

## **Алгоритмизация вычисления фрактальных параметров рельефа шероховатой поверхности по ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014**

**Б. Н. Марков, Д. А. Мастеренко, П. Н. Емельянов, В. И. Телешевский**

*Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», Москва, Российская Федерация,  
e-mail: bnmarkov@rambler.ru, metrologycenter@gmail.com, pemelyan@rambler.ru, vitel@stankin.ru*

*Описано применение методов фрактальной геометрии для характеристики свойств поверхностей материалов и изделий. Рассмотрена терминология стандарта ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 «Геометрические характеристики изделий (GPS). Структура поверхности. Ареал. Ч. 2. Термины, определения и параметры структуры поверхности». Представлены функции, предусмотренные стандартом для вычисления фрактальной размерности, описаны алгоритмы их вычисления в среде Mathcad. Приведён пример вычислений по результатам измерений высот неровностей поверхности концевой меры длины, полученным с помощью атомного силового микроскопа.*

**Ключевые слова:** *поверхность, фрактал, фрактальная размерность, Mathcad, функция масштаба-объёма, функция относительной площади, диагностика, режущий инструмент.*

**Введение.** В последние годы уделяется большое внимание методам фрактальной геометрии применительно к описанию свойств поверхностей материалов, механически обработанных [1–3] или полученных в результате облучения сильноточными электронными и ионными пучками [3, 4], поверхностей композиционных материалов (нанокомпозитов) [5], поверхностей разрушения изделий [6]. Также методы фрактальной геометрии востребованы при анализе особенностей электромагнитных полей после их рассеивания фрактальной шероховатой поверхностью [7], при решении трибологических задач для определения параметров контактного взаимодействия поверхностей с учётом их шероховатости [8].

Задача диагностики режущего инструмента актуальна в настоящее время [9–16]. В машиностроительном производстве для диагностики состояния, в частности степени изношенности, режущего инструмента можно использовать фрактальные характеристики его поверхности. При изучении профилей режущих кромок по данным морфологической фильтрации и построении масштабно-зависимых закономерностей установлено, что структура кромки фракталоподобная и по мере износа изменяется фрактальная размерность кромки [17].

Широкое распространение фрактальных методов вызывает необходимость унификации количественного описания поверхностей как фракталов. В международном стандарте ISO 25178-2:2012 “Geometrical product specifications (GPS) – Surface texture: Areal – Pt. 2: Terms, definitions and surface texture parameters” и его российской версии ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 «Геометрические характеристики изделий (GPS). Структура поверхности. Ареал. Ч. 2. Термины, определения и параметры структуры поверхности» впервые введены в рассмотрение фрактальные параметры шероховатой поверхности и установлены способы их вычисления по данным измерений. К сожалению,

понимание российской версии ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 стандарта ISO 25178-2:2012 затрудняется тем, что перевод на русский язык выполнен с некоторыми недостатками, которые будут прокомментированы в настоящей статье.

Основной характеристикой фрактального объекта является его размерность. Интуитивно эту характеристику можно представить при описании поверхности как «изрезанной», «смятой», «неровной», «нерегулярной». При этом важно, что увеличение масштаба рассмотрения поверхности не приводит к её выравниванию, как это имеет место для обычных поверхностей. Достаточно малый участок обычных поверхностей слабо отличается от плоскости, вследствие чего становится возможным ввести понятие площади. Вид фрактальной поверхности при увеличении масштаба всё равно остаётся примерно таким же «смятым» и «изрезанным», в чём проявляется важное свойство фракталов – самоподобие.

Следствием самоподобного характера фрактальной поверхности является невозможность приписать ей какую-либо конечную площадь. Получается, что фрактальная поверхность заполняет пространство в большей степени, чем обычная двумерная поверхность, хотя и в меньшей, чем объёмное, трёхмерное множество. Конечная мера, которую можно сопоставить с размерностью фрактальной поверхности, должна выражаться не квадратными или кубическими единицами длины, а единицами длины в промежуточной степени. Эта степень представляет собой дробную фрактальную размерность. В ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 вводятся структурные функции, позволяющие оценить размерность фрактальной поверхности согласно определениям Хаусдорфа–Безиковича или Минковского–Булиганда.

Цель настоящей статьи – представить методику вычисления фрактальных параметров шероховатости поверхности

с использованием стандартного программного комплекса Mathcad, а также уточнить перевод некоторых терминов в ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014.

**Вычисление фрактальной размерности с помощью функции масштаба-объёма.** Анализ фрактальных характеристик поверхности связан с её последовательным рассмотрением в различных размерных масштабах, характеризующим параметром «масштаб длины наблюдения» (ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.3). Из этого названия не следует, что наблюдение поверхности проводится на какой-то определённой длине. Здесь речь идёт именно о размерах участков поверхности, на которых рассматриваются метрические свойства поверхности, от относительно больших до наименьших, доступных для изучения. Масштаб с длины наблюдения является аргументом функций масштаба-объёма и относительной площади.

