

Приближённые методы решения амплитудно-фазовой проблемы для непрерывных сигналов

Илья Владимирович Бойков¹, Яна Валерьевна Зелина²✉

^{1, 2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹i.v.boikov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>

²zelinayana@gmail.com✉

Аннотация. Рассмотрены амплитудная и фазовая проблемы в физических исследованиях. Проанализировано построение методов и алгоритмов решения амплитудной и фазовой проблем без привлечения дополнительной информации о сигнале и его спектре. Предложены математические модели амплитудной и фазовой проблем в случае одномерных и двумерных непрерывных сигналов и найдены приближённые методы их решения. Модели основаны на использовании аппарата нелинейных сингулярных и бисингулярных интегральных уравнений. Амплитудная и фазовая задачи смоделированы соответствующими нелинейными сингулярными и бисингулярными интегральными уравнениями, определёнными на числовой оси (в одномерном случае) и на плоскости (в двумерном случае). Для решения построенных нелинейных сингулярных и бисингулярных интегральных уравнений использованы сплайн-коллокационные методы и метод механических квадратур. Системы нелинейных алгебраических уравнений, возникающие в ходе применения данных методов, решены непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений. На модельном примере показана эффективность предложенного метода решения фазовой проблемы в двумерном случае.

Ключевые слова: амплитудно-фазовая проблема, непрерывные сигналы, преобразование Гильберта, нелинейные сингулярные интегральные уравнения, численные методы

Для цитирования: Бойков И. В., Зелина Я. В. Приближённые методы решения амплитудно-фазовой проблемы для непрерывных сигналов // Измерительная техника. 2021. № 5. С. 37–46. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-5-37-46>

Approximate methods of solving amplitude-phase problem for continuous signals

Ilia V. Boikov¹, Yana V. Zelina²✉

^{1, 2} Penza State University, Penza, Russia

¹i.v.boikov@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>

²zelinayana@gmail.com✉

Abstract. Amplitude and phase problems in physical research are considered. The construction of methods and algorithms for solving phase and amplitude problems is analyzed without involving additional information about the signal and its spectrum. Mathematical models of the amplitude and phase problems in the case of one-dimensional and two-dimensional continuous signals are proposed and approximate methods for their solution are constructed. The models are based on the use of nonlinear singular and bisingular integral equations. The amplitude and phase problems are modeled by corresponding nonlinear singular and bisingular integral equations defined on the numerical axis (in the one-dimensional case) and on the plane (in the two-dimensional case). To solve the constructed nonlinear singular and bisingular integral equations, spline-collocation methods and the method of mechanical quadratures are used. Systems of nonlinear algebraic equations that arise during the application of these methods are solved by the continuous method of solving nonlinear operator equations. A model example shows the effectiveness of the proposed method for solving the phase problem in the two-dimensional case.

Keywords: amplitude-phase problem, continuous signal, nonlinear singular integral equations, numerical methods

Введение. При решении многих задач в оптике, радиоэлектронике, геофизике и других областях физики и технологий возникает фазовая проблема, когда по известной амплитуде спектра сигнала требуется определить фазу спектра сигнала. Фазовую проблему решают [1–4] различными методами, реализация которых требует дополнительной

информации о сигнале и (или) его спектре. Аналогичная ситуация имеет место при решении амплитудной проблемы, т. е. при нахождении амплитуды спектра сигнала по фазе спектра сигнала. В настоящей работе рассматриваются как фазовая, так и амплитудная проблемы, поэтому будем говорить о решении амплитудно-фазовой проблемы. Отметим

особую важность решения амплитудно-фазовой проблемы в информационно-измерительной технике и в задачах автоматического управления [1, 2]. В ряде случаев при исследовании линейных стационарных систем передаточная функция $\Phi(j\omega)$ восстанавливается по амплитудной $A(\omega)$ или фазовой $\varphi(\omega)$ характеристике, где ω – частота сигнала.

Исследования амплитудно-фазовой проблемы в задачах информационно измерительной техники и теории управления начались в середине прошлого века [1], когда методом преобразования Гильберта исследовались одномерные задачи. В одномерном случае амплитудно-фазовая задача имеет решение, выраженное сингулярным интегралом, если известно, что преобразование Фурье исходного сигнала не имеет корней в верхней (нижней) полуплоскости комплексной переменной. В противном случае необходима информация о расположении нулей Фурье-преобразования. Еще больше трудностей возникает при решении амплитудно-фазовой проблемы в двумерном случае [4]. Амплитудно-фазовая проблема далека от полного её решения даже в одномерном случае, остаются открытыми как теоретические, так и прикладные вопросы [4].

Особенно остро фазовая проблема проявляется в оптике, так как при регистрации изображения светового поля происходит потеря важной информации о фазе рассеянной объектом световой волны. В настоящее время существует ряд методов решения фазовой проблемы с использованием различной дополнительной информации.

Большое значение решение фазовой проблемы приобретает в задачах кристаллографии, дифракции и биофизики [5–13]. Подробное изложение истории и методов решения фазовой проблемы в кристаллографии содержится в [9].

В ряде работ при решении амплитудно-фазовой проблемы в качестве дополнительной информации используются граничные значения исследуемых полей. В [5] для восстановления светового поля требуется информация о значениях фазы на границе области. Задача сводится к численному решению уравнения Гельмгольца.

В [6] получено аналитическое выражение для описания фазового градиента монохроматического света, распространяющегося строго в одном направлении. Известен [7] метод восстановления фазы, использующий информацию о начальных и конечных значениях фазы волнового спектра. Специальные методы разработаны для восстановления фазовой информации в задачах биологии и медицины [8]. Основа этих методов – кристаллография. Обзор итерационных методов решения амплитудно-фазовой проблемы дан в [14].

В известных авторам работах восстановление фазы и амплитуды спектра сигнала требует дополнительных условий.

Цель статьи – разработка методики построения математических моделей амплитудно-фазовой проблемы на основе аппарата нелинейных сингулярных интегральных уравнений (НСИУ) и нелинейных бисингулярных интегральных уравнений (НБСИУ).

Для достижения цели решены следующие задачи: предложена методика моделирования амплитудно-фазовой проблемы НСИУ для одномерного случая и НБСИУ

для двумерного случая; найдены численные методы решения уравнений, входящих в математические модели; на модельном примере продемонстрирована эффективность построенных алгоритмов.

