

Научная статья

УДК 621.317.08:361

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-6-51-58>

Измерение резонансной частоты амплитудным и фазовым методами с помощью цифрового частотного сканирования

Валерий Яковлевич Фатеев

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия, fateev@ipu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7226-1961>

Аннотация. Проведено теоретическое и экспериментальное исследование методов измерения резонансной частоты по амплитудно-частотной и фазочастотной характеристикам резонатора (амплитудный и фазовый методы соответственно). Для определения резонансной частоты использовано цифровое частотное сканирование. На основе теории вероятностей выведены аналитические выражения, описывающие зависимости систематической и случайной погрешностей от положения резонансной частоты в интервале между ближайшими дискретными частотами, а также от уровня шума. Достоверность выведенных выражений подтверждена в ходе виртуального эксперимента с компьютерной моделью резонатора. Показано, что погрешности амплитудного и фазового методов практически совпадают для уровня шума, при котором регистрируются не более двух дискретных частот, и существенно различаются, если регистрируются более двух дискретных частот. Погрешности измерения резонансной частоты фазовым методом практически не зависят от шага перестройки частоты при уменьшении этого шага и линейно зависят от уровня фазового шума. При измерении резонансной частоты амплитудным методом погрешности уменьшаются с уменьшением шага перестройки частоты, и для этого случая предложена эмпирическая формула зависимости систематической и случайной погрешностей от шага перестройки частоты и уровня амплитудных шумов. Результаты исследования могут быть использованы при построении цифровых резонансных датчиков.

Ключевые слова: цифровое частотное сканирование, измерение, резонансная частота, амплитудно-частотная характеристика, фазочастотная характеристика, систематическая погрешность, случайная погрешность, амплитудный шум, фазовый шум

Для цитирования: Фатеев В. Я. Измерение резонансной частоты амплитудным и фазовым методами с помощью цифрового частотного сканирования // Измерительная техника. 2021. № 6. С. 51–58. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-6-51-58>

Measurement of resonance frequency by amplitude and phase methods using digital frequency scanning

Valery Ya. Fateev

Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences (IPU RAN), Moscow, Russia, fateev@ipu.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7226-1961>

Abstract. A theoretical and experimental study of methods for measuring the resonance frequency from the amplitude-frequency and phase-frequency characteristics of the resonator (amplitude and phase methods, respectively) has been carried out. In this case, digital frequency scanning was used to determine the resonant frequency. On the basis of the theory of probabilities, analytical expressions are derived that describe the dependences of systematic and random errors on the position of the resonance frequency in the interval between the nearest discrete frequencies, as well as on the noise level. The reliability of the derived expressions was confirmed in the course of a virtual experiment with a computer model of the resonator. It is also shown that the errors of the amplitude and phase methods for the noise level, at which no more than two discrete frequencies are recorded, practically coincide. However, if more than two discrete frequencies are recorded, then the indicated errors differ significantly, which is demonstrated using the experimental graphs. In this case, the errors in measuring the resonance frequency by the phase method practically do not depend on the frequency tuning step with a decrease in this step and linearly depend on the phase noise level. When measuring the resonance frequency by the amplitude method, the errors decrease with decreasing frequency tuning step, and for this case, an empirical formula is proposed for the dependence of systematic and random errors on the frequency tuning step and the amplitude noise level. The research results can be used in the construction of digital resonance sensors.

Keywords: digital frequency scanning, measurement, resonance frequency, amplitude-frequency characteristic, phase-frequency characteristic, systematic error, random error, amplitude noise, phase noise

Введение. На современном уровне развития автоматизированных систем управления технологическими процессами предъявляются высокие требования к стабильности,

надёжности и точности датчиков. В различных датчиках, например датчиках уровня, количества, температуры, давления, влажности и т. п. [1–4], как и в радиотехнических

системах, широко применяются резонаторы. Датчики могут быть построены на различных физических принципах, а их основными информативными параметрами являются резонансная (собственная) частота и добротность резонатора. Достоинством резонансных датчиков, помимо высоких стабильности, надёжности и точности является также то, что в них можно реализовать выходной сигнал измерительной информации в амплитудной, частотной и фазовой формах. Этот сигнал согласуется с электронными схемами и легко нормируется. Существует достаточное большое количество статей, посвящённых применению резонаторов и измерению их параметров (например, [5–7]), однако теоретические аспекты точности измерения этих параметров методом сканирования в данных статьях не рассматриваются.

Цель настоящей статьи – используя аппарат теории вероятностей, оценить и сравнить потенциальные погрешности измерения резонансной частоты по амплитудно-частотным (АЧХ) и фазочастотным (ФЧХ) характеристикам с помощью метода цифрового частотного сканирования (перебора) [8].

Метод цифрового частотного сканирования. Этот метод применяется в различных резонансных датчиках при дистанционных измерениях и может быть реализован по стандартной схеме цифрового резонансного датчика [9]. Этот датчик содержит основные узлы: цифровой сигнальный процессор; синтезатор частот; аналого-цифровой преобразователь; чувствительный элемент (резонатор). Такая схема является достаточно универсальной при решении множества метрологических задач, например, одновременного измерения резонансной частоты и добротности, а также

измерения нескольких резонансных частот и обработки всех параметров по различным алгоритмам. Достоинством метода сканирования является простота и возможность определения за один проход нескольких резонансов, недостатком – низкое быстродействие, которое можно повысить методом переменного шага: вначале выполняется грубый поиск с большим шагом, а в районе экстремума АЧХ или нуля ФЧХ – поиск резонанса с меньшим шагом.