**Функция масштаба-объёма.** Эта функция обозначается  $Svs(c)$  или  $S_{vs}(c)$  (volume-scale function – объёмно-масштабная функция, см. п. 4.4.9.1) и определяется с помощью понятий морфологического открытия и закрытия рассматриваемой поверхности, полученных для структурирующего элемента – горизонтального квадратного участка плоскости. Длина стороны квадрата в данном случае будет масштабом с длины наблюдения.

Рассмотрим поверхность, представленную матрицей  $Z$  дискретных отсчётов высот в узлах сетки с одинаковыми шагами  $\Delta x$  по обеим горизонтальным координатам. При анализе измерительной информации об этой поверхности, для построения морфологического открытия (нижней огибающей) и закрытия (верхней огибающей) анализируют всевозможные подматрицы размером  $k \times k$  при нечётном  $k$  с центрами в каждом узле сетки. При этом масштаб длины наблюдения определяется как

$$c = (k-1)\Delta x.$$

Если узел ближе к краю сетки, чем на  $(k-1)/2$  шагов, то матрица с соответствующей стороны урезается. Наибольший отсчёт высоты в пределах подматрицы даёт элемент верхней огибающей, а наименьший – элемент нижней огибающей.

В среде Mathcad функция  $UpperEnv(DD, k)$ , по которой строится верхняя огибающая по описанной схеме, реализуется в виде

$$UpperEnv(DD, k) := \begin{cases} k1 \leftarrow floor\left(\frac{k-1}{2}\right) \\ Nr \leftarrow rows(DD) \\ Nc \leftarrow cols(DD) \\ \text{for } r \in 0 \dots Nr-1 \\ \quad \text{for } c \in 0 \dots Nc-1 \\ \quad \quad r1 \leftarrow \max(0, r-k1) \\ \quad \quad r2 \leftarrow \min(Nr-1, r1+k1) \\ \quad \quad c1 \leftarrow \max(0, c-k1) \\ \quad \quad c2 \leftarrow \min(Nc-1, c1+k1) \\ \quad \quad SD \leftarrow submatrix(DD, r1, r2, c1, c2) \\ \quad \quad UE_{r,c} \leftarrow \max(SD) \end{cases}$$

Здесь  $DD$  – формальный параметр функции, на место которого при вызове подставляется фактический параметр – матрица высот.

Аналогично реализуется и функция построения нижней огибающей  $LowerEnv(DD, k)$  с заменой в предпоследней строке функции  $\max$  на  $\min$ . После построения обеих огибающих вычисляется  $EnvVol(DD, k)$  – объём пространства, заключённого между огибающими:

$$EnvVol(DD, k) := \begin{cases} UE \leftarrow UpperEnv(DD, k) \\ LE \leftarrow LowerEnv(DD, k) \\ Nc \leftarrow cols(DD) \\ Nr \leftarrow rows(DD) \\ VC \leftarrow (\Delta x)^2 \cdot \sum_{r=0}^{Nr-1} \sum_{c=0}^{Nc-1} (UE_{r,c} - LE_{r,c}) \\ VC \end{cases}$$

Затем задаётся функция масштаба-объёма:

$$Svs(c) := \begin{cases} k \leftarrow floor\left(\frac{c}{\Delta x}\right) \\ SV \leftarrow EnvVol(Z, k) \text{ if } k \geq 3 \\ SV \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ SV \end{cases} \quad (1)$$

В последней функции значение масштаба длины наблюдения округляется до целого числа шагов сетки, которое должно быть не менее трёх. Если данное условие не выполняется, то функция возвращает нуль, что приводит к ошибке при дальнейшем логарифмировании.

По графику функции  $Svs(c)$ , построенному в двойном логарифмическом масштабе, можно определить параметр  $Svfc(c)$ ,  $S_{vfc}(c)$ , названный в ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.4 «сложность фрактала объёма». Авторы настоящей статьи считают, что точнее смысл соответствующего англоязычного термина передаётся выражением «объёмная сложность фрактала». Этот параметр определяется как увеличенный в 1000 раз тангенс угла наклона (в ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 указан «угол наклона» – ещё один недостаток перевода) рассматриваемого графика. По объёмной сложности уже непосредственно определяется фрактальная размерность  $D_f$  или  $D_f$  (см. ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, Приложение В):

$$D_f = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ 3 - \frac{d(\log_e[F(s)])}{d[\log_e(s)]} \right\}. \quad (2)$$

Формула (2) с практической точки зрения имеет ограниченный смысл, поскольку масштаб длины наблюдения не может быть уменьшен до нуля. При этом логарифмическая производная в (2) – это и есть тангенс угла наклона графика в двойных логарифмических координатах. Таким образом, фрактальная размерность оценивается по формуле

$$D_f = 3 - Svfc/1000, \quad (3)$$

где  $Svfc$  – объёмная сложность фрактала на интересующем участке графика функции масштаба-объёма (т. е. в интересующем диапазоне масштабов).

График истинного фрактала становится прямой линией при неограниченном уменьшении масштаба наблюдения, в этом случае использование формулы (2) имеет смысл.

В ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 не обоснован выбор объёма между верхними и нижними огибающими функции масштаба-объёма. В списке литературы к стандарту имеется ссылка на книгу [18]. В [18], как и в множестве других источников по фракталам, дано определение размерности Минковского–Булиганда и отмечена её эквивалентность так называемой клеточной размерности, но ничего не сказано про объём между огибающими и морфологические операции.