Непрерывный метод решения операторных уравнений. Амплитудно-фазовая проблема смоделирована с помощью НСИУ и НБСИУ, для решения которых привлечены сплайн-коллокационный метод и метод механических квадратур. В результате получены системы нелинейных алгебраических уравнений.

Известно много методов решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Наиболее часто используют метод простой итерации и метод Ньютона – Канторовича. Применение метода простой итерации налагает достаточно жесткие условия. Метод Ньютона – Канторовича требует непрерывной обратимости якобиана от левой части системы уравнений. Этого недостатка лишён непрерывный метод решения нелинейных уравнений [15], который не требует обратимости якобиана при своей реализации и устойчив к возмущениям начальных значений. Поэтому непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений выбран для построения итерационных алгоритмов решения НСИУ и НБСИУ в настоящей статье.

Пусть X – банахово пространство; K – оператор, отображающий X в X ; $B(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| \leq r\}$; $S(a, r) = \{x, a \in X : \|x - a\| = r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора определяемая в [16] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая; r, h – положительные вещественные числа; I – тождественный оператор. Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}, i, j = 1, 2, \dots, n$, в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A [16]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right);$$

$$\Lambda_2(A) = \lambda_{\max}[(A + A^T)/2];$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right),$$

где A^T – транспонированная матрица; $\lambda_{\max}[(A + A^T)/2]$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T)/2$.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (1)$$

где $A: X \rightarrow X$ – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X само в себя.

Поставим уравнению (1) в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A[x(t)] - f, \quad (2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение [15].

Теорема 1. Пусть уравнение (1) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) при любом $t > 0$ выполняется неравенство $\int_0^t \Lambda\{A'[g(\tau)]\} d\tau \leq 0$;

2) справедливо неравенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda\{A'[g(\tau)]\} d\tau \leq -\alpha_g$, $\alpha_g > 0$, где A' – производная оператора A ; τ – переменная интегрирования.

Тогда решение задачи Коши (2)–(3) при t , стремящемся к бесконечности, сходится к решению x^* уравнения (1).

Постановка задачи для одномерных непрерывных сигналов. Пусть функция $f(t)$ принадлежит пространству $L_2[a, b]$, причём интервал $[a, b]$ может быть как конечным, так и бесконечным. В этом случае к функции $f(t)$ применимо преобразование Фурье:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt.$$

Функция $F(\omega)$ принадлежит пространству $L_2(-\infty, \infty)$ и связана с $f(t)$ обратным преобразованием Фурье:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Запишем $F(\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = A(\omega) \exp[i\varphi(\omega)]$, где $U(x)$, $iV(x)$ – действительная и мнимая части функции $F(\omega)$; $A(\omega)$ – модуль, $\varphi(\omega)$ – фаза функции $F(\omega)$.

Таким образом, амплитудная проблема заключается в нахождении амплитуды $A(\omega)$ по фазе $\varphi(\omega)$, фазовая – в нахождении фазы $\varphi(\omega)$ по амплитуде $A(\omega)$.

Обозначим через $F(z)$ преобразование Фурье

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{izt} dt, \quad z = x + iy, \quad -\infty < x, \quad y < \infty$$

и запишем $F(x) = U(x) + iV(x)$, где $U(x) = \operatorname{Re} F(x)$; $V(x) = \operatorname{Im} F(x)$.

Функции $U(x)$ и $V(x)$ связаны между собой преобразованием Гильберта [1, 4]:

$$\left. \begin{aligned} U(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(x) dx}{x - x_0}, \quad -\infty < x_0 < \infty; \\ V(x_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x) dx}{x - x_0}, \quad -\infty < x_0 < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если функция $F(z)$ не имеет нулей в верхней (или нижней) полуплоскости плоскости комплексной переменной Z , то известно [1] следующее решение амплитудной и фазовой проблемы:

$$\left. \begin{aligned} \ln A(x_0) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x(x-x_0)}, \quad -\infty < x_0 < \infty; \\ \varphi(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(x) dx}{x-x_0}, \quad -\infty < x_0 < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если функция $F(z)$ имеет нули $v_k, k=1, 2, \dots$ в верхней (или нижней) полуплоскости, то справедливы следующие формулы [4]:

$$\ln A(x_0) = -\frac{x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x(x-x_0)} + \frac{x_0}{\pi} \sum_k \arg \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_0 - \bar{v}_k) dx}{x(x_0 - v_k)(x-x_0)}; \quad (6)$$

$$\varphi(x_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(x) dx}{x-x_0} - \sum_k \arg \frac{x_0 - \bar{v}_k}{x_0 - v_k}, \quad (7)$$

где $\bar{v}_k$ – число, сопряжённое с v_k ; $\sum_k$ – суммирование по нулям $v_k, k=1, 2, \dots$.

Из формул (5)–(7) следует, что если известны нули функции $F(z)$, то задача сводится к вычислению интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{\tau-t} d\tau, t \in \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ – пространство вещественных чисел. Методы вычисления сингулярных интегралов изложены в [17].

Если нули не известны, то необходимо разработать аналитические и численные методы решения амплитудно-фазовой проблемы, не требующие предварительной информации о нулях функции $F(z)$.

Постановка задачи для двумерных непрерывных сигналов. Ниже представлен подход к решению двумерной амплитудно-фазовой проблемы, основанный на применении систем НСИУ.

Рассмотрим фазовую проблему. Пусть $f(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$, $\Omega = [0, 1]^2$. Запишем

$$\left. \begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) \operatorname{sgn}(x_1); \\ f(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2) \operatorname{sgn}(x_2); \\ \operatorname{sgn}(t) &= \begin{cases} 1, & t > 0; \\ -1, & t < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Известны следующие формулы [18]:

$$F[g(x) \operatorname{sgn}(x)] = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\tau)}{\tau - \omega} d\tau;$$

$$F^{-1} \left[\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\tau)}{\tau - \omega} d\tau \right] = g(x) \operatorname{sgn}(x),$$

где $G(\tau)$ – преобразование Фурье функции $g(x)$.

