

Размерности плоского и телесного углов и их единицы в Международной системе единиц

М. И. Калинин, Л. К. Исаев, Ф. В. Булыгин

Всероссийский научно-исследовательский институт метрологической службы,
Москва, Российская Федерация, e-mail: kalinin@vniims.ru,
isaev-vm@vniims.ru, fbulygin@vniims.ru

Проанализирована ситуация, сложившаяся в Международной системе единиц (СИ) в результате принятия в 1980 г. рекомендации Международного комитета мер и весов, предложившей рассматривать плоский и телесный углы как безразмерные производные величины. Показано, что основанием для такого решения стало неправильное понимание математической формулы, связывающей длину дуги окружности с её радиусом и соответствующим центральным углом, а также разложений тригонометрических функций в ряды. Из проведённого анализа следует, что величина плоский угол не зависит ни от одной величины СИ и должна быть отнесена к основным величинам, а её единицу – радиан – необходимо включить в совокупность основных единиц СИ. Величина телесный угол при этом оказывается производной величиной от плоского угла, его единица –стерадиан – является когерентной производной единицей, равной радиану в квадрате.

Ключевые слова: основные величины, производные величины, плоский угол, телесный угол, основные единицы, производные единицы, радиан, стерадиан.

Введение. Величинам «плоский угол» и «телесный угол» изначально не повезло в Международной системе единиц (СИ). СИ строилась на предложенном Гауссом принципе, который подразумевал деление всех величин и их единиц на два класса – основные и производные. Однако метрологам не удалось договориться, к какому классу отнести обе рассматриваемые величины: существовали два противоположных мнения. Вариант разнесения плоского и телесного углов и их единиц в разные классы если и был, то не нашёл поддержки. Таким образом, единицы углов были включены в третий класс – дополнительных единиц, которые не рассматривались ни как основные, ни как производные.

Неопределённый статус рассматриваемых величин вызывал непонимание и путаницу. Поскольку размерности углов считались независимыми от размерностей других величин, то углы часто считали основными величинами, а их единицы – основными единицами. Постоянно шли запросы в МКМВ о статусе этих величин и их единиц. В 1969 г. в Рекомендации МКМВ [1] было дано разъяснение: «Название «дополнительные единицы»... присвоено единицам СИ, для которых Генеральная конференция отказывается конкретизировать, являются ли они основными или производными единицами». Такая рекомендация ситуацию не прояснила, и в 1980 г. сначала Консультативный комитет по единицам (ККЕ), а затем и Международный комитет мер и весов (МКМВ) приняли Рекомендации [2, 3],

в которых предложили рассматривать дополнительные единицы – радиан и стерадиан (обозначения соответственно «рад» и «ср») – как безразмерные производные единицы СИ. Плоский и телесный углы были объявлены в СИ безразмерными производными величинами, а их единицы – радиан и стерадиан – безразмерным числом 1 [4], которое записывалось для радиана и стерадиана различным образом:

$$1 \text{ рад} = 1 \text{ м/м}, \quad 1 \text{ ср} = 1 \text{ м}^2/\text{м}^2.$$

В 1995 г. 20-я ГКМВ приняла предложение ККЕ и МКМВ, упразднив класс дополнительных единиц и перенеся радиан и стерадиан в класс производных единиц [5]. На 26-й Генеральной конференции по мерам и весам (ГКМВ) в 2018 г. были приняты новые унифицированные определения семи основных единиц СИ. Однако определения радиана и стерадиана не изменились и в 9-й редакции Брошюры СИ [6].

Какие же аргументы легли в основу изменения в 1980 г. статуса плоского и телесного углов в СИ? В метрологической литературе приведены три основных аргумента.

1) Утверждение Рекомендации 1 МКМВ 1980 г. [3]: «...в используемых уравнениях плоский угол обычно выражают как отношение двух длин, а телесный угол как отношение площади к квадрату длины, и, следовательно, эти величины рассматриваются как безразмерные величины».

2) Дополнительным аргументом для объявления плоского угла безразмерной величиной считается также разложение тригонометрических функций $\sin \theta$, $\cos \theta$ в степенные ряды по θ (см., например, [7, 8]).

3) Утверждение Рекомендации 1 МКМВ [3] о том, что возможность «трактовки радиана истерадиана как основных единиц СИ... нарушает внутреннюю согласованность СИ на основе только семи основных единиц».