Для определения клеточной размерности требуется при каждом масштабе наблюдения разбить матрицу высот на блоки (подматрицы) одинакового размера и подсчитать количество необходимых для покрытия всех точек поверхности прямоугольных параллелепипедов, имеющих в основании прямоугольник, равный блоку, и одинаковую высоту. При переходе к меньшему масштабу наблюдения высота параллелепипедов уменьшается пропорционально изменениям горизонтальных размеров блока. При уменьшении масштаба наблюдения количество покрывающих параллелепипедов («клеток») возрастает пропорционально  $c^{-D}$ , где  $D$  – фрактальная размерность, а их общий объём – пропорционально  $c^{3-D}$ .

Вместо подсчёта клеток, очевидно, можно подсчитывать объём, заключённый в пределах каждого блока между плоскостями, проведёнными на наибольшей и наименьшей высотах, и суммировать все такие объёмы. Общий объём будет отличаться от результата функции (1), но характер изменения объёма при изменении масштаба наблюдения должен быть таким же.

В среде Mathcad для вычисления клеточной размерности можно записать три функции: функцию  $BlockVol(DD)$  для вычисления объёма в пределах одного блока; функцию  $CellVol(DD, k)$  для вычисления общего объёма «клеток» при разбиении на блоки размером  $k \times k$ ; функцию  $Svs(c)$  масштаба-объёма для клеточной размерности соответственно:

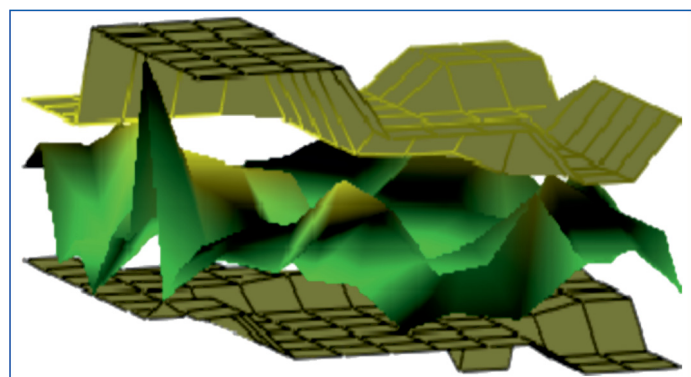


Рис. 1. Фрагмент исследуемой поверхности и её верхней и нижней огибающих

Fig. 1. A fragment of the studied surface with its upper and lower envelopes

$$BlockVol(DD) := \begin{cases} cc \leftarrow cols(DD) \\ rr \leftarrow rows(DD) \\ VB \leftarrow (max(DD) - min(DD)) \cdot rr \cdot cc \\ VB \end{cases}$$

$$CellVol(DD, k) := \begin{cases} MaxCol \leftarrow cols(DD) - k \\ MaxRow \leftarrow rows(DD) - k \\ CV \leftarrow 0 \\ r1 \leftarrow 0 \\ \text{while } r1 \leq MaxRow \\ \quad c1 \leftarrow 0 \\ \quad \text{while } c1 \leq MaxCol \\ \quad \quad CV \leftarrow CV + BlockVol(DD, r1, r1+k-1, c1, c1+k-1) \\ \quad \quad c1 \leftarrow c1 + k \\ \quad \quad r1 \leftarrow r1 + k \\ CV \leftarrow CV \cdot (\Delta x)^2 \\ CV \end{cases}$$

$$Svs(c) := \begin{cases} k \leftarrow floor\left(\frac{c}{\Delta x}\right) \\ SV \leftarrow CellVol(Z, k) \text{ if } k \geq 2 \\ SV \leftarrow 0 \text{ otherwise} \\ SV \end{cases} \quad (4)$$

По наклону графика функции (4) в двойных логарифмических координатах определяются объёмная сложность фрактала и фрактальная размерность. Для истинных фракталов оба способа определения объёмной сложности фрактала и фрактальной размерности – по графику функции (1) и по графику функции (4) – теоретически должны приводить к одному и тому же результату. На практике же результаты зависят от доступного диапазона масштабов, то есть от размера и разрешения картины высот. При этом необходимо учитывать следующие замечания:

вычисление функции (4) происходит значительно быстрее, чем построение огибающих, и разница тем заметнее, чем больше размер матрицы высот;

для построения зависимости масштаб-объём по формуле (1) можно использовать любые масштабы наблюдения, соответствующие нечётным размерам блоков, тогда как использование функции (4) возможно лишь для блоков, размеры которых являются делителями размера матрицы высот;

на графике функции масштаба-объёма, построенном в соответствии с рекомендациями из ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, можно получить больше точек, что, в свою очередь, позволяет определить объёмную сложность фрактала с меньшей неопределённостью (это вытекает из предыдущего замечания).

Таким образом, можно рекомендовать использовать функцию (4) для экспресс-анализа данных относительно большого разрешения и объёма. Полученные выводы или закономерности должны быть верифицированы при помощи функции (1), полностью соответствующей ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014.