Применив к выражениям (8) преобразование Фурье, запишем

$$\left. \begin{aligned} F(\omega_1, \omega_2) &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1; \\ F(\omega_1, \omega_2) &= \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2. \quad (10)$$

Разделяя в (10) действительные и мнимые части, получаем [4] аналоги одномерных преобразований Гильберта по срезам

$$\left. \begin{aligned} U(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1; \\ V(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} U(\omega_1, \omega_2) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2; \\ V(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega_1, \tau_2)}{\omega_2 - \tau_2} d\tau_2. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Используем формулы (11)–(12) для построения системы НСИУ. Так как

$$F(\omega_1, \omega_2) = U(\omega_1, \omega_2) + iV(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2)e^{i\varphi(\omega_1, \omega_2)}, \text{ то}$$

$$|F(\omega_1, \omega_2)|^2 = |U(\omega_1, \omega_2)|^2 + |V(\omega_1, \omega_2)|^2 = |A(\omega_1, \omega_2)|^2. \quad (13)$$

Из (11) и (13) следует уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 = \sqrt{A^2(\omega_1, \omega_2) - U(\omega_1, \omega_2)^2}. \quad (14)$$

В уравнении (14) переменная ω_2 является параметром.

Взяв на сегменте $[-B, B]$, где B – достаточно большое число, точки $-B \leq \omega_2^1 < \omega_2^2 < \dots < \omega_2^N \leq B$, получим систему НСИУ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2^k)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 &= \sqrt{A^2(\omega_1, \omega_2^k) - U(\omega_1, \omega_2^k)^2}, \\ -\infty < \omega_1 < \infty, \quad k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Из приближённого решения системы (15) при $\omega_2 = \omega_2^k$, $k=1, 2, \dots, N$ найдём значения функции $U(\omega_1, \omega_2)$ на сетке узлов (ω_1^k, ω_2^l) , $k, l=1, 2, \dots, N$, где ω_1^k , $k=1, 2, \dots, N'$ – множество узлов коллокации, используемых при численном решении системы (15).

Заметим, что численный метод решения системы (15) описан ниже (см. первую и вторую вычислительные схемы для решения НСИУ).

Определив $V(\omega_1^k, \omega_2^l)$, $k, l=1, 2, \dots, N$ по одной из формул (11), находим

$$\varphi(\omega_1^k, \omega_2^l) = \arctg \frac{V(\omega_1^k, \omega_2^l)}{U(\omega_1^k, \omega_2^l)}, \quad k, l=1, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим амплитудную проблему. Запишем формулу $V(\omega_1, \omega_2) = U(\omega_1, \omega_2) \arctg \varphi(\omega_1, \omega_2)$ и преобразуем её с учётом (11) в следующий вид:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \omega_2)}{\omega_1 - \tau_1} d\tau_1 = U(\omega_1, \omega_2) \arctg \varphi(\omega_1, \omega_2). \quad (16)$$

В уравнении (16) ω_2 является параметром. Задав различные значения ω_2 , получим конечное множество сингулярных интегральных уравнений, зависящих от параметра ω_2 . Определив функцию $U(\omega_1, \omega_2)$ на сетке узлов (ω_1^k, ω_2^l) , $k, l=1, 2, \dots, N$, определим с использованием формулы (11) функцию $V(\omega_1, \omega_2)$ на той же сетке узлов. Запишем следующее выражение:

$$A(\omega_1^k, \omega_2^l) = [U^2(\omega_1^k, \omega_2^l) + V^2(\omega_1^k, \omega_2^l)]^{1/2}, \quad k, l=1, 2, \dots, N.$$

При численном решении амплитудной проблемы используем линейное сингулярное интегральное уравнение (16).

Рассмотрим метод решения амплитудно-фазовой проблемы, основанный на аппарате бисингулярных интегральных уравнений. В этом случае можно ослабить требования, налагаемые на функцию $f(\omega_1, \omega_2)$. Применим следующие формулы [18]:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{t-z} d\tau = \begin{cases} e^{iz\tau}, & \text{Im} z > 0, \\ 0, & \text{Im} z < 0, \end{cases} \quad \text{при } \tau > 0;$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\tau}}{t-z} d\tau = \begin{cases} 0, & \text{Im} z > 0, \\ -e^{iz\tau}, & \text{Im} z < 0, \end{cases} \quad \text{при } \tau < 0.$$

Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z_1, z_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}.$$

Функция $\Phi(z_1, z_2)$ является аналитической всюду на топологическом произведении $Z_1 \times Z_1$ комплексных плоскостей, за исключением произведения вещественных прямых $\{y_1=0\} \times \{y_2=0\} \subset Z_1 \times Z_2$. Обозначим через D_i^+ (D_i^-) верхнюю (нижнюю) полуплоскость плоскости Z_i , $i=1, 2$. Введём обозначение $D^{\pm\pm} = (D_1^{\pm} D_2^{\pm})$.

Функцию $\Phi(z_1, z_2)$ представим в виде

$$\Phi(z_1, z_2) = \begin{cases} \Phi^{++}(z_1, z_2); & (z_1, z_2) \in D^{++}; \\ \Phi^{+-}(z_1, z_2); & (z_1, z_2) \in D^{+-}; \\ \Phi^{-+}(z_1, z_2); & (z_1, z_2) \in D^{-+}; \\ \Phi^{--}(z_1, z_2); & (z_1, z_2) \in D^{--}, \end{cases}$$

где $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ – функции, аналитические в областях $D^{\pm\pm}$.

Обозначим через $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ предельные значения функций $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ при $(z_1, z_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ по путям, не пересекающим границы соответствующих октантов.

Пусть $F(\omega_1, \omega_2)$ – преобразование Фурье функции $f(t_1, t_2)$.
Запишем

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2) &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} = -\frac{1}{4\pi^2} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dt_1 dt_2 + \right. \\ &\quad + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dt_1 dt_2 + \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dt_1 dt_2 + \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2)}}{(\omega_1 - z_1)(\omega_2 - z_2)} d\omega_1 d\omega_2 \right] dt_1 dt_2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} f(t_1, t_2) e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(t_1, t_2) e^{i(z_1 t_1 + z_2 t_2)} dt_1 dt_2 = \\ &= F^{++}(z_1, z_2) + F^{+-}(z_1, z_2) + F^{-+}(z_1, z_2) + F^{--}(z_1, z_2), \end{aligned}$$