Первые два утверждения лежат в основе объявления плоского и телесного углов безразмерными величинами, а их единиц – радиана истерадиана – безразмерным числом 1. Последнее утверждение послужило основанием перевода радиана истерадиана в класс производных единиц. Проанализируем обоснованность этих утверждений.

Анализ формул, лежащих в основе объявления углов безразмерными величинами. Утверждение 1 опирается на формулу, связывающую длину s дуги окружности радиуса r с центральным углом, который ограничен этой дугой:

$$s = r\theta. \quad (1)$$

Символ θ был принят метрологами за величину плоский угол [2, 3], из чего и был сделан вывод о его безразмерности. Чем же на самом деле является θ можно понять из математического вывода формулы (1). Чтобы избежать путаницы с величиной θ , обозначим центральный угол символом φ . На рис. 1 изображены центральные углы и соответствующие им дуги. Нетрудно убедиться, что изменение угла φ приводит к пропорциональному изменению длины s соответствующей дуги. Это позволяет записать пропорцию

$$\varphi/\varphi' = s/s', \quad (2)$$

которая справедлива для окружности любого радиуса.

Из (2) следует, что отношение двух длин определяет не какой-то один угол, а отношение двух углов. Пропорция (2) не накладывает никаких ограничений на размерность величины плоский угол.

Для получения формулы, связывающей длину дуги s с радиусом r , необходимо выбрать такой угол φ' , для которого значение длины дуги s' известно. В качестве φ' естественно взять полный плоский угол, соответствующий полному повороту одной стороны угла в плоскости окружности относительно второй стороны. Обозначим его символом Φ . Для такого угла $\varphi' = \Phi$ дуга s' превращается в полную окружность, длина которой известна $s' = 2\pi r$. Пропорция (2) превращается в следующее уравнение:

$$\varphi/\Phi = s/(2\pi r). \quad (3)$$

В метрологии существует специальная форма записи любой величины, предложенная Максвеллом [9] (см. также [10]):

$$\varphi = \{\varphi\}[\varphi],$$

где $[\varphi]$ – единица измерения величины φ ; $\{\varphi\}$ – численное значение величины φ (безразмерное число), выраженной в единицах $[\varphi]$.

Используя такую запись в левой части уравнения (3), перепишем его в виде

$$\frac{\{\varphi\}[\varphi]}{\{\Phi\}[\Phi]} = \frac{s}{2\pi r}. \quad (4)$$

Единицу $[\varphi]$ в левой части уравнения (4) можно сократить. В результате слева остаётся отношение двух безразмерных чисел. Запишем получившееся равенство в виде выражения для s :

$$s = r\{\varphi\} \frac{2\pi}{\{\Phi\}}. \quad (5)$$

Выражение (5) не содержит размерности плоского угла, какой бы она ни была, и, следовательно, не накладывает никаких ограничений на неё. И тем более, не даёт никаких указаний на единицу плоского угла. Её задают из соображений удобства использования.

В зависимости от выбора единицы $[\varphi]$ плоского угла вид соотношения (5) будет разным. Если выражать углы в градусах, то $[\varphi] = 1^\circ$ и безразмерное число $\{\Phi\} = 360$. Выражение (5) примет вид

$$s = r\{\varphi\} \frac{\pi}{180}, \quad (6)$$

где $\{\varphi\}_\circ$ – численное значение угла φ в градусах.

Коэффициент $\pi/180$ (в общем случае $2\pi/\{\Phi\}$) возникает в математических расчётах, связанных с углами и функциями от них, нарушая компактность математических формул. И при большом количестве вычислений этот коэффициент будет многократно появляться в формулах, что сделает их слишком громоздкими и необозримыми.

Математики придумали единицу измерения, которая упрощает формулы, содержащие углы. Если выбрать такую

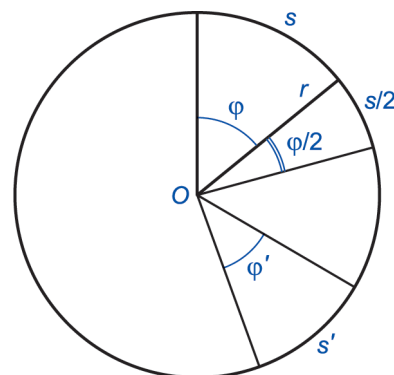


Рис. 1. Пропорциональность величин углов и длин дуг

Fig. 1. Proportionality of angle values and arc lengths

единицу $[\varphi]_{\text{рад}}$ измерения плоских углов, при использовании которой безразмерное число $\{\Phi\}$ будет равно 2π , то формула (5) примет компактный вид¹:

$$S = r \{\Phi\}_{\text{рад}}, \quad (7)$$

где $\{\varphi\}_{\text{рад}}$ – численное значение угла φ в единицах $[\varphi]_{\text{рад}}$.