Следующее замечание касается горизонтальных и вертикальных масштабов измеренных координат точек поверхности. При работе с функциями масштаба-объёма абсолютные масштабы совершенно не важны, а масштабы и разрешения данных по горизонтальным и вертикальным координатам могут быть выбраны независимо. Если все значения высот

умножить на одно и то же число, то и все объёмы умножатся на то же самое число, однако наклон графика в двойных логарифмических координатах от этого совершенно не изменится. То же самое верно и в отношении горизонтального масштаба. Здесь важно лишь, чтобы шаги сетки по обоим горизонтальным координатам были одинаковыми, но абсолютное значение этого шага не оказывает влияния на оценку объёмной сложности фрактала. В частности, можно убрать в соответствующих местах из приведённых выше функций умножение на  $(\Delta x)^2$  при вычислении объёмов и анализировать зависимость непосредственно от размера  $k$  блока.

Функции масштаба-объёма в силу допустимой независимости масштабов горизонтальных и вертикальных координат можно также применять при фрактальном анализе сигналов и полей различной природы, в том числе случайных, у которых третья координата представляет собой иную физическую величину.

**Пример вычислений фрактальной размерности на основе функции масштаба-объёма.** Исследуем участок поверхности концевой меры длины размером  $100 \times 100$  мкм с дискретностью отсчёта по обоим горизонтальным координатам  $\Delta x = 1$  мкм и высотами в единицы–десятки нанометров, изображение которого получено с помощью атомного силового микроскопа [19]. Заметим, что массив размером  $101 \times 101$  точек является довольно малым для фрактального анализа, поэтому приведённые далее конкретные значения параметров носят скорее иллюстративный характер.

На рис. 1 показаны часть исследуемого участка поверхности концевой меры размером  $10 \times 10$  мкм, её верхняя и нижняя огибающие, рассчитанные при ширине окна  $s = 7$  мкм.

Для построения графика функции масштаба-объёма зададим массив значений размеров блоков, при которых выполняются вычисления, например:

$$Ks := (3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, 25, 33, 45, 65)^T.$$

Затем найдём диапазон индекса и вычислим вектор значений функции:

$$i1 := 0..rows(Ks)-1 \quad Sv_{i1} := EnviVol(D, Ks_{i1}).$$

В данном случае анализируется зависимость функции масштаба-объёма непосредственно от размера блока в точках, а не в единицах длины, а соответствующий линейный размер составит  $k-1$  дискрет. График функции масштаба-объёма в двойных логарифмических координатах приведён на рис. 2.

В области малых размеров блоков график близок к прямой линии, поэтому можно говорить о фракталоподобности поверхности в соответствующем диапазоне масштабов. Найдём объёмную сложность фрактала через угловой коэффициент наклона графика на этом участке:

$$Ks := (3, 5, 9, 11)^T,$$

$$Svfc := 1000 \cdot slope(\log(Ks-1), Sv), \quad Svfc = 539,$$

$$Df := 3 - \frac{Svfc}{1000}, \quad Df = 2,461.$$

Чтобы применить функцию масштаба-объёма в виде (4), необходимо задать размеры блоков, служащие делителями размера всей матрицы высот. Число 100 имеет всего четыре делителя. Однако небольшое уменьшение размеров до 96 дискрет даёт возможность использовать следующие размеры блоков:

$$Ks := (2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48)^T.$$

Этот же приём следует использовать далее при анализе относительной площади.

Вычисления функции (4) в диапазоне масштабов, аналогичном использованному выше, то есть (4, 6, 8, 16), дают значения  $Svfc = 553$  и  $Df = 2,447$ , что близко к предыдущей оценке  $Df = 2,461$ .

**Вычисление фрактальной размерности с помощью функции относительной площади.** Функция относительной площади  $S_{rel}(c)$  или  $Srel(c)$  (ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.2) определяется как отношение действительной площади поверхности исследуемого участка поверхности изделия в рассматриваемом масштабе к номинальной площади этого участка как двухмерного объекта в зависимости от масштаба длины наблюдения. Действительной считается площадь покрытия поверхности треугольными плитками, размер которых соответствует выбранному масштабу.

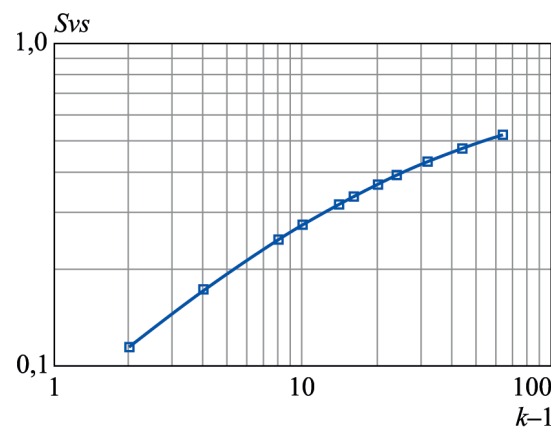


Рис. 2. График функции масштаба-объёма в двойных логарифмических координатах;  $Svs(k)$  – функция масштаба-объёма,  $k$  – делитель размера матрицы высот точек рельефа шероховатой поверхности

Fig. 2. Graph of the volume-scale function in double logarithmic coordinates;  $Svs(k)$  – volume-scale function;  $k$  – divisor of the size of the matrix of heights of rough surface points

Для вычисления действительной площади требуется снова разбить матрицу высот на квадратные блоки размером  $k \times k$ , где  $k$  – делитель размера матрицы.