где $F^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ – преобразование Фурье функций $f_{\pm\pm}(t_1, t_2)$ (знак «\» показывает, что берём функцию в области за исключением интервала, находящегося справа от этого знака);

$$\begin{aligned} f_{++}(t_1, t_2) &= \begin{cases} f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in D^{++} \\ 0, & (t_1, t_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus D^{++} \end{cases}; \\ f_{+-}(t_1, t_2) &= \begin{cases} -f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in D^{+-} \\ 0, & (t_1, t_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus D^{+-} \end{cases}; \end{aligned}$$

$$f_{-+}(t_1, t_2) = \begin{cases} -f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in D^{-+} \\ 0, & (t_1, t_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus D^{-+} \end{cases};$$

$$f_{--}(t_1, t_2) = \begin{cases} f(t_1, t_2), & (t_1, t_2) \in D^{--} \\ 0, & (t_1, t_2) \in (-\infty, \infty)^2 \setminus D^{--} \end{cases};$$

Предельные значения функции $\Phi(z_1, z_2)$ при $(z_1, z_2) \rightarrow (x_1, x_2)$, $x_i \in Z_i$, $i=1, 2$ равны

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2}{(\omega_1 - x_1)(\omega_2 - x_2)} = \\ &= F^{++}(x_1, x_2) + F^{+-}(x_1, x_2) + F^{-+}(x_1, x_2) + F^{--}(x_1, x_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2) (\operatorname{sgn} t_1) (\operatorname{sgn} t_2) e^{i(x_1 t_1 + x_2 t_2)} dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

После этих подготовительных выкладок вернемся к фазовой проблеме.

Пусть известно, что исследуемый сигнал $f(t_1, t_2)$ расположен в первом и третьем (или во втором и четвёртом) октантах. Применив преобразование Фурье к тождеству $f(t_1, t_2) = f(t_1, t_2) (\operatorname{sgn} t_1) (\operatorname{sgn} t_2)$, получим

$$F(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - \omega_1)(\tau_2 - \omega_2)}.$$

Используя равенство

$$F(\omega_1, \omega_2) = U(\omega_1, \omega_2) + iV(\omega_1, \omega_2) = A(\omega_1, \omega_2) e^{i\varphi(\omega_1, \omega_2)}, \text{ запишем}$$

$$U(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - \omega_1)(\tau_2 - \omega_2)};$$

$$V(\omega_1, \omega_2) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - \omega_1)(\tau_2 - \omega_2)}.$$

Так как $A^2(\omega_1, \omega_2) = U^2(\omega_1, \omega_2) + V^2(\omega_1, \omega_2)$, то

$$\begin{aligned} A^2(\omega_1, \omega_2) &= [U(\omega_1, \omega_2)]^2 + \\ &+ \left[-\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{A^2(\tau_1, \tau_2) - U^2(\tau_1, \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - \omega_1)(\tau_2 - \omega_2)} \right]^2. \end{aligned}$$

Получено бисингулярное интегральное уравнение для определения функции $U(\omega_1, \omega_2)$. Определив функцию $U(\omega_1, \omega_2)$ и вычислив $V(\omega_1, \omega_2)$ из равенства $A^2(\omega_1, \omega_2) = U^2(\omega_1, \omega_2) + V^2(\omega_1, \omega_2)$, найдём $\varphi(\omega_1, \omega_2) = \arctg[V(\omega_1, \omega_2)/U(\omega_1, \omega_2)]$.

Отметим, что приближённые методы решения бисингулярных интегральных уравнений исследованы в [19].

Приближённое решение амплитудно-фазовой проблемы в одномерном случае. Во введении отмечено, что если в верхней полуплоскости плоскости комплексной переменной нет корней функции $F(z)$, являющейся расширением

функции $F(x)$ на плоскость Z , то решение амплитудно-фазовой проблемы сводится к приближенному вычислению сингулярного интеграла вида $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau$. Вопросам вычисления сингулярных интегралов посвящена обширная литература. В монографии [17] представлены асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления сингулярных интегралов на различных классах функций. Если неизвестно расположение нулей функции $F(z)$, то формулы (5) можно использовать как начальные значения для описываемых ниже итерационных методов.

Рассмотрим фазовую проблему в общем случае. Пусть известна амплитуда спектра $A(\omega)$. Обозначим через $F(\omega)$ спектр исходного сигнала $f(x)$. Выделим действительную и мнимую части функции $F(\omega)$: $F(\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$, где $U(\omega)$ и $V(\omega)$ связаны формулами (4). Запишем

$$A^2(\omega) = [U(\omega)]^2 + [V(\omega)]^2.$$

Выразив $V(\omega)$ через $U(\omega)$ и используя формулу (4), получим НСИУ

$$U^2(\omega_0) + \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right]^2 = A^2(\omega_0). \quad (17)$$

Уравнение (17) наряду с решением $U(\omega)$ имеет решение $-U(\omega)$. Поэтому с вычислительной точки зрения предпочтительно уравнение

$$[A^2(\omega_0) - U^2(\omega_0)]^{1/2} = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\omega) d\omega}{\omega - \omega_0} \right]. \quad (18)$$

Приближенные методы решения НСИУ нормального типа представлены в [19]. Рассмотрим несколько вычислительных схем приближенного решения уравнения (18).

Первая вычислительная схема. В [20] предложена первая вычислительная схема. Приближенное решение уравнения (18) ищем в виде

$$U_n(x) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \psi_k(x),$$

где $\psi_k(x) = 2 \left\{ 1/2 + \sum_{l=1}^n [c_l(t)c_l(t_k) + s_l(t)s_l(t_k)] \right\} / (2n+1)$;

$c_l(t) = \cos 2l \arctg t$; $s_l(t) = \sin 2l \arctg t$;

$t_k = \operatorname{tg}[k\pi/(2n+1)]$; $k = -n, n$.

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяем из системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & [A^2(t_j) - (\alpha_j)^2]^{1/2} - \left(\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \sum_{l=1}^n [-s_l(t_j)c_l(t_k) + [c_l(t_j) + (-1)^{l+1}]s_l(t_k)] \right\} \right) = 0; \\ & j = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Системе (19), согласно непрерывному методу решения операторных уравнений [15], ставим в соответствие систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_j(u)}{du} = \beta_j(u) \left\{ [A^2(t_j) - [\alpha_j(u)]^2]^{1/2} - \left[\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k(u) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left\{ \sum_{l=1}^n [-s_l(t_j)c_l(t_k) + [c_l(t_j) + (-1)^{l+1}]s_l(t_k)] \right\} \right] \right\}, \quad (20)$$

где коэффициенты $\beta_j(u) = \pm 1$, $j = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ выбираем таким образом, чтобы логарифмическая норма $\Lambda[H(u)]$ матрицы $H(u) = \{h_{ij}(u)\}$ была отрицательной ($H(u) = \{h_{ij}(u)\}$ – якобиан правой части системы (20) на векторе $\mathbf{A}(u) = (a_{-n}(u), a_{-n+1}(u), \dots, a_n(u))$).