При цифровом частотном сканировании на вход резонатора подается сигнал, частота которого дискретно перестраивается в заданном диапазоне. Этот сигнал генерируется с помощью синтезатора частот. С выхода резонатора снимается напряжение или разность фаз. Аналого-цифровой преобразователь преобразует напряжение или разность фаз в цифровой код, который фиксируется с соответствующими дискретными частотами в памяти цифрового сигнального процессора, формируя таким образом АЧХ или ФЧХ резонатора. Затем по максимуму АЧХ или нулю ФЧХ в цифровом сигнальном процессоре определяется резонансная частота. Основными факторами, влияющими на погрешность измерения резонансной частоты, являются следующие: дискретность и асимметрия АЧХ и ФЧХ; аддитивный шум, накладывающийся на АЧХ, или фазовый шум, влияющий на ФЧХ; переходные процессы в резонаторе. Влияние переходных процессов особенно существенно для резонаторов с высокой добротностью, и уменьшить это влияние можно путём увеличения времени фиксации АЧХ или ФЧХ.

Сигнал, поступающий на вход резонатора, представляет собой серию радиоимпульсов с частотой заполнения f_p , которая дискретно изменяется с шагом s , т. е. $f_{i+1} = f_i + s$, $i = 1, I$, I – количество генерируемых дискретных частот. В этом случае при использовании АЧХ резонансная частота f_p определяется как частота f_i , на которой наблюдается максимальная амплитуда сигнала U_i на выходе резонатора. Предположим, что $f_p \in [f_i, f_{i+1}]$, тогда $f_p = f_i$ при $U_i > U_{i+1}$ и $f_p = f_{i+1}$ при $U_i < U_{i+1}$.

При использовании ФЧХ резонансная частота определяется аналогично, за исключением того, что здесь фиксируется минимальная по модулю разность фаз между сигналом на входе резонатора и на выходе и соответствующая ей частота, которая принимается равной резонансной.

В отсутствие шумов основной погрешностью при амплитудных измерениях резонансной частоты по АЧХ и фазовых измерений по ФЧХ является систематическая погрешность дискретности δ_d :

$$\delta_d = \begin{cases} (f_i - f_p)/f_p & \text{при } U_i > U_{i+1}; \\ (f_{i+1} - f_p)/f_p & \text{при } U_i < U_{i+1}. \end{cases} \quad (1)$$

Введём параметр y , показывающий положение резонансной частоты f_p относительно середины интервала $[f_i, f_{i+1}]$, в котором предположительно находится резонансная частота, и определяемый как

$$y = (f_p - f_i - 0,5s)/s; \quad y \in [-0,5; 0,5]. \quad (2)$$

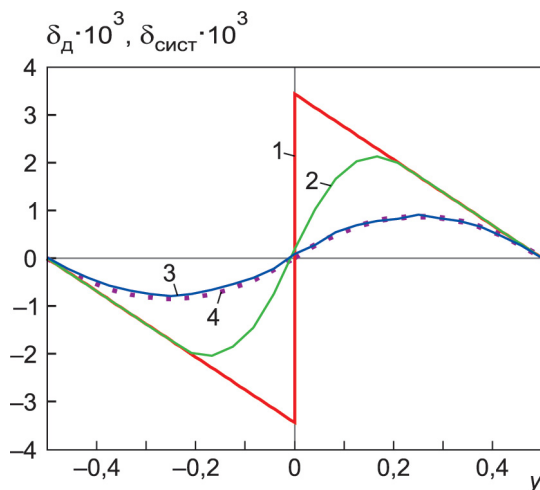


Рис. 1. Теоретические зависимости относительной погрешности дискретности $\delta_d(y)$ (1) и систематической погрешности $\delta_{\text{сист}}(y)$ (4), а также экспериментальные (2, 3) зависимости $\delta_{\text{сист}}(y)$ амплитудного и фазового методов при $s=100$ кГц: 1 – $u_{\text{max}}=0$, $\Delta f_{\text{max}}=0$; 2 – $u_{\text{max}}=0,0023$, $\Delta f_{\text{max}}=5$ кГц; 3, 4 – $u_{\text{max}}=0,023$, $\Delta f_{\text{max}}=50$ кГц

Fig. 1. Theoretical graphs of the dependences of the relative discreteness error $\delta_d(y)$ (curve 1) and the systematic error $\delta_{\text{sis}}(y)$ (curve 4), as well as experimental dependences $\delta_{\text{sis}}(y)$ (curves 2 and 3) for the amplitude and phase methods at $s=100$ kHz (1 – $u_{\text{max}}=0$, $\Delta f_{\text{max}}=0$; 2 – $u_{\text{max}}=0.0023$, $\Delta f_{\text{max}}=5$ kHz; 3, 4 – $u_{\text{max}}=0.023$, $\Delta f_{\text{max}}=50$ kHz)

Тогда выражение (1) можно переписать в виде

$$\delta_d = \begin{cases} (-2y-1)s/(2f_p) & \text{при } y \leq y'; \\ (-2y+1)s/(2f_p) & \text{при } y \geq y'. \end{cases} \quad (3)$$

В формуле (3) y' – значение y , при котором возникает разрыв функции $\delta_d(y)$. Зависимость $\delta_d(y)$ имеет пилообразный вид (рис. 1, кривая 1), максимальное по модулю значение δ_d принимает в точке y' , причём знак и значение δ_d зависят от направления приближения y к y' .

Параметр y' можно определить, используя аналитическое выражение для АЧХ резонатора $A(f_i)$ [10]:

$$A(f_i) \approx A_{\max} \left[1 + Q^2 (f_i/f_p - f_p/f_i)^2 \right]^{-1/2}, \quad (4)$$

где $A_{\max}$ – максимальное значение коэффициента передачи при резонансе; Q – добротность резонатора.