Рассмотрим квадрат со стороной  $k$  дискрет и координатами левого нижнего угла  $(x_{n(k-1)}, y_{m(k-1)})$ . Из углов этого квадрата проведём прямые линии вдоль оси высот до пересечения с исследуемой шероховатой поверхностью. В результате получим точки  $A, B, C, D$  (против часовой стрелки, если смотреть сверху), не лежащие в одной плоскости. Для вычисления площади покрытия шероховатой поверхности в пределах данного блока следует вычислить и сложить площади треугольников  $ABC$  и  $ADC$ , а суммирование по всем таким блокам даст общую площадь покрытия.

Приведём функции Mathcad, позволяющие выполнить описанные операции. Площадь треугольника будет вычисляться по формуле Герона:

$$\text{HeronArea}(a,b,c) := \begin{cases} \text{HalfP} \leftarrow \frac{(a+b+c)}{2} \\ \text{Ar} \leftarrow \sqrt{\text{HalfP} \cdot (\text{HalfP}-a)(\text{HalfP}-b)(\text{HalfP}-c)} \end{cases}$$

Для подстановки в функцию Герона аргументов – длин сторон треугольника – потребуется функция их вычисления:

$$\begin{aligned} \text{LineLen}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &:= \\ &:= \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Две предыдущие функции подставляют в функцию для расчёта площади треугольника по координатам его вершин:

$$\text{TrngArea}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) := \begin{cases} a \leftarrow \text{LineLen}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \\ b \leftarrow \text{LineLen}(x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3) \\ c \leftarrow \text{LineLen}(x_3, y_3, z_3, x_1, y_1, z_1) \\ \text{TA} \leftarrow \text{HeronArea}(a, b, c) \end{cases}$$

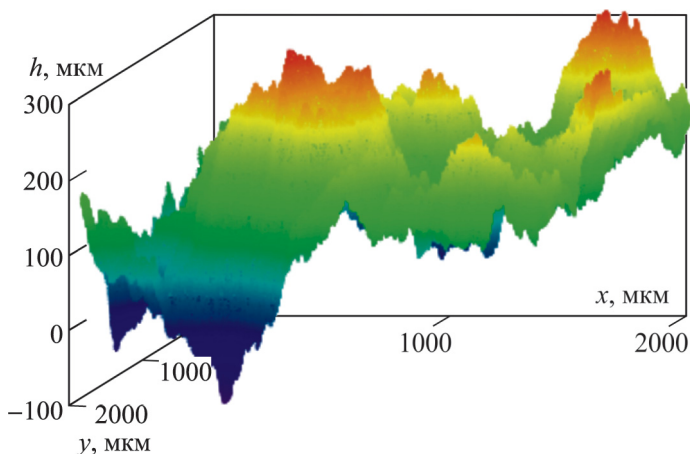


Рис. 3. Смоделированная фракталоподобная поверхность

Fig. 3. Simulated fractal-like surface

Функция для вычисления суммарной площади двух треугольников в пределах блока имеет вид

$$\text{Sq1Area}(DD) := \begin{cases} lx \leftarrow \text{cols}(DD)-1 \\ ly \leftarrow \text{rows}(DD)-1 \\ SA \leftarrow \text{TrngArea}(0, 0, DD_{0,0}, 0, lx, DD_{0,lx}, ly, 0, DD_{ly,0}) \\ SA \leftarrow SA + \text{TrngArea}(ly, lx, DD_{ly,lx}, 0, lx, DD_{0,lx}, ly, 0, DD_{ly,0}) \end{cases}$$

Итоговая функция для расчёта относительной площади для массива высот при разбиении на блоки размером  $k \times k$ :

$$\text{Srel}(DD, k) := \begin{cases} \text{NCols} \leftarrow \text{cols}(DD)-1 \\ \text{NRows} \leftarrow \text{rows}(DD)-1 \\ \text{Ar} \leftarrow 0 \\ r1 \leftarrow 0 \\ \text{while } r1 < \text{NRows} \\ \quad c1 \leftarrow 0 \\ \quad \text{while } c1 < \text{NCols} \\ \quad \quad \text{Ar} \leftarrow \text{Ar} + \text{Sq1Area}(\text{submatrix}(DD, r1, r1+k, c1, c1+k)) \\ \quad \quad c1 \leftarrow c1+k \\ \quad \quad r1 \leftarrow r1+k \\ \quad \text{Ar} \leftarrow \frac{\text{Ar}}{\text{NRows} \cdot \text{NCols}} \\ \text{Ar} \end{cases}$$

График функции относительной площади также строится в двойных логарифмических координатах. Его наклон в некотором диапазоне масштабов отрицателен. Тангенс угла наклона, умноженный на  $-1000$ , называется «сложность фрактала ареала»  $S_{afc}$ ,  $S_{afc}$  (ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.5). С точки зрения авторов настоящей статьи, более верный перевод термина “areal fractal complexity” из ISO 25178-2:2012 – «ареальная, или площадная, сложность фрактала».