Запишем

$$h_{jj}(u) = \beta_j(u) \left\{ -[A^2(t_j) - [\alpha_j(u)]^2]^{-1/2} \alpha_j(u) + \right. \\ \left. + \frac{2}{2n+1} \sum_{l=1}^n \{s_l(t_j)c_l(t_j) - [c_l(t_j) + (-1)^{l+1}]s_l(t_j)\} \right\}; \\ h_{ji}(u) = \beta_j(u) \left\{ \frac{2}{2n+1} \times \right. \\ \left. \times \sum_{l=1}^n \{s_l(t_j)c_l(t_i) - [c_l(t_j) + (-1)^{l+1}]s_l(t_i)\} \right\},$$

где $i, j = \overline{-n, n}$, $i \neq j$.

Заметим, что непосредственно реализовать выбор коэффициентов $\beta_j(u)$, $j = -n, -n+1, \dots, n-1, n$ в режиме реального времени затруднительно. Выбор коэффициентов реализован ниже в итерационном методе Эйлера.

Для решения системы (20) можно использовать любой численный метод решения дифференциальных уравнений. Численные эксперименты показали, что при решении уравнения (20) можно ограничиться методом Эйлера. Опишем кратко этот метод. Пусть $h > 0$ – шаг метода Эйлера. Последовательные приближения определим по формуле

$$\alpha_j(m+1) = \alpha_j(m) + h\beta_j(m) \left\{ [A^2(t_j) - [\alpha_j(m)]^2]^{1/2} - \right. \\ \left. - \left[\frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^n \alpha_k(m) \sum_{l=1}^n [-s_l(t_j)c_l(t_k) + [c_l(t_j) + (-1)^{l+1}]s_l(t_k)] \right] \right\},$$

где $j = -n, \dots, n$, $m = 0, 1, \dots$; через $\beta_j(m) = \pm 1$, $j = -n, -n+1, \dots, n-1, n$, $m = 0, 1, \dots$ обозначены значения $\beta_j(u)$ при $u = m$, т. е. на каждом шаге итерационного процесса.

Для выхода из итерационного процесса можно использовать различные критерии, в частности, выход по числу итераций или по невязке. При выходе из итерационного процесса по числу итераций предварительно фиксируем число M , вычисления проводим до тех пор, пока $m \leq M$.

При выходе из итерационного процесса по невязке вначале фиксируем значение ε допустимой невязки и определяем норму, в которой вычисляется невязка.

Наиболее информативна метрика пространства R_3 трёхмерных векторов $\mathbf{x}=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ с вещественными координатами, в которой невязка $U(m)$ на m -шаге определяется как

$$U(m)=\max_{-n \leq j \leq n} \left\{ \left[A(t_j) \right]^2 - \left[\alpha_j(m) \right]^2 \right\}^{1/2} - \left(\frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^n \alpha_k(m) \left\{ -s_l(t_j) c_l(t_k) + \left[c_l(t_j) + (-1)^{l+1} s_l(t_k) \right] \right\} \right).$$

Заметим, что обычно невязка определяется при решении линейных систем. Здесь определение невязки переносится на нелинейные системы.

Если $\Lambda(H)$ отрицательна, то при $u \rightarrow \infty$ решение системы (20) сходится к решению системы (19).

Вторая вычислительная схема. Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (18) следующим уравнением

$$\left[A^2(x_0) - U^2(x_0) \right]^{1/2} - \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-A}^A \frac{U(x) dx}{x - x_0} \right] = 0, \quad -A \leq x_0 \leq A. \quad (21)$$

Введём узлы $t_k = -A + \frac{k}{N}A$, $k=0, 1, \dots, 2N$. Обозначим через Δ_k интервалы $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k=0, 1, \dots, 2N-2$, $\Delta_{2N-1} = [t_{2N-1}, t_{2N}]$.

Приближённое решение уравнения (21) ищем в виде сплайна

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{2N-1} \alpha_k \psi_k(x),$$

$$\text{где } \psi_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Delta_k \\ 0, & x \in [-A, A] \setminus \Delta_k \end{cases}, \quad k=0, 1, \dots, 2N-1.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$, $k=0, 1, \dots, 2N-1$ определяем из системы

$$\left[A^2(\bar{t}_k) - (\alpha_k)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l \int_{\Delta_l} \frac{dx}{x - t_k} \right) = 0, \quad (22)$$

где $\bar{t}_k = t_k + A/(4N)$, $k=0, 1, \dots, 2N-1$.

Вычисляя в системе (22) интегралы, получаем:

$$\left[A^2(\bar{t}_k) - (\alpha_k)^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{\pi^2} \left[\sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l \ln \frac{4(l+1-k)-1}{4(l-k)-1} \right] = 0, \quad (23)$$

где $k=0, 1, \dots, 2N-1$.

Применение к системе (23) непрерывного операторного метода приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\alpha_k(u)}{du} &= \gamma_k(u) \left\{ \left[A^2(\bar{t}_k) - [\alpha_k(u)]^2 \right]^{1/2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\pi^2} \left[\sum_{l=0}^{2N-1} \alpha_l(u) \ln \frac{4(l+1-k)-1}{4(l-k)-1} \right] \right\}, \\ k &= 0, 1, \dots, 2N-1. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

В системе (24) коэффициенты $\gamma_k(u) = \pm 1$, $k=0, 1, \dots, 2N-1$ подбираем таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана левой части системы (23) была отрицательной. Для решения системы (24) можно применить любой численный метод.