Соответствующая единица $[\varphi]_{\text{рад}}$ плоского угла, обеспечивающая равенство $\{\Phi\} = 2\pi$, называется радианом. А радиан определяется условием, что полный плоский угол задаётся выражением

$$\Phi = 2\pi \text{ рад.} \quad (8)$$

Равенство (8) означает, что Φ можно принять в качестве определяющей константы для радиана, как это было сделано в 2018 г. для семи основных единиц СИ. Причём Φ является константой, не зависящей ни от времени, ни от пространственного положения во Вселенной. Константа Φ определяется только геометрией плоского двумерного пространства, которая всегда и везде одинакова.

Исторически плоский угол является первой величиной, единица которой была определена фиксацией точного значения определяющей константы. Ещё в древнем Вавилоне единица измерения угла – градус – была определена равенством $\Phi = 360^\circ$. Сегодня все известные единицы измерения плоского угла также определяются через эту константу:

$$\Phi = 360^\circ = 2\pi \text{ рад} = 400 \text{ град} = 1 \text{ об} = 32 \text{ румб.}$$

Эта же определяющая константа является теоретической основой Государственного первичного эталона единицы плоского угла ГЭТ 22-2014, находящегося во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.

Из формулы (7) следует, что отношение двух длин определяет не угол φ , а его численное значение, измеренное в радианах $\{\varphi\}_{\text{рад}}$. Сравнивая (7) с (1), видим, что символ θ является не плоским углом, а его численным значением $\theta = \{\varphi\}_{\text{рад}}$, которое по определению является безразмерным числом. В противоположность утверждению Рекомендации 1 МКМВ 1980 г. выражение (7) не накладывает никаких ограничений на размерность² угла φ .

¹ Выражения (6), (7) приведены во всех математических справочниках и энциклопедиях (см., например, [11, с. 15]).

² В физической литературе имеется определение размерных и безразмерных величин [12]. Величины, численное значение которых зависит от выбора единиц измерения, называются размерными величинами. Величины, численное значение которых не зависит от выбора единиц измерения, называются безразмерными величинами. Например, масса, энергия, скорость являются размерными величинами. А постоянная тонкой структуры – безразмерная величина, для которой даже вид физической формулы зависит от выбора единиц, тем не менее, сохраняет своё численное значение во всех системах единиц. Согласно этому определению плоский угол является размерной величиной так же, как масса и длина.

Формула, аналогичная (7), была предложена в несколько ином виде без вывода и другими авторами из интуитивных соображений, например [13, 14]

Аналогичные рассуждения справедливы и для телесного угла ω . Для телесного угла нетрудно получить выражение, аналогичное соотношению (5) для плоского угла:

$$A = r^2 \{\omega\} \frac{4\pi}{\{\Omega\}}, \quad (9)$$

где $\{\omega\}$ – численное значение рассматриваемого телесного угла в единицах $[\omega]$; $\{\Omega\}$ – численное значение полного телесного угла в тех же единицах; A – площадь поверхности, ограниченной телесным углом ω на сфере радиуса r с центром в вершине угла.

Аналогично радиану единица телесного угла –стерадиан – выбрана так, чтобы соотношение (9) имело компактный вид:

$$A = r^2 \{\omega\}_{\text{ср.}} \quad (10)$$

Таким образом, отношение площади к квадрату длины определяет не телесный угол ω , а его численное значение $\{\omega\}_{\text{ср.}}$, выраженное встерадианах. Стерадиан можно определить, задав значение полного телесного угла:

$$\Omega = 4\pi \text{ ср.} \quad (11)$$

Приведённый анализ показывает, что первый аргумент в пользу безразмерности плоских и телесных углов несостоятелен.

Разложение тригонометрических функций. Разложение тригонометрических функций в ряд по аргументу хорошо известно в математике и приведено во всех справочниках. Например, для синуса оно имеет вид

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (12)$$

Поскольку синус – безразмерная функция, то из (12) неизбежно следует, что θ должна быть безразмерной величиной. Только в этом случае все слагаемые в правой части равенства будут безразмерными. В противном случае все слагаемые в правой части будут иметь разные размерности, а складывать величины разной размерности невозможно. Факт безразмерности θ в (12) некоторые авторы [7, 8] посчитали серьёзным аргументом в пользу безразмерности плоского угла.