Ареальная сложность тоже связана с фрактальной размерностью, однако здесь надо проявить осторожность. Соответствующая формула указана только в Приложении В к ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, причём без достаточно подробных пояснений, хотя из приведённого там примера графика видно, что по горизонтальной оси отложен логарифм квадрата длины наблюдения. При этом фрактальная размерность определяется как

$$D_f = 2 + 2 \frac{S_{afc}}{1000}, \quad (6)$$

где  $S_{afc}$  вычислена именно по графику относительной площади в зависимости от квадрата длины наблюдения.

Для функции относительной площади большое значение имеет соотношение разрешений и характерных изменений по горизонтальным и вертикальной координатам: эти параметры должны быть близкими, в противном случае фрактальные свойства поверхности с помощью данной функции выявить не удастся. Отметим, что для истинных фракталов при доступности сколь угодно малых масштабов наблюдения

формулы (3) и (6) должны давать один и тот же результат. Так, в рассмотренном выше примере измерений концевой меры длины дискретность отчёта по обеим горизонтальным координатам составляет 1 мкм, а высота измеряется в долях нанометра, поэтому длины отрезков, вычисляемые функцией (5), очень слабо зависят от вертикальных координат точек, и функция относительной площади мало отличается от единицы во всём доступном диапазоне масштабов.

**Пример применения функции относительной площади для моделированного массива измерений.** Массив измерений состоит из  $2048 \times 2048$  дискрет по горизонтальным координатам (рис. 3). Делителями числа  $2048 = 2^{11}$  являются все меньшие степени двух, и только они. Значения относительной площади для всех размеров блока  $k = 2^m$ ,  $m = 0, 1, \dots, 11$ , графически изображены в двойных логарифмических координатах на рис. 4. На рис. 4 есть три существенно различных участка. Участок I аналогичен графику, получаемому по результатам измерения высот неровностей поверхности концевой меры длины: функция изменяется очень мало, и в соответствующем диапазоне масштабов поверхность можно рассматривать как обычную двумерную. На участке II зависимость близка к линейной – имеет место фракталоподобное поведение. Участок III – переходный между первыми двумя. Отсюда становится понятен смысл ещё одного параметра – «масштаб перехода от гладкой к шероховатой поверхности»  $f_{SRC}$  (ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.7). В качестве этого параметра можно принять середину диапазона масштабов участка III графика на рис. 4. Значение функции относительной площади при соответствующей длине наблюдения в стандарте называется «порог»  $T_h$ ,  $Th$  (ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, п. 4.4.9.8). Понятия масштаба перехода и порога используются также и для функции масштаба-объёма.

Угловой коэффициент графика на участке II (см. рис. 4) для значений  $k = 4, 8, 16, 32$ , равен  $-0,189$ , откуда оценка фрактальной размерности составляет  $2 + 2 \cdot 0,189 = 2,378$ . Применение в данном примере функции масштаба-объёма в виде (4) по тем же значениям  $k$  даёт оценку размерности 2,406. Обе оценки вычисляются в течение нескольких секунд даже для массива таких размеров.

Анализ на основе функции масштаба-объёма в полном соответствии со стандартом по размерам блоков (5, 15, 33, 65) занимает около 15 мин. По-видимому, это объясняется не только объёмом вычислительных операций, но и особенностями работы в среде Mathcad с памятью (индексация элементов массивов, а также реальное копирование данных с места на место при выполнении функции submatrix). Оценка размерности в этом случае равна 2,428. Все три значения довольно близки между собой.

**Закключение.** Приведенные в настоящей статье функции можно непосредственно использовать при вычислении фрактальных параметров согласно ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 в среде Mathcad. Функция относительной площади вычисляется быстрее, чем функция масштаба-объёма, но требует одинакового разрешения по горизонтальным и вертикальной координатам. Масштабно-объёмный анализ может

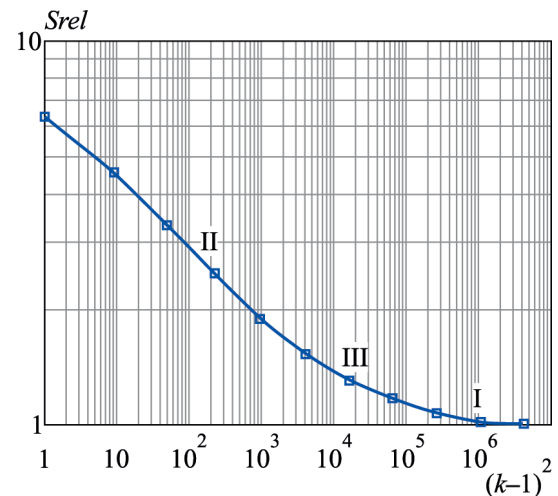


Рис. 4. График функции относительной площади смоделированной поверхности:

$Srel$  – функция относительной площади; I (слабая зависимость), II (значительная зависимость, близкая к линейной), III (переходный характер зависимости между участками I, II) – участки кривой с различным характером зависимости относительной площади от масштаба длины наблюдения

Fig. 4. Graph of the relative area function of the simulated surface:  $Srel$  – relative area function; I (weak dependence), II (significant dependence, close to linear), III (transitional nature of the dependence between I and II) – areas with different character of the relative area dependence on the length scale of observation

также выполняться при помощи версии функции, использующей определение «клеточной размерности», производящей вычисления гораздо быстрее, чем по определению из ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014 и, как правило, дающей близкие результаты.