Определяя $U(t_k)$, находим $V(t_k)$ и восстанавливаем фазу по формуле

$$\varphi(t_k) = \arctg \left\{ \left[A^2(t_k) - U^2(t_k) \right]^{1/2} / U(t_k) \right\}, \quad k=0, 1, \dots, 2N.$$

Решим амплитудную проблему. При этом исходим из однородного линейного уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi(x_0) U(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x)}{x - x_0} dx = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) является однородным линейным сингулярным интегральным уравнением, и его разрешимость зависит от индекса χ уравнения. Не имея возможности остановиться на теории сингулярных интегральных уравнений (см. [21]), отметим, что уравнение (25) при неположительном индексе χ не имеет нетривиальных решений и имеет χ линейно-независимых решений при $\chi > 0$. Так как в общем случае уравнение (25) разрешимо неоднозначно, то для его решения можно использовать непрерывный метод решения операторных уравнений [15]. Определив $U(x)$, $V(x)$ находим по формуле $V(x) = U(x) \operatorname{tg} \varphi(x)$. В результате получаем $A(x) = [U^2(x) + V^2(x)]^{1/2}$.

Приближённое решение амплитудно-фазовой проблемы в двумерном случае. Для приближённого решения амплитудно-фазовой проблемы в двумерном случае используется несколько вычислительных схем.

Выше было показано, что фазовая проблема моделируется системой одномерных НСИУ (15), где каждое уравнение зависит от параметра $\omega_2 = \omega_2^k$, $k=1, 2, \dots, N$. Каждое уравнение данной системы решается первой (или второй) вычислительной схемой, описанной для решения фазовой проблемы в одномерном случае.

Если фазовая проблема моделируется бисингулярными интегральными уравнениями, то для её решения привлекаются численные методы [19].

Модельный пример решения фазовой проблемы в двумерном случае. В качестве модельного примера рассмотрим двумерный сигнал вида

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in [-1, 2; -1, 3]; \\ 0, & (x_1, x_2) \in (-\infty; \infty)^2 \setminus [-1, 2; -1, 3]. \end{cases} \quad (26)$$

Разделив действительные и мнимые части спектра сигнала (26), получим

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_1 x_2} [(\cos 2x_1 - \cos x_1)(\cos 3x_2 - \cos x_2) - (\sin 2x_1 + \sin x_1)(\sin 3x_2 + \sin x_2)];$$

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{x_1 x_2} [(\sin 2x_1 + \sin x_1)(\cos 3x_2 - \cos x_2) + (\cos 2x_1 - \cos x_1)(\sin 3x_2 + \sin x_2)].$$

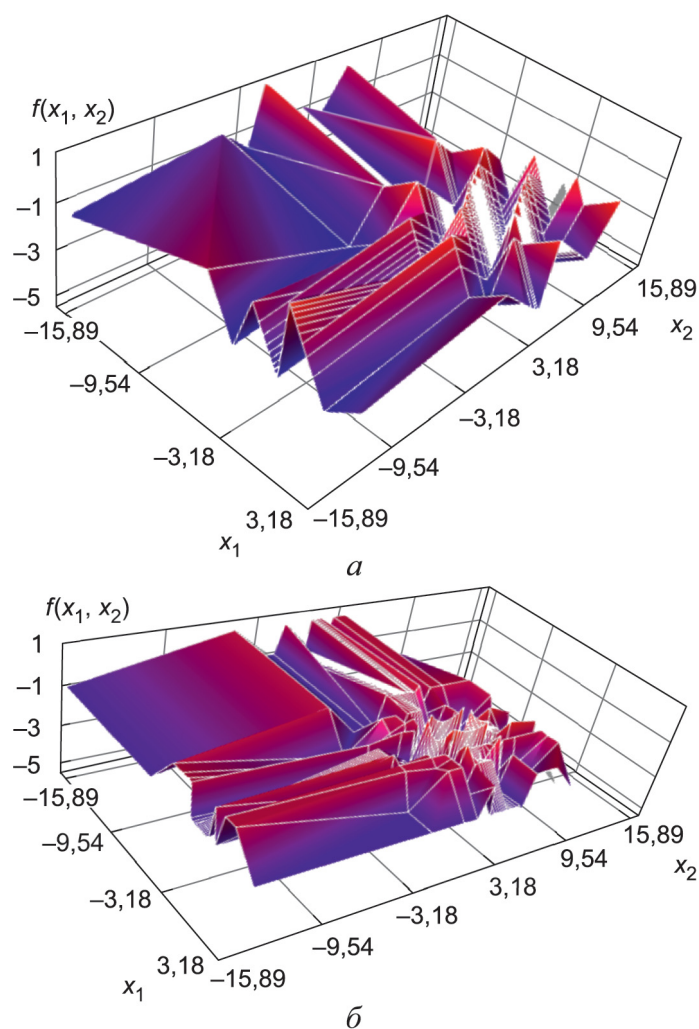


Рис. 1. Точное (а) и восстановленное методом Рунге-Кутты (б) значение фазы спектра сигнала $f(x_1, x_2)$

Fig. 1. The value of the signal $f(x_1, x_2)$ spectrum phase correct (a) and reconstructed by the Runge-Kutta method (b)

Фаза $\phi(x_1^y, x_2^w) = \arctg[V(x_1^y, x_2^w)/U(x_1^y, x_2^w)]$ и представлена на рис. 1, а.

Проведены численные эксперименты по восстановлению фазы спектра функции $f(x_1, x_2)$. Задачу моделировали системой НСИУ. Каждое уравнение системы аппроксимировали системой нелинейных алгебраических уравнений, полученной методом сплайн-коллокации. Каждую систему нелинейных алгебраических уравнений решали непрерывным методом решения нелинейных операторных уравнений.

Для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений, полученных непрерывным методом, реализовали три вычислительные схемы: 1) метод Эйлера с учётом знака логарифмической нормы только на начальном приближении; 2) метод Эйлера с учётом знака логарифмической нормы на каждом шаге итерационного процесса; 3) метод Рунге-Кутты с учётом знака логарифмической нормы на каждом шаге итерационного процесса.