Решив уравнение $A(f_i) = A(f_{i+1})$ относительно f_p , можно получить частоту резонанса

$$f_p = \sqrt{f_i^2 + sf_i} \approx f_i \left[1 + s/(2f_i) - s^2/(8f_i^2) \right],$$

которая соответствует значению $y' \approx -s/(8f_i)$.

Теперь максимальную погрешность δ_d в точке y' при стремлении y к этой точке с разных направлений можно вычислить

$$\delta_d|_{y \rightarrow y' \pm} \approx \pm s/(2f_p) + s^2/(8f_p^2).$$

Поскольку точное значение f_p неизвестно, то и f_p , и y следует считать случайными величинами, имеющими равномерное распределение вероятности и плотность вероятности p ($p=1/s$ для f_p и $p=1$ для y). Таким образом, с учётом формулы (3) среднее значение $\delta_{d, \text{cp}}$ случайной величины δ_d и случайную погрешность дискретности $\delta_{d, \text{сл}}$ можно определить как

$$\left. \begin{aligned} \delta_{d, \text{cp}} &= \int_{-0,5}^{0,5} \delta_d dy \approx s^2/(8f_p^2); \\ \delta_{d, \text{сл}} &= \sqrt{\int_{-0,5}^{0,5} (\delta_d - \delta_{d, \text{cp}})^2 dy} \approx s/(2\sqrt{3}f_p). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Для корректного сравнения в дальнейшем различных алгоритмов целесообразно ввести среднюю по модулю систематическую погрешность $\delta_{d, \text{сист}}$, которая определяется как

$$\delta_{d, \text{сист}} = \int_{-0,5}^{0,5} |\delta_d| dy \approx s/(4f_p). \quad (6)$$

При амплитудных и фазовых шумах положение максимума АЧХ или нуля ФЧХ является случайной величиной и статистически зависит как от уровня этих шумов, так и от близости частоты f_i к f_p . Поэтому по максимуму АЧХ или нулю ФЧХ при многократном сканировании при $y = \text{const}$ можно фиксировать различные частоты f_p и резонансную частоту необходимо определять по среднему значению совокупности данных частот. В этом случае

для оценки погрешности измерения резонансной частоты необходимо использовать методы теории вероятностей.

Определение резонансной частоты по АЧХ. При дискретном сканировании амплитуда i -го радиоимпульса, поступающего на вход резонатора $U_{\text{вх}i}$, состоит из детерминированной $U_{\text{вх}}$ и случайной U'_i составляющих:

$$U_{\text{вх}i} = U_{\text{вх}} + U'_i, \quad i = \overline{1, I}. \quad (7)$$

На выходе резонатора амплитуда этих радиоимпульсов $U_{\text{вых}i}$ составляет

$$U_{\text{вых}i} = A_i U_{\text{вх}i}, \quad (8)$$

где A_i – коэффициент передачи резонатора на частоте f_i в установившемся режиме.

При каждом сканировании регистрируется максимальная амплитуда и соответствующая ей частота. Случайная составляющая амплитуды обуславливает вероятность того, что кроме частоты, ближайшей к резонансной частоте f_p , могут быть зарегистрированы и другие частоты, расположенные выше или ниже f_p . Среднее значение всех зафиксированных частот за N сканирований с некоторой погрешностью соответствует истинной резонансной частоте. Так как регистрируемые частоты f_i являются дискретными, то формулы для среднего значения M и дисперсии D регистрируемых частот по определению имеют вид

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_1^I P_i f_i; \\ D &= \sum_1^I P_i (f_i - M)^2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где P_i – вероятность фиксации частоты f_i по максимуму амплитуды.

В этом случае систематическая $\delta_{\text{сист}}$ и случайная $\delta_{\text{сл}}$ погрешности измерения резонансной частоты вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{сист}} &= (M - f_p)/f_p; \\ \delta_{\text{сл}} &= \sqrt{D}/f_p. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Вероятность P_i в общем случае определяется как

$$P_i = P(U_{\text{вых}i} > U_{\text{вых}j}); \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, I}.$$

С учётом формул (7), (8) неравенство $U_{\text{вых}i} > U_{\text{вых}j}$ можно представить в виде $u_i > d_{ji} + u_j$, где $u_{i,j} = U'_{i,j}/U_{\text{вх}}$; $d_{ji} \approx (A_j - A_i)/A_{\max}$.

Геометрически вероятность P_i можно интерпретировать как вероятность попадания точки с координатами $\{u_i, u_j\}$ в область V_i многомерного пространства размерностью $I_{\text{вер}}$, где $I_{\text{вер}}$ – вероятное количество фиксируемых по максимуму амплитуды дискретных частот. Для равномерного распределения вероятностей границы этой области должны быть заданы соотношениями

$$u_i > u_j + d_{ji}; \quad u_{i,j} = \pm u_{\max}; \quad i \neq j; \quad i, j = \overline{1, I_{\text{вер}}},$$

где $u_{\max}$ – максимальное относительное значение шума.

В описанном выше случае вероятность P_i имеет вид

$$P_i = V_i / V,$$

где $V = (2u_{\max})^{I_{\text{вер}}}$ – объём многомерного куба размерностью $I_{\text{вер}}$.