Лучшему пониманию терминологии, применяемой в ГОСТ Р ИСО 25178-2-2014, способствуют переводы терминов “volume fractal complexity” – «объёмная сложность фрактала», “areal fractal complexity” – «ареальная, т. е. площадная, сложность фрактала».

#### Список литературы

1. Потапов А. А. Шероховатость и фракталы // Сборник материалов IV Международной конференции «Деформация и разрушение материалов и наноматериалов» DFMN-2011 (Москва, 25 – 28 октября 2011 г.). 2011. С. 953–955.
2. Бавыкин О. Б., Вячеславова О. Ф. Взаимосвязь свойств поверхности и её фрактальной размерности // Известия МГТУ «МАМИ». 2013. Т. 1. № 1 (15). С. 14–18.
3. Григорьев А. Я. Физика и микрогеометрия технических поверхностей. Минск: Белорусская наука, 2016. 247 с.
4. Алтайский М. В., Иванов В. В., Коренев С. А., Орелович О. Л., Пузынин И. В., Черник В. В. Образование фрактальных структур на поверхности материалов, облучаемых

сильноточными электронными и ионными пучками // Краткие сообщения ОИЯИ. 1997. № 2 (82). С. 37–46.

5. Maraeva E. V., Averin I. A., Istomina M. S., Moshnikov V. A., Nalimova S. S., Pronin I. A., and Semenov K. N., *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 741, no. 1, p. 012185. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/741/1/012185>

6. Савенков Г. Г., Барахтин Б. К. Связь фрактальной размерности поверхности разрушения с комплексом стандартных характеристик материала на растяжение // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52. № 6. С. 177–184.

7. Потапов А. А., Лактюшкин А. В. О статистических свойствах поля, рассеянного фрактальной шероховатой поверхностью // Труды Международной научной конференции «Излучение и рассеяние электромагнитных волн «ИРЭМВ, 2007», Таганрог, 25–30 июня 2007. Таганрог, 2007. Т. 1. С. 435–440.

8. Тихомиров В. П., Измеров М. А. Контактная механика фрактальных поверхностей // Вестник Брянского государственного технического университета. 2015. № 1 (45). С. 60–66.

9. Григорьев А. С. Инструментарий системы ЧПУ для диагностики и прогнозирования износа режущего инструмента в реальном времени при токарной обработке // Вестник МГТУ «Станкин». 2012. № 1 (18). С. 34–43.

10. Martinova L. I., Sokolov S. V., and Grigoryev A. S., *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 4, pp. 742–749. <https://doi.org/10.1134/S0005117912040133>

11. Ait Sghir Khalid, El Badaoui Mohamed, Francois Guillet, Driss Aboutajdine and Jean-Paul Dron, *Mechanics & Industry*, 2014, vol. 15, no. 6, pp. 497–507. <https://doi.org/10.1051/meca/2014052>

12. Wang G. F., Yang Y. W., Zhang Y. C., and Xie Q. L., *Sensors and Actuators A: Physical*, 2014, vol. 209, pp. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.01.004>

13. Козочкин М. П., Гуринов В. Д., Кочеткова А. И. Влияние СОТС на износ цилиндрических фрез и его отображение в виброакустическом сигнале // Вестник МГТУ «Станкин». 2014. № 4 (31). С. 113–118.

14. Потапов К. Г., Сырицкий А. Б. Оценка износа резца на основе измерения неравномерности вращения шпинделя токарного станка // Вестник МГТУ «Станкин». 2014. № 4 (31). С. 107–112.

15. Maia L. H. A., Abrao A. M., Vasconcelos W. L., Sales W. F., and Machado A. R., *Tribology International*, 2015, vol. 92, pp. 519–532. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.07.024>

16. Зверев И. А., Фокин П. В. Тепловое состояние режущей части инструмента при точении труднообрабатываемых материалов // Вестник МГТУ «Станкин». 2017. № 4 (43). С. 52–58.

17. Мастеренко Д. А., Скопцов Э. С. Применение методов морфологической фильтрации в задаче диагностики состояния поверхности режущего инструмента // Измерительная техника. 2019. № 11. С. 24–30. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2019-11-24-30>

18. Лич Р. Инженерные основы измерений нанометрической точности. Учебное издание: Пер. с англ. Е. В. Заблочкой, А. В. Заблочкого. Долгопрудный: Долгопрудненский Издательский дом «Интеллект», 2012. 400 с.

19. Марков Б. Н., Меликова О. Н., Шулёпов А. В. Алгоритм построения морфологического дискового фильтра для анализа шероховатости поверхности // Измерительная техника. 2017. № 5. С. 30–33. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2017-5-30-33>

20. Dubuc B., Zucker S. W., Tricot C., Quiniou J. F., and Wehbi D., *Proceeding of the Royal Society London A*, 1989, vol. 425, no. 1868, pp. 113–127. <https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0101>

## References

1. Potapov A. A., *Proceedings of the IV International conference “Deformation and destruction of materials and nanomaterials” DFMN-2011*, Moscow, October 25–28, 2011, Moscow, 2011, pp. 953–955.