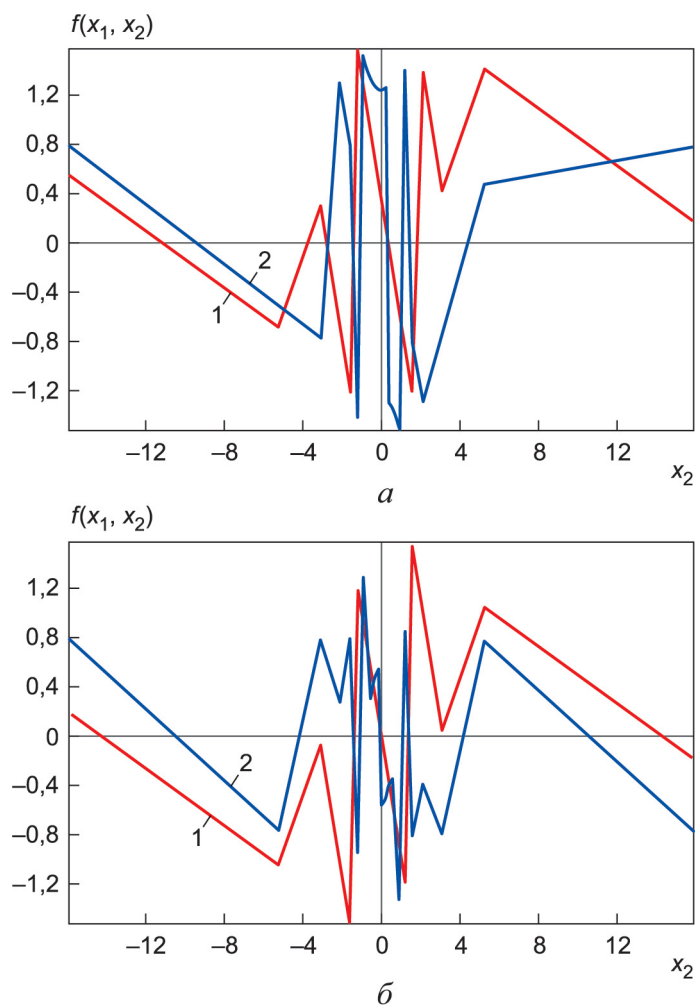


Рис. 2. Срез восстановленной фазы спектра сигнала $f(x_1, x_2)$ при фиксированных значениях x_1^7 (а), x_1^{12} (б): 1, 2 – точное и восстановленное решения соответственно

Fig. 2. Cross sections of reconstructed phase of the signal spectrum $f(x_1, x_2)$ for fixed values x_1^7 (a), x_1^{12} (b): 1, 2 – exact and reconstructed solutions respectively

На рис. 1, б представлено решение задачи восстановления фазы спектра функции $f(x_1, x_2)$, полученное методом Рунге-Кутты. Начальное приближение взято равным нулю $\alpha_0^k = 0, k = 0, 1, 2, \dots, N$. Вычисления проведены при числе узлов коллокации $N = 25$, шаге $h = 0,001$, числе итераций $m = 30$.

На рис. 2, а, б даны срезы решения, представленного на рис. 1, б при фиксированных значениях x_1^7, x_1^{12} соответственно.

Наиболее точное восстановление фазы получено при использовании метода Рунге-Кутты. Однако данный метод более трудоёмкий и требует больших временных затрат.

Объём статьи не позволяет привести результаты, полученные с применением метода Эйлера.

Из полученных результатов численных экспериментов можно сделать следующие выводы: 1) вычислительную схему, использующую метод Эйлера с учётом логарифмической нормы только на начальном значении, можно использовать для нахождения начального приближения в задачах,

в которых используется дополнительная информация, а также при решении задач, в которых уровень шума достигает –5 дБ; 2) вычислительную схему, использующую метод Эйлера с учётом логарифмической нормы на каждом шаге итерационного процесса, и вычислительную схему, использующую метод Рунге-Кутты, можно использовать для восстановления фазы спектра двумерного сигнала.

Заключение. В ходе исследования построены математические модели решения амплитудно-фазовой проблемы в одномерном и двумерном случаях. Математические модели решения фазовой проблемы в одномерном и двумерном случаях описаны нелинейными одномерными сингулярными и бисингулярными интегральными уравнениями, что дало возможность построить алгоритмы решения фазовой проблемы без привлечения дополнительных условий. Так как нелинейные сингулярные и бисингулярные интегральные уравнения не разрешимы в замкнутом виде (в виде конечного числа алгебраических действий), то найдены приближённые методы их решения. Предложенные приближённые методы решения нелинейных одномерных сингулярных и бисингулярных интегральных уравнений позволили получить численное решение фазовой проблемы без привлечения дополнительной информации.

Математические модели решения амплитудной проблемы в одномерном и двумерном случаях описаны линейными одномерными сингулярными и бисингулярными интегральными уравнениями, что дало возможность исследовать вопросы однозначной разрешимости амплитудной проблемы. Показано, что амплитудная проблема не имеет решения данным методом при неположительном индексе и имеет число линейно-независимых решений, равное величине индекса. Так как линейные сингулярные и бисингулярные интегральные уравнения разрешимы в замкнутом виде в исключительных случаях, разработаны приближённые методы решения данных уравнений. Это позволило при индексе, равном единице, построить алгоритмы решения амплитудной проблемы без привлечения дополнительных условий.

Использование методов Рунге-Кутты и Эйлера при реализации численных методов показало, что метод Рунге-Кутты следует использовать в случае, когда ищется окончательное решение амплитудно-фазовой проблемы с высокой точностью и без использования дополнительных условий, а метод Эйлера следует использовать для нахождения начальных данных при решении задач, использующих дополнительную информацию.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00594).