Такой вывод основан на представлении, что аргументом тригонометрических функций может быть только величина плоский угол. Но это не совсем так. В математике существует два вида тригонометрических функций: тригонометрические функции углов и тригонометрические функции безразмерных чисел. Первые были введены более 2000 лет назад как отношения длин сторон прямоугольного треугольника. Тригонометрические функции углов были определены в узкой области значений углов $0-90^\circ$ и до сих

пор используются в геометрии и в практике инженерных расчётов.

Но, с развитием исчисления бесконечно малых, дифференциального и интегрального исчислений, математики определили другой вид тригонометрических функций – тригонометрические функции безразмерных аргументов. В математике доказано следующее утверждение [15, с. 146]: «Существует, и притом единственная, пара функций $S(x)$ и $C(x)$, определённых на всей бесконечной прямой вещественных чисел и удовлетворяющей определённым условиям».

Условия существования функций $S(x)$, $C(x)$ специально подобраны математиками так, чтобы они удовлетворялись для тригонометрических функций углов φ вида $\varphi = x$ рад: $\sin \varphi = \sin(x \text{ рад})$, $\cos \varphi = \cos(x \text{ рад})$. Тогда, в силу единственности функций $S(x)$, $C(x)$, тригонометрические функции углов вида $\varphi = x$ рад в интервале $0 \leq x \leq \pi/2$ будут полностью совпадать с введёнными функциями безразмерных аргументов $S(x)$, $C(x)$:

$$\sin(x \text{ рад}) = S(x), \cos(x \text{ рад}) = C(x). \quad (13)$$

Распространяя равенства (13) на все значения безразмерных чисел x , можно распространить область определения тригонометрических функций углов φ на весь бесконечный интервал их значений $-\infty \text{ рад} < \varphi < \infty \text{ рад}$. Функции $S(x)$, $C(x)$ математики назвали тригонометрическими функциями и обозначили теми же символами, что и тригонометрические функции углов: $\sin$, $\cos$. Но нужно всегда помнить, что тригонометрические функции углов и тригонометрические функции безразмерных чисел это, строго говоря, различные функции, имеющие разные области определения. На это обстоятельство указано ещё в работах [16–18]. Во избежание путаницы авторы работ [16, 17] предлагали обозначать два вида тригонометрических функций по-разному – функции безразмерных аргументов по-прежнему обозначать как $\sin$, $\cos$, а функции углов как Sin , Cos .

Для этих двух видов функций все тригонометрические формулы имеют совершенно одинаковый вид. Но при дифференцировании, интегрировании, разложении в ряды сразу проявляются различия между ними. В физике и математике все уравнения записываются с использованием тригонометрических функций безразмерных аргументов. Все математические справочники, включающие производные, интегралы, разложения в ряды, составлены для тригонометрических функций безразмерных аргументов.

По формулам разложения в ряд функций одного вида нельзя делать никакие заключения о размерности аргументов функций другого вида. Размерность плоского угла никак не зависит от вида разложения в ряд тригонометрических функций безразмерного аргумента. Разложение в ряд тригонометрической функции угла осуществляется не по углу, а по численному значению угла, выраженного в радианах, см., например, [19, 20].

Таким образом, и второй аргумент в пользу безразмерности плоского угла оказывается несостоятельным.

О включении радиана истерадиана в класс производных единиц. Третий аргумент – утверждение МКМВ о том, что возможность «трактовки радиана истерадиана как основных единиц СИ... нарушает внутреннюю согласованность СИ на основе только семи основных единиц» не очень убедителен.

Во-первых, почему основных единиц должно быть именно семь? И почему введение дополнительной основной единицы должно нарушать внутреннюю согласованность СИ? В 1960 г. СИ содержала шесть основных единиц. Введение в 1971 г. в класс основных единиц моля никак не нарушило внутренней согласованности и не добавило никаких затруднений в использовании расширенной совокупности основных единиц.

Во-вторых, почему рассматривались возможности только одновременного включения обеих единиц либо в класс основных, либо в класс производных единиц. Тогда как этот вопрос должен решаться исходя из физических соображений о характере плоского и телесного углов, их взаимодействия с другими величинами и их связи друг с другом. Именно эти физические соображения проанализированы далее.