При заданном значении $u_{\max}$ размерность $I_{\text{вер}}$ определяется из уравнения

$$2u_{\max} - A_{\max} + A_{\max} [1 - I_{\text{вер}}^2 s^2 / (2b^2)] = 0.$$

В этом уравнении $b = f_p / Q$ – ширина АЧХ резонатора на уровне 3 дБ; решая его относительно $I_{\text{вер}}$ и округляя до целого сверху, получаем

$$I_{\text{вер}} = \lceil 2b\sqrt{u_{\max}} / s \rceil.$$

Заметим, что теоретическое определение вероятности P_i при $I_{\text{вер}} > 2$ представляет сложную задачу, получаемые при этом формулы довольно громоздкие и их сложно анализировать. Поэтому в качестве примера рассмотрим теоретическое определение погрешностей измерения резонансной частоты только для $I_{\text{вер}} = 2$. В этом случае можно использовать две дискретные частоты, например f_1, f_2 . При $f_p \in [f_1, f_2]$ вероятность вычисляется по формуле

$$P_i = S_i / (8u_{\max}^2), \quad i = 1, 2,$$

где S_1 – площадь треугольника, задаваемого уравнениями прямых $u_1 = u_2 + d; u_1 = -u_{\max}; u_2 = u_{\max}$ при $d = (A_1 - A_2) / A_{\max}$ и $y \geq 0$; S_2 – площадь пятиугольника, задаваемого уравнениями $u_1 = u_2 + d; u_1 = \pm u_{\max}; u_2 = \pm u_{\max}$.

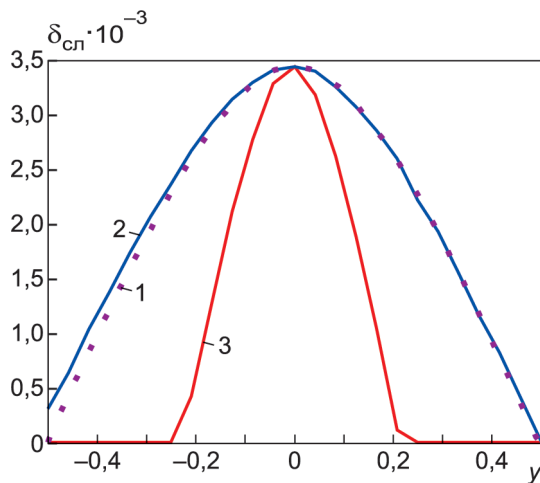


Рис. 2. Теоретическая (1) и экспериментальные (2, 3) зависимости случайной погрешности $\delta_{\text{сл}}(y)$ амплитудного и фазового методов при $s = 100$ кГц: 1, 2 – $u_{\max} = 0,023, \Delta f_{\max} = 50$ кГц; 3 – $u_{\max} = 0,0023, \Delta f_{\max} = 5$ кГц

Fig. 2. Theoretical (curve 1) and experimental (curves 2, 3) graphs of the dependence of the random error $\delta_r(y)$ for the amplitude and phase methods at $s = 100$ kHz (1, 2 – $u_{\max} = 0.023, \Delta f_{\max} = 50$ kHz; 3 – $u_{\max} = 0.0023, \Delta f_{\max} = 5$ kHz)

Таким образом, вероятности P_1, P_2 запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (2u_{\max} - d)^2 / (8u_{\max}^2); \\ P_2 &= 1 - P_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Если $y \leq 0$, то в формулах (11) индексы при P изменяются на противоположные.

Параметр d можно найти путём разложения коэффициента передачи (4) в ряд Тейлора относительно переменной f_i в точке f_p :

$$A(f_i) \approx A_{\max} [1 - 2(f_i - f_p)^2 / b^2 + 2(f_i - f_p)^3 / (b^2 f_p)].$$

С учётом формулы (2) запишем выражение

$$d = s^2 (12sy^2 + 8f_p y + s) / (2b^2 f_p),$$

подставим его в уравнения (11) и получим

$$P_1 = \frac{(4u_{\max} b^2 f_p - 8s^2 f_p y - 12s^3 y^2 - s^3)^2}{32b^4 f_p^2 u_{\max}^2}. \quad (12)$$

Затем подставим уравнения (11), (12) в (9), выведем соотношения для M, D и далее с учётом формулы (10) получим приближённые выражения для систематической и случайной погрешностей:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{сист}} &\approx y^2 \left(\frac{3s^4}{b^2 f_p^2 u_{\max}} \pm \frac{3s^7}{4b^4 f_p^3 u_{\max}^2} \pm \frac{2s^5}{b^4 f_p u_{\max}^2} \right) + \\ &+ y \left(\frac{2s^3}{b^2 f_p u_{\max}} \pm \frac{s^6}{2b^4 f_p^2 u_{\max}^2} - \frac{s}{f_p} \right) + \frac{s^4}{4b^2 f_p^2 u_{\max}}; \\ \delta_{\text{сл}} &\approx \frac{1}{f_p} \left(-\frac{4s^{10}}{b^8 u_{\max}^4} y^4 \mp \frac{8s^8}{b^6 u_{\max}^3} y^3 - \frac{4s^6}{b^4 u_{\max}^2} y^2 \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{s^7}{b^4 f_p u_{\max}^2} y + \frac{s^2}{4} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Здесь для двойных знаков « $\pm$ » или « $\mp$ » верхний знак соответствует $y < 0$, нижний – $y > 0$. Выражения (13) справедливы для $|d| < 2u_{\max}$ или

$$|y| \leq y_1 = (-2f_p s + \sqrt{4f_p^2 s^2 - 3s^4 + 6su_{\max} b^2 f_p}) / (6s^2).$$

Если $|d| > 2u_{\max}$, то для $y_1 \leq y \leq 0,5$ имеем $\delta_{\text{сист}} = \delta_d$, и $\delta_{\text{сист}}$ вычисляется по формуле (3), при этом $\delta_{\text{сл}} = 0$. Этот случай иллюстрируют рис. 1 (кривая 2) и рис. 2 (кривая 3).

