geq M+N$).

Аналогично ситуации с минимизацией функционала (1) минимум функционала (4) найдём методом последовательных приближений. На шаге с номером n итерационной процедуры вместо функционала невязки (4) будем минимизировать функционал

$$\sum_{k=1}^K \frac{1}{(D_{n-1}(p_k) + 1)^2} [C(p_k) - g_k D(p_k) - g_k + c_0]^2,$$

где $D_{n-1}(p)$ – полином с коэффициентами $d_{1,n-1}, \dots, d_{N,n-1}$, полученными на предыдущей итерации.

Выражение для оценок коэффициентов $\Theta_n = (c_{1,n}, \dots, c_{M,n}, d_{1,n}, \dots, d_{N,n})^T$ на шаге n итерационной процедуры в матричной записи имеет вид (3), где

$$H = (g_1 - c_0, g_2 - c_0, \dots, g_K - c_0)^T;$$

$$S_n = \text{diag} \{ (D_{n-1}(p_1) + 1)^{-2}, (D_{n-1}(p_2) + 1)^{-2}, \dots, \rightarrow$$

$$\rightarrow (D_{n-1}(p_K) + 1)^{-2} \};$$

$$W = \begin{pmatrix} p_1^2 & \dots & p_1^{2(M-1)} & p_1^{2M} & -g_1 p_1^2 & \dots & -g_1 p_1^{2(N-1)} & -g_1 p_1^{2N} \\ p_2^2 & \dots & p_2^{2(M-1)} & p_2^{2M} & -g_2 p_2^2 & \dots & -g_2 p_2^{2(N-1)} & -g_2 p_2^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_K^2 & \dots & p_K^{2(M-1)} & p_K^{2M} & -g_K p_K^2 & \dots & -g_K p_K^{2(N-1)} & -g_K p_K^{2N} \end{pmatrix}.$$

На первом шаге процедуры коэффициенты $d_{1,0}, \dots, d_{N,0}$ принимают равными нулю.

Процедуру применили к АЧХ гидрофона ТС4033 при $M=2$ и $N=5$. Получили решение: четыре нуля и десять полюсов, расположенных симметрично относительно нуля комплексной плоскости. Для получения комплексной аппроксимации использовали действительный полюс $-28,45$, а также пары комплексных нулей $-45,32 \pm j121,2$ и полюсов $-28,88 \pm j133,1$; $-8,21 \pm j101,9$ в левой части комплексной плоскости.

Отличия полученной дробно-рациональной аппроксимации от экспериментальной АЧХ гидрофона не превысили 0,8 дБ. Для МФЧХ наибольшие отличия составили 12° и 15° вблизи частот 75 и 140 кГц соответственно, при этом для подавляющего большинства частот отличия не превысили 6° , что вполне приемлемо для выполнения операции

деконволюции. Наблюдаемое различие решений – расхождение значений нулей и полюсов и, соответственно, ухудшение качества аппроксимации является следствием использования данных только об АЧХ. К достоинствам алгоритма относится возможность представить комплексную частотную характеристику чувствительности гидрофона аналитически без учёта ФЧХ.

Дробно-рациональная аппроксимация по известной МФЧХ. Для минимально-фазовой части комплексной частотной характеристики чувствительности гидрофона $M_r(f_k)\exp(j\tilde{\varphi}_r(f_k))$, представленной дробно-рациональной функцией

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^M a_i p^i}{1 + \sum_{i=1}^N b_i p^i},$$

запишем:

$$\frac{A(p)}{B(p)} = \frac{\operatorname{Re}[A(p)B^*(p)] + j\operatorname{Im}[A(p)B^*(p)]}{|B(p)|^2}.$$

Здесь действительная Re и мнимая Im части числителя являются, соответственно, чётной и нечётной функциями частоты:

$$\operatorname{Re}[A(p)B^*(p)] = S(f^2);$$

$$\operatorname{Im}[A(p)B^*(p)] = pT(f^2).$$

Минимально-фазовая частотная характеристика $\tilde{\varphi}_r(f)$ удовлетворяет соотношению $\operatorname{tg}(\tilde{\varphi}_r(f))/f = T(f^2)/S(f^2)$, которое представляет собой действительную дробно-рациональную функцию чётных степеней частоты.

Комплексная функция $Q(p) = [1 + j\operatorname{tg}(\tilde{\varphi}_r(f))]/[1 - j\operatorname{tg}(\tilde{\varphi}_r(f))]$ удовлетворяет соотношению

$$Q(p) = \frac{S(f^2) + pT(f^2)}{S(f^2) - pT(f^2)} = \frac{A(p)}{B(p)} \frac{B^*(p)}{A^*(p)}. \quad (5)$$

Из соотношения (5) следует, что $M_r(f_k)\exp(j\tilde{\varphi}_r(f_k))$ с точностью до действительного множителя определяется на основе выбора нулей и полюсов $Q(p)$, лежащих в левой части комплексной плоскости.

Возможны два сценария параметризации минимально-фазовой частотной характеристики в виде комплексной дробно рациональной функции.