Размерность плоского угла и его отношение к другим величинам. Прежде всего, отметим одно обстоятельство, которое отличает величины плоский угол и телесный угол от всех других величин. Они определяют количественную меру вполне конкретных физических объектов, имеющих те же самые названия. Никакие другие величины не имеют таких конкретных объектов. Нет физического объекта масса, нет физического объекта время, но есть физические объекты плоский угол и телесный угол. Именно физический характер объектов и должен определять существование или отсутствие связи углов с другими физическими величинами, а, следовательно, и принадлежность к классу основных или производных величин.

Физический объект плоский угол определяется как геометрическая фигура, состоящая из двух различных лучей, выходящих из одной точки [21, с. 467]. Лучи называются сторонами угла, а общая точка, из которой они выходят – вершиной. Как следует из определения, стороны угла представляют собой не отрезки прямых определённой длины, а лучи, т. е. заданные направления, исходящие из общей вершины. На рисунках они, естественно, изображаются конечными отрезками произвольной длины. Фактически, плоский угол является локальным объектом [20], состоящим из вершины и двух заданных в этой вершине направлений, вдоль которых можно рисовать стороны угла.

Физическая величина плоский угол характеризует отклонение направления одного луча объекта плоский угол от другого и не зависит от длины нарисованных сторон угла. На рисунках они могут быть больше или меньше, могут быть разной длины. Отклонение одного направления от другого при этом не изменяется. А, следовательно, не изменяется и величина плоский угол. В определении плоского угла (как объекта, так и физической величины) вообще отсутствуют какие-либо другие физические величины.

Это означает, что величина плоский угол имеет собственную размерность, не зависящую от размерностей любых

других величин. А значит, плоский угол не может быть производной величиной. Его следует отнести к основным величинам, а его единицу – радиан – к основным единицам СИ. Предложения включить радиан в класс основных единиц вносились и ранее, например [22–25].

Соотношение между плоским и телесным углами.

Согласно [21, с. 325] объект телесный угол – часть пространства, ограниченная одной полостью некоторой замкнутой конической поверхности (рис. 2). Его количественной характеристикой является величина телесный угол, характеризующая размер этой полости.

Плоский и телесный углы являются объектами различной геометрической размерности. Плоский угол – двумерный пространственный объект, телесный угол – трёхмерный. Их невозможно сравнивать по значению. Пытаться определить, что больше – плоский угол или телесный – бессмысленно. Это то же самое, что пытаться определить, что больше – двумерная фигура или отрезок прямой. А, следовательно, невозможно сравнивать и величины плоский угол и телесный угол, как невозможно сравнивать площадь двумерной фигуры с длиной отрезка, т. е. плоский и телесный углы имеют разные размерности. В противном случае их можно было бы сравнивать по значению. А это означает, что они не могут быть одновременно безразмерными величинами, как это сейчас имеет место в СИ.

Свойство плоского угла характеризовать отклонение одного луча от другого используется в математике для построения полярной системы координат на плоскости, а также цилиндрической, сферической и некоторых других систем координат в трёхмерном пространстве. Воспользуемся этим свойством для анализа связи между плоским и телесным углами.

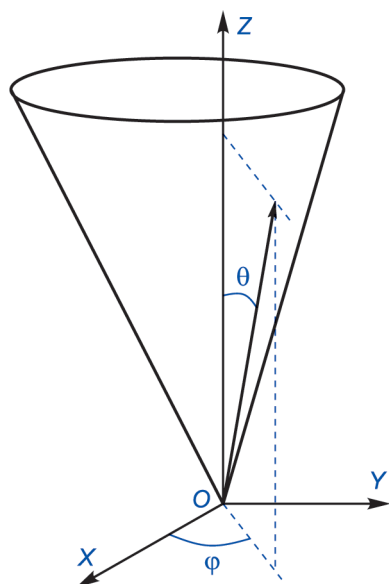


Рис. 2. Телесный угол и связанная с ним сферическая система координат

Fig. 2. Solid angle and related spherical coordinate system

Почти очевидно, что телесный угол образуется совокупностью плоских углов. На рис. 2 представлены телесный угол ω и связанные с ним декартова и сферическая системы координат. Любая точка трёхмерного пространства характеризуется вектором $\mathbf{r}$, начинающимся в начале системы координат и заканчивающимся в этой точке. В декартовой системе координат вектор $\mathbf{r}$ задаётся тремя координатами (x, y, z) . В сферической системе координат этот же вектор будет определяться координатами (r, θ, φ) , где r – длина вектора, θ – плоский угол между вектором $\mathbf{r}$ и осью OZ , φ – угол между проекцией вектора на плоскость (OXY) и осью OX . Область значений переменных сферической системы координат определяется неравенствами:

$$0 \leq r < \infty; 0 \leq \varphi < \Phi; 0 \leq \theta \leq \Phi/2.$$

Направление любого луча, исходящего из начала координат, задаётся в сферической системе координат двумя плоскими углами θ, φ (см. рис. 2). При каждом значении угла φ соответствующий луч конической поверхности будет образовывать с осью OZ некоторый плоский угол θ . Изменяя значение угла φ от 0 до Φ , получим совокупность плоских углов $\theta(\varphi)$, заполняющих весь рассматриваемый телесный угол. Этот процесс аналогичен процессу образования плоской двумерной фигуры совокупностью прямых отрезков или трёхмерного объекта совокупностью двумерных плоских фигур. Это означает, что телесный угол является производной величиной в СИ, образованной плоскими углами, так же как площадь является производной величиной длины.

Нетрудно найти связь между плоским и телесным углами и их единицами. Вся совокупность направлений лучей, задающих коническую поверхность телесного угла, будет определяться функцией $\theta(\varphi)$. Значение телесного угла ω получается интегрированием элемента телесного угла $d\omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ по области $0 \leq \varphi < \Phi; 0 \leq \theta \leq \theta(\varphi)$:

$$\omega = \int_0^{\Phi} d\varphi \int_0^{\theta(\varphi)} \sin\theta d\theta. \quad (14)$$

Здесь синус есть функция плоского угла. Интегрирование по углу θ выполняется переходом к безразмерной переменной интегрирования x по формуле $\theta = x \text{ рад} = x\Phi/(2\pi)$. В результате выражение (14) примет вид

$$\omega = \frac{\Phi}{2\pi} \int_0^{\Phi} [1 - \cos\theta(\varphi)] d\varphi. \quad (15)$$

Здесь φ по-прежнему является размерным углом, как и Φ . Из формулы (15) следует, что размерность телесного угла равна квадрату размерности плоского угла. Учитывая, что эти величины не могут иметь одинаковую размерность (см. выше), приходим к выводу, что плоский и телесный углы являются размерными величинами, их размерности

связаны соотношением $\dim \omega = (\dim \varphi)^2$. И если основной единицей плоского угла в СИ выбран радиан, то когерентной единицей телесного угла в СИ должна быть единица, равная радиану в квадрате.

Найдём связь междустерадианом и радианом в квадрате. Из (15) можно найти значение полного телесного угла Ω . Выберем в качестве телесного угла ω полость внутри кругового конуса. Соответствующая функция $\theta(\varphi)$ будет константой θ и интеграл в (14) даёт следующее значение для ω :

$$\omega = (1 - \cos \theta) \Phi^2 / (2\pi). \quad (16)$$

При $\theta = 0$ рассматриваемая коническая поверхность вырождается в ось OZ и соответствующий телесный угол будет равен нулю. Значение полного телесного угла Ω найдём из (16) при $\theta = \Phi/2$, для которого $\cos(\Phi/2) = -1$. Откуда

$$\Omega = \Phi^2 / \pi. \quad (17)$$

Сравнивая (17) с формулами (8), (11), получаем $1 \text{ ср} = 1 \text{ рад}^2$. Такой же результат представлен в работах [17, 18, 24]. Из него следует, чтостерадиан является когерентной производной единицей в СИ, но не метра, как указано в Брошюре СИ [6], а радиана. Единицы же плоского угла (и радиан, и градус) не зависят от других единиц СИ и задаются аксиоматически как все основные единицы СИ.

Закключение. Рекомендации ККЕ и МКМВ 1980 г. и Резолюция 8 20-й ГКМВ, объявившие плоский и телесный углы безразмерными величинами, производными от величины длина, основаны на неправильном понимании некоторых математических формул. В статье показано, что ни математические выражения, связывающие длины с углами, ни разложения тригонометрических функций не накладывают никаких ограничений на размерности плоского и телесного углов и на выбор их единиц. Проведённый в статье анализ физической природы углов и их связи с другими величинами и между собой позволяет сделать следующие утверждения:

величина плоский угол не зависит ни от одной из единиц СИ и должна быть включена в класс основных величин. Её единица – радиан – должна быть включена в класс основных единиц СИ. Радиан задаётся фиксацией точного значения полного плоского угла: $\Phi = 2\pi \text{ рад}$;

величина телесный угол является производной от величины плоский угол. Размерность телесного угла квадратична по размерности плоского угла. Единица телесного угла –стерадиан – задаётся фиксацией точного значения полного телесного угла: $\Omega = 4\pi \text{ ср}$;

стерадиан – когерентная производная единица от радиана: $1 \text{ ср} = 1 \text{ рад}^2$.