Если в формулы (13) подставить $u_{\max} = s^2 / b^2$, что соответствует равенству $d = 2u_{\max}$, и затем пренебречь членами, начиная с $(s/f_p)^2$ и до более высокой степени, то без существенной потери в точности формулы (13) можно представить в более простом виде

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{сист}} &\approx s(\pm 2y^2 + y) / f_p; \\ \delta_{\text{сл}} &\approx s \sqrt{-4y^4 \mp 8y^3 - 4y^2 \pm sy / f_p + 1/4} / f_p; \\ y &\in [-0,5; 0,5]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Построенные по формулам (14) графики теоретических зависимостей $\delta_{\text{сист}}(y)$, $\delta_{\text{сл}}(y)$ представлены соответственно на рис. 1 (кривая 4) и рис. 2 (кривая 1).

Следует заметить, что выражения (13), (14) характеризуют погрешности $\delta_{\text{сист}}$, $\delta_{\text{сл}}$ только в точке y . Поэтому с учётом случайного характера f_p по аналогии с (5), (6) целесообразно также определить среднюю систематическую погрешность $\delta_{\text{сист}}^{\text{ср}}$, среднюю по модулю систематическую погрешность $\delta_{\text{сист}}^{\text{м}}$ и среднюю квадратическую случайную погрешность $\delta_{\text{сл}}^{\text{кв}}$:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{сист}}^{\text{ср}} &= \int_{-0,5}^{0,5} \delta_{\text{сист}} dy \approx 3s^2 / (16f_p^2); \\ \delta_{\text{сист}}^{\text{м}} &= \int_{-0,5}^{0,5} |\delta_{\text{сист}}| dy \approx s / (12f_p); \\ \delta_{\text{сл}}^{\text{кв}} &= \sqrt{\int_{-0,5}^{0,5} \delta_{\text{сл}}^2 dy} \approx 0,34s / f_p. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Определение резонансной частоты по ФЧХ. При фазовом измерении резонансной частоты при каждом сканировании на выходе резонатора регистрируются минимальная по модулю разность фаз между сигналами на входе и выходе резонатора $\Phi(f_i + \Delta f_i)$ и соответствующая этому минимуму частота f_i . Частотные флуктуации сигнала синтезатора учитываются случайной величиной Δf_i , которая характеризует нестабильность частоты синтезатора. Вероятность P_i фиксации частоты f_i в качестве резонансной определим как

$$P_i = P(|\Phi(f_i + \Delta f_i)| \leq |\Phi(f_j + \Delta f_j)|), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, I},$$

где неравенство в скобках представим в виде

$$|\Phi_i + \varphi_i| \leq |\Phi_j + \varphi_j|. \quad (16)$$

В неравенстве (16) Φ_i , Φ_j и φ_i , φ_j – детерминированные и случайные составляющие разности фаз, соответствующие частотам f_i , f_j .

Как и для амплитудного метода, наиболее простые выражения для погрешностей получаются, если по минимуму фазы при $f_p \in [f_1, f_2]$ в качестве резонансной фиксируется только одна из двух частот f_1 или f_2 , что справедливо при максимальном значении частотных флуктуаций $\Delta f_{\text{max}} \leq s/2$. Тогда неравенство (16) можно переписать в виде $\varphi_1 \leq d - \varphi_2$, где $d = -\Phi_2 - \Phi_1$.

Параметр d можно определить из выражения для ФЧХ [10]:

$$\Phi(f_i) \approx -\text{arctg}[Q(f_i/f_p - f_p/f_i)],$$

которое с помощью разложения функции $\Phi(f)$ в ряд Тейлора целесообразно представить в виде степенного полинома

$$\Phi(f) \approx -2(f - f_p)/b + (f - f_p)^2 / (bf_p),$$

и записать d как

$$d = -4sy/b - s^2(2y^2 + 0,5) / (bf_p). \quad (17)$$

Определение вероятностей P_i для фазового метода аналогично описанному выше для амплитудного метода. Выражения для P_i подобны формулам (11), в которых u_{max} заменено на максимальное значение фазового шума φ_{max} и учтено, что $d \geq 0$ при $y \leq 0$:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= (2\varphi_{\text{max}} - d)^2 / (8\varphi_{\text{max}}^2); \\ P_2 &= 1 - P_1; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\varphi_{\text{max}} = \Phi(f_p - s/2) - \Phi(f_p) \approx s/b + s^2 / (4bf_p).$$

Для $y \geq 0$ ($d \leq 0$) в формулах (18) числовые индексы изменяются на противоположные.

Подставим в формулы (9), (10) выражения (17), (18) и получим приближённые соотношения для систематической и случайной погрешностей фазового метода:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\text{сист}} &\approx y^2 \left(\frac{s^3}{bf_p^2 \varphi_{\text{max}}} \pm \frac{s^5}{4b^2 f_p^3 \varphi_{\text{max}}^2} \pm \frac{2s^3}{b^2 f_p \varphi_{\text{max}}^2} \right) + \\ &+ y \left(\frac{2s^2}{bf_p \varphi_{\text{max}}} \pm \frac{s^4}{2b^2 f_p^2 \varphi_{\text{max}}^2} - \frac{s}{f_p} \right) + \frac{s^3}{4bf_p^2 \varphi_{\text{max}}}; \\ \delta_{\text{сл}} &= \frac{s}{f_p} \left(-\frac{4s^4}{\varphi_{\text{max}}^4 b^4} y^4 \mp \frac{8s^3}{\varphi_{\text{max}}^3 b^3} y^3 - \frac{4s^2}{\varphi_{\text{max}}^2 b^2} y^2 \pm \right. \\ &\left. \pm \frac{s^3}{f_p \varphi_{\text{max}}^2 b^2} y + \frac{1}{4} \right)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Здесь для двойных знаков верхний знак соответствует $y \leq 0$, а нижний – $y \geq 0$.