2. Bavykin O. B., Vyacheslavova O. F., *Izvestiya MSTU “MAMI”*, 2013, vol. 1, no. 1 (15), pp. 14–18 (in Russian).

3. Grigoriev A. Ya., *Fizika i mikrogeometriya tekhnicheskikh poverhnostej*, Minsk, Belorusskaya nauka Publ., 2016. 247 p. (in Russian).

4. Altaisky M. V., Ivanov V. V., Korenev S. A., Orelovich O. L., Puzynin I. V., Chernik V. V., *Brief reports of the Joint Institute for Nuclear Research*, 1997, no. 2 (82), pp. 37–46.

5. Maraeva E. V., Averin I. A., Istomina M. S., Moshnikov V. A., Nalimova S. S., Pronin I. A., and Semenov K. N., *Journal of Physics: Conference Series*, 2016, vol. 741, no. 1, p. 012185. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/741/1/012185>

6. Savenkov G. G., Barakhtin B. K., *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, December 2011, vol. 52, no. 6, pp. 997–1003. <https://doi.org/10.1134/S0021894411060186>

7. Potapov A. A., Laktyunkin A. V., *Proceedings of the International scientific conference “Radiation and scattering of electromagnetic waves. IREMV, 2007”*, Taganrog, June 25–30, 2007, Taganrog, 2007, vol. 1, pp. 435–440.

8. Tikhomirov V. P., Izmerov M. A., *Bulletin of the Bryansk State Technical University*, 2015, no. 1 (45), pp. 60–66 (in Russian).

9. Grigoriev A. S., *Vestnik MSTU “STANKIN”*, 2012, no. 1 (18), pp. 34–43 (in Russian).

10. Martinova L. I., Sokolov S. V., and Grigoryev A. S., *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 4, pp. 742–749. <https://doi.org/10.1134/S0005117912040133>

11. Ait Sghir Khalid, El Badaoui Mohamed, Francois Guillet, Driss Aboutajdine and Jean-Paul Dron, *Mechanics & Industry*, 2014, vol. 15, no. 6, pp. 497–507. <https://doi.org/10.1051/meca/2014052>

12. Wang G. F., Yang Y. W., Zhang Y. C., and Xie Q. L., *Sensors and Actuators A: Physical*, 2014, vol. 209, pp. 24–32. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2014.01.004>

13. Kozochkin M. P., Gurin V. D., Kochetkova A. I., *Vestnik MSTU “STANKIN”*, 2014, no. 4 (31), pp. 113–118 (in Russian).

14. Potapov K. G., Siritzky A. B., *Vestnik MSTU "STANKIN"*, 2014, no. 4 (31), pp. 107–112 (in Russian).
15. Maia L. H. A., Abrao A. M., Vasconcelos W. L., Sales W. F., and Machado A. R., *Tribology International*, 2015, vol. 92, pp. 519–532.  
<https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.07.024>
16. Zverev I. A., Fokin P. V., *Vestnik MSTU "STANKIN"*, 2017, no. 4 (43), pp. 52–58 (in Russian).
17. Masterenko D. A., Skoptsov E. S., *Measurement Techniques*, 2020, vol. 62, no. 11, pp. 953–959.  
<https://doi.org/10.1007/s11018-020-01718-y>
18. Leach R., *Fundamental Principles of Engineering Nanometrology*, 2nd Edition, Elsevier, 2014, 384 p.
19. Markov B. N., Melikova O. N., Shulepov A. V., *Measurement Techniques*, 2017, vol. 60, no. 5, pp. 451–456.  
<https://doi.org/10.1007/s11018-017-1216-1>
20. Dubuc B., Zucker S. W., Tricot C., Quiniou J. F., and Wehbi D., *Proceeding of the Royal Society London A*, 1989, vol. 425, no. 1868, pp. 113–127. <https://doi.org/10.1098/rspa.1989.0101>
- Дата поступления: 03.04.2020.  
Дата принятия: 28.04.2020.

### Algorithmization of calculation of fractal parameters of rough surface relief according to GOST R ISO 25178-2-2014

**Boris N. Markov, Dmitry A. Masterenko, Petr N. Emelyanov, Vladimir I. Teleshevskiy**

Moscow State University of Technology "STANKIN" Moscow, Russian Federation, e-mail: [bnmarkov@rambler.ru](mailto:bnmarkov@rambler.ru),  
[metrologycenter@gmail.com](mailto:metrologycenter@gmail.com), [pemelyan@rambler.ru](mailto:pemelyan@rambler.ru), [vitel@stankin.ru](mailto:vitel@stankin.ru)

Russian version of the ISO 25178-2:2012 standard is commented. The functions provided by the standard for calculating fractal dimension are considered, and the algorithms for calculating them in the Mathcad environment are described. An example of calculations based on the results of measurements of the height of the surface irregularities of the gauge block obtained using an atomic force microscope is given.

**Key words:** surface, fractal, fractal dimension, Mathcad, volume-scale function, relative area function, diagnostics, cutting tool.