Список литературы

1. CIPM, 1969, 58 Session: Recommendation 1, p. 30, available at: <https://www.bipm.org/en/CIPM/db/1969/1/> (accessed: 31.08.2020).

2. Comité Consultatif des Unités 1980, 7 session: Recommendation U1, p. U12, available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/CC/CCU/CCU7.pdf> (accessed: 31.08.2020).

3. CIPM, 1980, 69 Session: Recommendation 1 (CI-1980), p. 24, available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/CIPM-PV-OCR/CIPM1980.pdf> (accessed: 31.08.2020).

4. The International System of Units (SI). 1985, 5th ed., available at: https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_brochure_5.pdf (accessed: 31.08.2020).

5. Quinn T. J., *Metrologia*, 1996, vol. 33, no. 1, pp. 81–89. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/33/1/11>

6. The International System of Units (SI), 2019, 9th ed., available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9-EN.pdf> (accessed: 31.08.2020).

7. Mills I. M., Taylor B. N., and Thor A. J., *Metrologia*, 2001, vol. 38, no. 4, pp. 353–361. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/38/4/8>

8. Quincey P., *Metrologia*, 2016, vol. 53, no. 2, pp. 840–845. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/2/840>

9. Максвелл Д. К. Трактат об электричестве и магнетизме: серия «Классики науки», в 2-х т. Пер с англ. М.: Наука, 1989. Т. 1. 415 с.

10. Standard ISO 80000-1, 2009. Quantities and units. Part 1: General.

11. Математическая энциклопедия: в 5-и т. / И. М. Виноградов [и др.] М.: Советская энциклопедия, 1984. Т. 4. 1216 с.

12. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.

13. Mohr P. J., and Phillips W. D., *Metrologia*, 2015, vol. 52, no. 1, pp. 40–47. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/1/40>

14. Quincey P., Mohr P. J., and Phillips W. D., *Metrologia*, 2019, vol. 56, no. 4, 043001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab27d7>

15. Ильин В. А., Позняк Е. Г. Основы математического анализа, Ч. 1. М.: Физматлит, 2005.

16. Torrens A. B., *Metrologia*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/22/1/002>

17. Brownstein K. R., *Am. J. Phys.*, 1997, vol. 65, no. 7, pp. 605–614. <https://doi.org/10.1119/1.18616>

18. Kalinin M. I., *Metrologia*, 2019, vol. 56, no. 6, 065009. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab3fbf>

19. Eder W. E., *Metrologia*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/18/1/002>

20. Emerson W. H., *Metrologia*, 2005, vol. 42, no. 4, pp. L23–L26. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/42/4/L02>

21. Математическая энциклопедия: в 5-и т./ И. М. Виноградов [и др.] М.: Советская энциклопедия, 1985. Т. 5. 1248 с.

22. Wittmann H. A., *Metrologia*, 1988, vol. 25, no. 4, pp. 193–203. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/25/4/001>

23. Mohr P. J., and Phillips W. D., A proposal to classify the radian as a base unite in the SI. <http://arXiv.org/abs/1604.06774v1> (18 Feb 2016).

24. Kalinin M. I., On the status of plane and solid angles in the International System of Units (SI). [arXiv:1810.12057v3](https://arxiv.org/abs/1810.12057v3) (8 Nov 2018). <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab3fbf>

25. Калинин М. И. Плоский и телесный углы в Международной системе единиц // Законодательная и прикладная метрология. 2018. № 6. С. 12–16.