Следует заметить, что если по аналогии с амплитудным методом в систему (19) подставить $\varphi_{\text{max}} = s/b$ и пренебречь затем малозначимыми членами, то соотношения (19) совпадут с формулами (14).

Компьютерное моделирование метода сканирования.

При исследовании метода сканирования с учётом особенностей реальных чувствительных элементов (резонаторов) более продуктивным и менее затратным по времени может быть метод численного моделирования, реализуемый, например, на базе Matlab. Преимуществом такого подхода является возможность учёта множества нюансов реального объекта (влияние цепей связи, нагрузки, потерь в резонаторе и т. п.), которые существенно усложняют теоретическую модель объекта и соответствующие формулы для расчёта погрешностей $\delta_{\text{сист}}$ и $\delta_{\text{сл}}$. Поэтому для оценки погрешностей метода сканирования, учёта различных влияющих факторов и проверки полученных теоретических формул проведён виртуальный эксперимент.

В среде Matlab создана модель резонатора в виде параллельного LC-контра, который с помощью конденсаторов связи и соответствующих кабелей подключён к синтезатору частот и аналого-цифровому преобразователю. Номиналы элементов LC-контра следующие: индуктивность $L = 5$ нГн; ёмкость $C = 20$ пФ; сопротивление потерь $R = 20$ Ом. Этот контур подключён к нагрузке $R_n = 75$ Ом и источнику сигнала с внутренним сопротивлением $R_{\text{вн}} = 75$ Ом

через ёмкости связи $C_c=2$ пФ. По этим номинальным значениям рассчитаны точные значения параметров резонатора $f_{p,э}=14,54$ МГц, $Q=22,22$, $A_{max}=0,0264$, которые приняты за эталонные.

Методика экспериментальных исследований при определении резонансной частоты по АЧХ.

1. Для заданного значения s формируется массив дискретных частот $\{f_{ik}\}$, $i=1, I$, $k=1, K$; K – заданное количество дискретных значений u .

2. Для этого массива частот рассчитывается массив значений АЧХ данного резонатора $\{A_{ik}\}$. Для рассматриваемого случая заданы входной сигнал $U_{вх}=1$ В и несколько значений максимального относительного амплитудного шума u_{max} и затем программно сгенерирован имитирующий амплитудный шум массив случайных чисел размерностью $I \times K \times N$ (N – количество сканирований), равномерно распределённых в интервале $(-u_{max}, u_{max})$.

3. Шум суммируется с входным сигналом и затем рассчитывается массив значений выходного сигнала $\{U_{вых}\}$ размерностью также $I \times K \times N$.

4. В массиве $\{U_{вых}\}$ вдоль размерности I находятся максимумы и соответствующие им экспериментальные резонансные частоты f_{pkn} .

5. Определяется среднее значение $M[f_p]$ для каждого значения u путём усреднения частот f_{pkn} вдоль размерности N :

$$M[f_p] = \sum_{n=1}^N f_{pkn} / N.$$

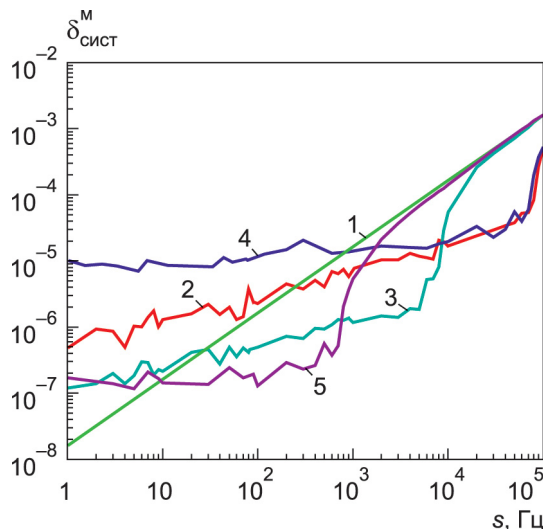


Рис. 3. Экспериментальные зависимости средней по модулю систематической погрешности $\delta_{сис}^M$ от шага перестройки частоты s для амплитудного (1–3) и фазового (1, 4, 5) методов и различных значений u_{max} (1 – 0; 2 – 0,023; 3 – 0,00023) и Δf_{max} (1 – 0; 4 – 50 кГц; 5 – 500 Гц)

Fig. 3. Experimental graphs of the dependence of the modulus-average systematic error δ_{sis} on the frequency tuning step s for the amplitude (curves 1–3) and phase (curves 1, 4, 5) methods and different values of u_{max} (1 – 0; 2 – 0.023; 3 – 0.00023) and Δf_{max} (1 – 0; 4 – 50 kHz; 5 – 500 Hz)

6. Для каждого значения u вычисляются систематическая $\delta_{сис}(y)$ и случайная $\delta_{сл}(y)$ погрешности определения резонансной частоты по формулам

$$\delta_{сис}(y) = (M[f_p] - f_{p,э}) / f_{p,э};$$

$$\delta_{сл}(y) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (f_{pkn} - M[f_p])^2 N^{-1}} / f_{p,э}$$

и строятся графики зависимостей $\delta_{сис}(y)$ и $\delta_{сл}(y)$ (см. соответственно рис. 1, 2, кривые 2, 3) для различных значений u_{max} .