Сценарий 1. По данным МФЧХ получают дробно-рациональную функцию $T(f^2)/S(f^2)$, из полиномов числителя и знаменателя которой строят вспомогательную функцию $Q(p)$. Для полученного выражения (5) проводят факторизацию полиномов числителя и знаменателя, отбирают нули и полюса в левой части комплексной плоскости. Таким образом, параметризацию $M_r(f_k)\exp(j\tilde{\varphi}_r(f_k))$ осуществляют путём дробно-рациональной аппроксимации данных о МФЧХ, конструирования функции $Q(p)$ и её факторизации.

Сценарий 2. По МФЧХ получают отсчёты действительной и мнимой частей функции $Q(p)$, выполняют дробно-рациональную

аппроксимацию полученного комплексного набора данных, проводят факторизацию полиномов числителя и знаменателя аппроксимирующей дробно-рациональной функции.

Заключение. Использование модели гидрофона, состоящей из линии опережения и минимально-фазовой части, описывающей влияние дифракции звука и резонансные свойства активного элемента, позволило применить методы дробно-рациональной аппроксимации для представления комплексной частотной характеристики чувствительности гидрофона аналитически по набору значений АЧХ и (или) ФЧХ. Применение предложенных приёмов представления частотной характеристики чувствительности гидрофона в виде комплексной функции позволяет многократно сократить размерность данных калибровки при сохранении точности, характерной для калибровки рабочих измерительных гидрофонов. Неоспоримое преимущество использования предложенного аналитического представления для решения задач восстановления формы акустического сигнала по принятому электрическому сигналу – возможность рассчитывать АЧХ и ФЧХ гидрофона с любым заранее заданным шагом по частоте, не прибегая к интерполяции.

Список литературы

1. Исаев А. Е., Хатамтаев Б. И. Определение фазочастотной характеристики гидрофона по его амплитудно-частотной характеристике чувствительности // Измерительная Техника. 2021. № 7. С. 48–53.
<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-7-48-53>
2. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник для бакалавров. Изд 12-е, испр. и доп. М.: Юрайт, 2014. 701 с.
3. Saptarshi Das, Indranil Pan, *Fractional order signal processing*, Springer, Berlin, 2011.
4. Duarte Valério, Manuel Duarte Ortigueira, José Sá da Costa, Identifying a transfer function from a frequency response, *Transactions of the ASME – Journal of Computational and Nonlinear dynamics*, 2008, vol. 3, no. 2, pp. 21–35.
5. Gustavsen B., Improving the pole relocating properties of vector fitting, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2006, vol. 21 (3), pp. 1587–1592.
6. Beattie C. A., Gugercin S., *Model reduction by rational interpolation*, In: Benner P., Cohen A., Ohlberger M., Willcox K. (eds.), *Model Reduction and Approximation: Theory and Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2017, 432 p.
7. Berljafa M., Güttel S., The RKFIT algorithm for nonlinear rational approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2017, vol. 39 (5), pp. 2049–2071.
8. Drmac Z., Gugercin S., Beattie C., Quadrature-based vector fitting for discretized H2 approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, vol. 37 (2), pp. A625–A652.
9. Drmac Z., Gugercin S., Beattie C., Vector fitting for matrix-valued rational approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, vol. 37 (5), pp. A2346–A2379.
10. Nakatsukasa Y., Trefethen L. N., An algorithm for real and complex rational minimax approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2020, vol. 42 (5), pp. A3157–A3179.

Reference

1. Isaev A. E., Khatamtaev B. I., *Izmeritel'naya tekhnika*, 2021, no. 7, pp. 48–53. (In Russ.) <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-7-48-53>
2. Bessonov L. A., *Teoreticheskie osnovy ehlektrotekhniki. Ehlektricheskie tsepi: uchebnik dlya bakalavrov*, 12th ed., corrected and additional, Moscow, Yurite Publ., 2014, 701 p. (In Russ.)
3. Saptarshi Das, Indranil Pan, *Fractional order signal processing*, Springer, Berlin, 2011.
4. Duarte Valério, Manuel Duarte Ortigueira, José Sá da Costa, Identifying a transfer function from a frequency response, *Transactions of the ASME -Journal of Computational and Non-linear dynamics*, 2008, vol. 3, no. 2, pp. 21–35.
5. Gustavsen B., Improving the pole relocating properties of vector fitting, *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2006, vol. 21 (3), pp. 1587–1592.
6. Beattie C. A., Gugercin S., *Model reduction by rational interpolation*, In: Benner P., Cohen A., Ohlberger M., Willcox K. (eds.), *Model Reduction and Approximation: Theory and Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 2017, 432 p.
7. Berljafa M., Güttel S., The RKFIT algorithm for nonlinear rational approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2017, vol. 39 (5), pp. 2049–2071.
8. Drmac Z., Gugercin S., Beattie C., Quadrature-based vector fitting for discretized H2 approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, vol. 37 (2), pp. A625–A652.
9. Drmac Z., Gugercin S., Beattie C., Vector fitting for matrix-valued rational approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, vol. 37 (5), pp. A2346–A2379.
10. Nakatsukasa Y., Trefethen L. N., An algorithm for real and complex rational minimax approximation, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2020, vol. 42 (5), pp. A3157–A3179.

Статья поступила в редакцию 17.03.2021; принята к публикации 01.06.2021.