Список литературы

1. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М., Л.: ГИТТЛ, 1952. 368 с.
2. Пупков К. А., Егулов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5 т.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 656 с.
3. Пупков К. А., Егулов Н. Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. Учебник в 5 т.; 2-е изд., перераб. и доп. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 616 с.
4. Потапов А. А., Гуляев Ю. В., Никитов С. А., Пахомов А. А., Герман В. А. Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008. 496 с.
5. Colombo A., Galli D. E., Caro L. De; Scattarella F., Carlino E., *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, 42236. <https://doi.org/10.1038/srep42236>
6. Arnal R. D., Millane R. P., 2016 *International Conference on Image and Vision Computing New Zealand (IVCNZ)*, Palmerston North, New Zealand, 2016, November 21–22, 2016, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/IVCNZ.2016.7804432>
7. Heldt C., Bockmayr A., Geometric Constraints for the Phase Problem in X-Ray Crystallography, *WCB10. Workshop on Constraint Based Methods for Bioinformatics*, May 15, 2012, vol. 4, pp. 20–26. <https://doi.org/10.29007/p2pj>
8. Wolf E., *Physics Letters A*, 2010, vol. 374, no. 3, pp. 491–495. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.10.074>
9. Wolf E., *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2011, vol. 165, pp. 283–325. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385861-0.00007-5>
10. Teague M. R., *Journal of the Optical Society of America*, 1983, vol. 73, pp. 1434–1441. <https://doi.org/10.1364/JOSA.73.001434>
11. Kolenovic E., *Journal of the Optical Society of America*, 2005, vol. 22, pp. 899–906. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.22.000899>
12. Lewis A., Honigstein D. R., Weinroth J., Werman M., *ACS Nano*, 2012, vol. 6, pp. 220–226. <https://doi.org/10.1021/nn203427z>
13. Sheludko D. V., McCulloch A. J., Jasperse M., Quiney H. M., Scholten R. E., *Optics Express*, 2010, vol. 18, pp. 1586–1599. <https://doi.org/10.1364/OE.18.001586>
14. Налегает С. С., Петров Н. В., Беспалов В. Г. Итерационные методы решения фазовой проблемы в оптике и их особенности // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 6 (82). С. 30–35.
15. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9, С. 1308–1314.
16. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
17. Бойков И. В. Приближённые методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Часть первая. Сингулярные интегралы. Пенза: Издательство Пензенского государственного университета, 2005. 360 с.
18. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
19. Бойков И. В. Приближённое решение сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Издательство ПГУ, 2004. 316 с.
20. Boikov I., Zelina Y., Vasyunin D., 2020 *Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*, Proceedings of the International Conference, Moscow, Russia, 2020, March 11–13, IEEE, 2020, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MWENT47943.2020.9067415>
21. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

References

1. Solodovnikov V. V., *Vvedenie v statisticheskuyu dinamiku system avtomaticheskogo upravleniya* [Introduction to the statistical dynamics of automatic control systems], Moscow, Leningrad., GITTIL Publ., 1952, 368 p. (In Russ.)
2. Pupkov K. A., Egupov N. D., *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya, Uchebnik, t. 1, Matematicheskie modeli, dinamicheskie kharakteristiki i analiz system avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classical and modern theory of automatic control, textbook, vol. 1, Mathematical models, dynamic characteristics and analysis of automatic control systems], Moscow, Bauman MGTU Publ., 2004, 656 p. (In Russ.)
3. Pupkov K. A., Egupov N. D. *Metody klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya, Uchebnik, t. 3, Sintez regulyatorov system avtomaticheskogo upravleniya* [Methods of classical and modern theory of automatic control, textbook, vol. 3, Synthesis of regulators of automatic control systems], Moscow, Bauman MGTU Publ., 2004, 616 p. (In Russ.)
4. Potapov A. A., Gulyaev Yu. V., Nikitov S. A., Pakhomov A. A., German V. A., *Noveishie metody obrabotki izobrazhenii* [Latest Image Processing Techniques], Moscow, Fizmatlit Publ., 2008, 496 p. (In Russ.)
5. Colombo A., Galli D. E., Caro L. De, Scattarella F., Carlino E., *Scientific Reports*, 2017, vol. 7, 42236. <https://doi.org/10.1038/srep42236>
6. Arnal R. D., Millane R. P., *2016 International Conference on Image and Vision Computing New Zealand (IVCNZ)*, Palmerston North, New Zealand, 2016, November 21–22, 2016, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/IVCNZ.2016.7804432>
7. Heldt C., Bockmayr A., Geometric Constraints for the Phase Problem in X-Ray Crystallography, *WCB10. Workshop on Constraint Based Methods for Bioinformatics*, May 15, 2012, vol. 4, pp. 20–26. <https://doi.org/10.29007/p2pj>
8. Wolf E., *Physics Letters A*, 2010, vol. 374, no. 3, pp. 491–495. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.10.074>
9. Wolf E., *Advances in Imaging and Electron Physics*, 2011, vol. 165, pp. 283–325. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385861-0.00007-5>
10. Teague M. R., *Journal of the Optical Society of America*, 1983, vol. 73, pp. 1434–1441. <https://doi.org/10.1364/JOSA.73.001434>
11. Kolenovic E., *Journal of the Optical Society of America*, 2005, vol. 22, pp. 899–906. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.22.000899>
12. Lewis A., Honigstein D. R., Weinroth J., Werman M., *ACS Nano*, 2012, vol. 6, pp. 220–226. <https://doi.org/10.1021/nn203427z>
13. Sheludko D. V., McCulloch A. J., Jasperse M., Quiney H. M., Scholten R. E., *Optics Express*, 2010, vol. 18, pp. 1586–1599. <https://doi.org/10.1364/OE.18.001586>
14. Nalegaev S. S., Petrov N. V., Bespalov V. G., Special features of iteration methods for phase problem in optics, *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 6 (82) pp. 30–35. (In Russ.)
15. Boikov I. V., *Differential Equations*, 2012, vol. 48, pp. 1288–1295. <https://doi.org/10.1134/S001226611209008X>
16. Daletskii Yu. L., Krein M. G., *Ustoichivost' reshenii differentsial'nykh uravnenii v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in Banach space], Moscow, Nauka Publ., 1970, 534 p. (In Russ.)
17. Boikov I. V., *Priblizhennyye metody vychisleniya singulyarnykh i gipersingulyarnykh integralov, chast' pervaya, Singulyarnyye integraly* [Approximate methods for calculating singular and hypersingular integrals, part 1, Singular integrals], Penza, PSU Publ., 2005, 360 p. (In Russ.)
18. Gakhov F. D., Chersky Yu. I., *Uravneniya tipa svertki* [Convolution type equations], Moscow, Nauka Publ., 1978, 295 p. (In Russ.)
19. Boikov I. V., *Priblizhennoe reshenie singulyarnykh integral'nykh uravnenii* [Approximate Solution of Singular Integral Equations], Penza, PSU Publ., 2004, 316 p. (In Russ.)
20. Boikov I., Zelina Y., Vasyunin D., *2020 Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT)*, Proceedings of the International Conference, Moscow, Russia, 2020, March 11–13, IEEE, 2020, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1109/MWENT47943.2020.9067415>
21. Gakhov F. D., *Kraevyye zadachi* [Boundary value problems], Moscow, Nauka Publ., 1977, 640 p. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 21.12.2020; принята к публикации 10.03.2021.