7. Для определения зависимостей $\delta_{сис}^M(s)$ и $\delta_{сл}^{KB}(s)$ задаётся набор значений s и для каждого s определяются погрешности

$$\delta_{сис}^M = \sum_{k=1}^K |\delta_{сис}^{Mk}| / K;$$

$$\delta_{сл}^{KB} = \sum_{k=1}^K |\delta_{сл}^{KBk}| / K.$$

Затем строятся графики зависимостей $\delta_{сис}^M(s)$ (рис. 3, кривые 1–3) и $\delta_{сл}^{KB}(s)$ (рис. 4, кривые 1, 2) для различных значений u_{max} .

Алгоритм определения резонансной частоты по ФЧХ отличается от алгоритма для АЧХ только в пп. 1, 2, 4.

1. Задаётся массив $\{f_{ikn}\}$, каждый элемент которого представляет собой сумму детерминированной f_{ikn} и шумовой Δf_{ikn} составляющих.

2. Для массива $\{f_{ikn}\}$ рассчитывается соответствующий массив фаз $\{\Phi_{ikn}\}$.

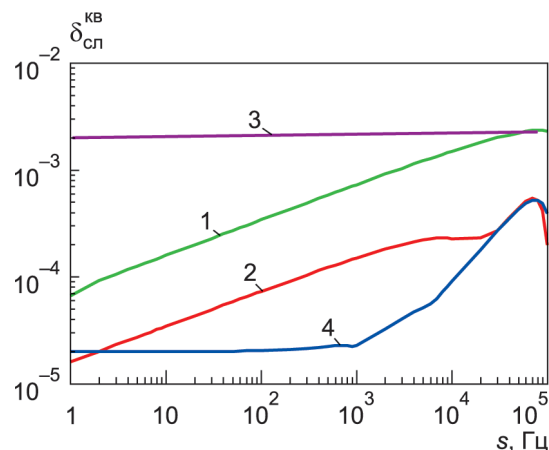


Рис. 4. Экспериментальные графики зависимости средней квадратической случайной погрешности $\delta_{сл}^{KB}$ от шага перестройки частоты s для амплитудного (1, 2) и фазового (3, 4) метода и различных значений u_{max} (1 – 0,023; 2 – 0,00023) и Δf_{max} (3 – 50 кГц; 4 – 500 Гц)

Fig. 4. Experimental graphs of the dependence of the mean square random error δ_{msr} on the frequency tuning step s for the amplitude (curves 1, 2) and phase (curves 3, 4) methods and different values of u_{max} (1 – 0.023; 2 – 0.00023) and Δf_{max} (3 – 50 kHz; 4 – 500 Hz)

3. В массиве $\{\Phi_{ikn}\}$ вдоль размерности I находятся минимумы модуля фазы Φ_{ikn} и соответствующие им частоты f_{pkn} .

Далее повторяются пп. 5–7 и определяются зависимости $\delta_{\text{сист}}^M(s)$ (см. рис. 3, кривые 1, 4, 5) и $\delta_{\text{сл}}^{KB}(s)$ (см. рис. 4, кривые 3, 4) для фазового метода при различных значениях Δf_{max} .

Анализ результатов исследования. Сравнение выражений (13), (19) для погрешностей измерения резонансной частоты соответственно амплитудным и фазовым методами показывает, что (несмотря на некоторое различие) они практически совпадают для значений $s \geq b\sqrt{u_{\text{max}}}$, $s < 0,2\Delta f_{\text{max}}$ для амплитудного и фазового методов соответственно.

На рис. 1, 2 наблюдается совпадение теоретических и экспериментальных кривых, что подтверждает достоверность выбранной теоретической модели для обоих методов измерения.

Из сравнения кривых 1 (отсутствие шумов) и 2–5 (зашумлённый сигнал) (см. рис. 3) следует, что в диапазоне шага перестройки частоты $s \approx (10^{-2} \dots 1)b\sqrt{u_{\text{max}}}$ при измерениях по АЧХ (кривые 2, 3) и $s \approx (2 \cdot 10^{-2} \dots 2)\Delta f_{\text{max}}$ при измерениях по ФЧХ (кривые 4, 5) в присутствии шумов систематическая погрешность существенно уменьшается за счёт эффекта рандомизации. Уменьшение систематической погрешности зашумлённого сигнала также следует из сравнения формул (6), (15). Для фазового метода при $s < 0,2\Delta f_{\text{max}}$ систематическая погрешность далее не изменяется и достигает предела $\delta_{\text{сист}}^M \approx 3 \cdot 10^{-3} \Delta f_{\text{max}}/f_p$, а случайная погрешность вообще не зависит от s и составляет $\delta_{\text{сл}}^{KB} \approx \Delta f_{\text{max}}/(2f_p)$ (см. рис. 3, кривые 4, 5 и рис. 4, кривые 3, 4). В отличие от фазового метода погрешности амплитудного метода снижаются при уменьшении s во всём диапазоне его изменения (см. рис. 3, кривые 2, 3 и рис. 4, кривые 1, 2). Эти кривые при $s < b\sqrt{u_{\text{max}}}/2$ можно аппроксимировать эмпирическими выражениями

$$\delta_{\text{сист}}^M \approx 3,4 \cdot 10^{-4} Q^{-0,64} \sqrt{u_{\text{max}} s / f_p};$$

$$\delta_{\text{сл}}^{KB} \approx Q^{-0,62} \sqrt{u_{\text{max}} s / f_p} / 2,3.$$

На первый взгляд исходя из сравнения кривых погрешностей на рис. 3, 4 фазовый метод по точности проигрывает амплитудному. Однако необходимо иметь в виду, что фазовые шумы можно значительно уменьшить выбором синтезатора с более стабильной (например, 10^{-5} – 10^{-7}) частотой, в то время как уменьшить амплитудные шумы обычно не представляется возможным, так как эти шумы зависят не только от электронных компонентов, но и от линий связи и внешних помех. Поэтому выбор какого-либо метода измерения можно сделать только после анализа существующих условий измерения.