References

1. CIPM, 1969, 58 Session: Recommendation 1, p. 30, available at: <https://www.bipm.org/en/CIPM/db/1969/1/> (accessed: 31.08.2020).
2. Comité Consultatif des Unités 1980, 7 session: Recommendation U1, p. U12, available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/CC/CCU/CCU7.pdf> (accessed: 31.08.2020).
3. CIPM, 1980, 69 Session: Recommendation 1 (CI-1980), p. 24, available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/CIPM-PV-OCR/CIPM1980.pdf> (accessed: 31.08.2020).
4. The International System of Units (SI). 1985, 5th ed., available at: https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si_brochure_5.pdf (accessed: 31.08.2020).
5. Quinn T. J., *Metrologia*, 1996, vol. 33, no. 1, pp. 81–89. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/33/1/11>
6. The International System of Units (SI), 2019, 9th ed., available at: <https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9-EN.pdf> (accessed: 31.08.2020).
7. Mills I. M., Taylor B. N., and Thor A. J., *Metrologia*, 2001, vol. 38, no. 4, pp. 353–361. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/38/4/8>
8. Quincey P., *Metrologia*, 2016, vol. 53, no. 2, pp. 840–845. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/53/2/840>
9. Maxwell James Clerk, The scientific papers, vol. 1, Cambridge: At the university press, 1890.
10. Standard ISO 80000-1, 2009. Quantities and units. Part 1: General.
11. Vinogradov I. M. (ed), *Matematicheskaya Encyclopedia*, Moscow, Sovetskaya encyclopedia Publ., vol. 4, 1984, 1216 p. (in Russian).

12. Sedov L. I., *Metody podobija i razmernosti v mekhanike*, Moscow, Nauka Publ., 1877, 438 p. (in Russian).
13. Mohr P. J., and Phillips W. D., *Metrologia*, 2015, vol. 52, no. 1, pp. 40–47. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/52/1/40>
14. Quincey P., Mohr P. J., and Phillips W. D., *Metrologia*, 2019, vol. 56, no. 4, 043001. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab27d7>
15. Ilyin V. A., Poznyak E. G. *Fundamentals of Mathematical Analysis: Part1, 7th edn*, Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 646 p. (in Russian).
16. Torrens A. B., *Metrologia*, 1986, vol. 22, no. 1, pp. 1–7. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/22/1/002>
17. Brownstein K. R., *Am. J. Phys.*, 1997, vol. 65, no. 7, pp. 605–614. <https://doi.org/10.1119/1.18616>
18. Kalinin M. I., *Metrologia*, 2019, vol. 56, no. 6, 065009. <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab3fbf>
19. Eder W. E., *Metrologia*, 1982, vol. 18, no. 1, pp. 1–12. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/18/1/002>
20. Emerson W. H., *Metrologia*, 2005, vol. 42, no. 4, pp. L23–L26. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/42/4/L02>
21. Vinogradov I. M. (ed), *Matematicheskaya Encyclopedia*, Moscow, Sovetskaya encyclopedia Publ., vol. 5, 1985, 1248 p. (in Russian).
22. Wittmann H. A., *Metrologia*, 1988, vol. 25, no. 4, pp. 193–203. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/25/4/001>
23. Mohr P. J., and Phillips W. D., A proposal to classify the radian as a base unite in the SI. <http://arXiv.org/abs/1604.06774v1> (18 Feb 2016).
24. Kalinin M. I., On the status of plane and solid angles in the International System of Units (SI). arXiv:1810.12057v3 (8 Nov 2018). <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab3fbf>
25. Kalinin M. I., *Zakonodatel'naja i prikladnaja metrologia*, 2018, no. 6, pp. 12–16.

Дата поступления: 02.07.2020.

Дата принятия: 07.08.2020.

Dimensions of plane and solid angles and their units in the International System of Units (SI)

Mikhail I. Kalinin, Lev K. Isaev, Fedor V. Bulygin

Russian Research Institute for Metrological Service (VNIIMS), Moscow, Russia,
e-mail: kalinin@vniims.ru, isaev-vm@vniims.ru, fbulygin@vniims.ru

The situation that has developed in the International System of Units (SI) as a result of adopting the recommendation of the International Committee of Weights and Measures (CIPM) in 1980, which proposed to consider plane and solid angles as dimensionless derived quantities, is analyzed. It is shown that the basis for such a solution was a misunderstanding of the mathematical formula relating the arc length of a circle with its radius and corresponding central angle, as well as of the expansions of trigonometric functions in series. From the analysis presented in the article, it follows that a plane angle does not depend on any of the SI quantities and should be assigned to the base quantities, and its unit, the radian, should be added to the base SI units. A solid angle, in this case, turns out to be a derived quantity of a plane angle. Its unit, the steradian, is a coherent derived unit equal to the square radian.

Key words: base quantities, derived quantities, plane angle, solid angle, base units, derived units, radian, steradian.