Заключение. Полученные результаты – теоретические формулы и экспериментальные кривые для систематической и случайной погрешностей – позволяют при известных параметрах резонатора и условиях измерения выбрать наиболее подходящий метод измерения резонансной частоты и оптимальные значения шага перестройки частоты для получения минимальной погрешности, что может быть использовано при построении цифровых резонансных датчиков.

При исследованиях амплитудного и фазового методов измерения резонансной частоты выявлен эффект рандомизации, суть которого заключается в том, что при определённом соотношении уровней амплитудных и фазовых шумов, шага перестройки частоты и полосы пропускания резонатора систематическая погрешность может быть существенно уменьшена по сравнению со случаем отсутствия указанных шумов. Эффект рандомизации может быть использован для компенсации систематической погрешности путём выбора оптимальных значений параметров датчика либо (при малом уровне шума) добавления к сигналу синтезатора частот искусственного шума, программно сгенерированного цифровым сигнальным процессором.

Список литературы

1. Викторов В. А., Лункин Б. В., Совлуков А. С. Высоко-частотный метод измерения неэлектрических величин. М.: Наука, 1978. 280 с.
2. Шарапов В. М., Полищук Е. С., Кошевой Н. Д., Ишанин Г. Г., Минаев И. Г., Совлуков А. С. Датчики: Справочное пособие. М.: Техносфера, 2012. 624 с.
3. Джексон Р. Г. Новейшие датчики: Пер с англ. М.: Техносфера, 2007. 384 с.
4. Шарапов В. М., Мусиенко М. П., Шарапова Е. В. Пьезоэлектрические датчики. М.: Техносфера, 2006. 632 с.
5. Petersan P. J., Anlage S. M., *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 84, no. 6, pp. 3392–3402. <https://doi.org/10.1063/1.368498>
6. Егоров В. Н., Токарева Е. Ю. Повышение точности измерений резонансных характеристик // Измерительная техника. 2017. № 7. С. 20–25. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2017-7-20-25>
7. Скрасанов В. Н., Гламаздин В. В., Шубный А. И., Ерёмченко З. Е. Аппаратно-вычислительный комплекс для измерения характеристик низко- и высокочастотных резонаторов в диапазоне 26...37,5 ГГц // Радиофизика и электроника. 2009. Т. 14, № 3. С. 389–400.
8. Лесин В. В., Лисовец Ю. П. Основы методов оптимизации. СПб: Лань, 2021. 344 с.
9. Murphy E., Slattery C., *Analog Dialogue*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 12–15. URL: <http://www.analog.com/library/analogDialogue/archives/39-08/ddsapps.pdf> (дата обращения: 01.03.2021).
10. Лосев А. К. Линейные радиотехнические цепи. М.: Высшая школа, 1971. 560 с.

References

1. Viktorov V. A., Lunkin B. V., Sovlukov A. S., *Vysokochastotnyi metod izmereniya neelektricheskikh velichin* [High-frequency method for measuring non-electrical quantities], Moscow, Nauka, 1978, 280 p. (In Russ.)
2. Sharapov V. M., Polishchuk E. S., Koshevoj N. D., Ishanin G. G., Minaev I. G., Sovlukov A. S., *Datchiki: Spravochnoe posobie* [Sensors: Reference Guide], Moscow, Tekhnosfera, 2012, 624 p. (In Russ.)

3. Jackson R. G., *Novel Sensors and Sensing*, Institute of Physics Publishing, 2004.
4. Sharapov V. M., Musienko M. P., Sharapova E. V., *Pezoelektricheskie datchiki [Piezoelectric sensors]*, Moscow, Tekhnosfera, 2006, 632 p. (In Russ.)
5. Petersan P. J., Anlage S. M., *Journal of Applied Physics*, 1998, vol. 84, no. 6, pp. 3392–3402. <https://doi.org/10.1063/1.368498>
6. Egorov V. N., Tokareva E. Yu., *Measurement Techniques*, 2017, vol. 60, no. 7, pp. 676–683. <https://doi.org/10.1007/s11018-017-1253-9>
7. Skresanov V. N., Glamazdin V. V., Shubnyi A. I., Eremenko Z. Ye., *Telecommunications and Radio Engineering*, 2011, vol. 70, no. 7, pp. 625–647. <https://doi.org/10.1615/TelecomRadEng.v70.i7.70>
8. Lesin V. V., Lisovets Yu. P., *Osnovy metodov optimizatsii [Basics of optimization techniques]*, St. Petersburg, Lan', 2021, 344 p. (In Russ.)
9. Murphy E., Slattery C., *Analog Dialogue*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 12–15, available at: <http://www.analog.com/library/analogDialogue/archives/39-08/ddsapps.pdf> (accessed: 01.03.2021).
10. Losev A. K., *Lineinye radiotekhnicheskie tsepi [Linear radio circuits]*, Moscow, Vysshaya shkola, 1971, 560 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 11.03.2021; принята к публикации 14.04.2021.