

Научная статья

УДК 53.088.3+53.088.7

<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-2-16-21>

Эффективность использования вейвлет-преобразований при фильтрации шумов в сигналах измерительных преобразователей

Юрий Карлович Тараненко

Частное предприятие «Ликопак», Днепр, Украина, taranen@rambler.ru, <http://orcid.org/0000-0003-4072-011>

Аннотация. Рассмотрены методы вейвлет-фильтрации шумов в сигналах измерительных преобразователей с использованием порогового метода дискретного вейвлет-преобразования. Для изучения методов вейвлет-фильтрации шумов использованы специальные модельные сигналы, что позволило оценить ошибки фильтрации. Разработан метод определения параметров вейвлет-фильтрации шумов с порогом для всех уровней декомпозиции, позволяющий определить вейвлет-функцию, пороговую функцию и порог фильтрации детализирующих коэффициентов дискретного вейвлет-разложения. Методом вычислительного эксперимента исследованы влияния параметров распределения шума, уровня шума, числа исчезающих моментов вейвлет-функции Добеши, характера пороговой функции и значения порога на погрешность фильтрации, обусловленную шумами нестационарных измерительных сигналов. Приведены результаты анализа шести пороговых функций при аддитивном добавлении шума к измерительному сигналу с нестационарной амплитудой, частотой и скважностью прямоугольных импульсов. Исследован сигнал доплеровских датчиков, вычислены параметры вейвлет-фильтрации, обеспечивающие минимальную погрешность. С использованием полученных параметров путём обратного вейвлет-преобразования построены графики сигналов до и после фильтрации непосредственно во временной области.

Ключевые слова: измерительный сигнал, дискретное вейвлет-преобразование, фильтрация шумов, уровень вейвлет-разложения, пороговая фильтрация, ортогональные и биортогональные вейвлеты

Для цитирования: Тараненко Ю. К. Эффективность использования вейвлет-преобразований при фильтрации шумов в сигналах измерительных преобразователей // Измерительная техника. 2021. № 2. С. 16–21. <https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-2-16-21>

The efficiency of using wavelet transforms for filtering noise in the signals of measuring transducers

Yuriy K. Taranenko

Private Enterprise "Likopak", Dnipro, Ukraine, taranen@rambler.ru, <http://orcid.org/0000-0003-4072-011>

Abstract. Methods of wavelet filtering of noise in signals of measuring transducers using the threshold method of discrete wavelet transform are considered. To study the methods of wavelet filtering of noise, special model signals were used to estimate the filtering errors. A method has been developed for determining the parameters of wavelet filtering of noise with a threshold for all levels of decomposition, which makes it possible to determine the wavelet function, threshold function and filtering threshold of the detailing coefficients of the discrete wavelet decomposition. The influence of the parameters of the noise distribution, the noise level, the number of vanishing moments of the Daubechies wavelet function, the nature of the threshold function and the threshold value on the filtering error caused by the noises of non-stationary measuring signals has been investigated by the method of a computational experiment. The results of the study of six threshold functions are given with the addition of noise to the measuring signal with non-stationary amplitude, frequency and duty cycle of rectangular pulses. The signal of the Doppler sensors is investigated, the wavelet filtering parameters are calculated, which provide the minimum error. The obtained parameters are used to construct graphs of signals before and after filtering directly in the time domain using the inverse wavelet transform.

Keywords: measuring signal, discrete wavelet transform, noise filtering, wavelet decomposition level, threshold filtering, orthogonal and biorthogonal wavelets

Введение. Широкое применение методов вейвлет-фильтрации в измерительных системах началось с фильтрации сигналов электроэнцефалограмм от аппаратных шумов [1–3]. Теория шумоподавления применительно к дискретному вейвлет-разложению с пороговыми функциями для ограничения части коэффициентов детализации описана в [4–5].

Однако применение указанной теории выдвигает обязательные требования к ортогональности базового вейвлета и достаточному числу исчезающих моментов. Одновременно выполнить оба условия сложно, поскольку ортогональные вейвлет-базисы не обеспечивают одинаковое разрешение отдельно по частоте и отдельно по времени.

Фильтры дискретного вейвлет-преобразования с улучшенными за счёт предварительной обработки сигналов функциями, в том числе и фильтрами других типов, успешно применяются для шумоподавления в различных спектроскопических методах измерений [6–13].

Пороговое снижение шума методом вейвлет-фильтрации широко используется при измерении температуры волоконно-оптического комбинационного датчика, но слабый спонтанный сигнал комбинационного рассеяния легко поглощается оптическим шумом и случайным шумом [14].

Для повышения эффективности вейвлет-фильтрации с порогом необходимо исследование не только влияния числа исчезающих моментов вейвлет-функции, но и типа пороговой функции с учётом численных значений порога, обуславливающих подавление уровня шума.

Анализ литературных данных и постановка проблемы. В публикации [15] вычислительный эксперимент (количество отсчетов $N=2048$) проводился с модельным «контрастным» сигналом по типу сигнала от датчика Доплера с резким изменением амплитуд. Широкополосный спектр модельного сигнала существенно усложнял фильтрацию из-за совпадений высокочастотных составляющих этого сигнала и шумов. Шумы измерений, имевшие нормальное, равномерное и пуассоновское распределение искажали точные значения модельного сигнала. На каждом уровне разложения сигнала вводился порог на удаление части коэффициентов детализации. По мнению авторов работы [15], такой порог носил экстремальный характер в зависимости от закона распределения шума. При этом считалось, что шумы сосредоточены в высокочастотной области спектра. Однако известно, что фильтрация с учётом неизвестных законов распределения шума вносит дополнительную не учтённую погрешность измерений параметров сигнала [16].

Авторы работы [17] для уменьшения неопределённости динамических измерений по результатам вейвлет-фильтрации зашумлённого сигнала предлагают в зависимости от информационной составляющей сигнала кратно дифференцировать базовый вейвлет. Поскольку в публикации нет данных об эффективности предложенного метода, а при дифференцировании вейвлет теряет свойство ортогональности, оценить эффективность предложенного метода нельзя. Однако согласно [18] дифференцировать возможно и динамический сигнал, и вейвлет. Следовательно, и модификация предложенного авторами [17] метода дифференцирования базового вейвлета пригодна только для выявления аномалий в сигнале.

Выбор вейвлета для фильтрации в публикации [19] предлагается осуществлять по крутизне амплитудно-частотной характеристики фильтра на основе визуального анализа графика. Однако без определения численного показателя погрешности фильтра такая методика не эффективна из-за исключительно визуальной оценки.

Среди большого разнообразия методов и средств обесшумливания измерительных сигналов особое место по применению в цифровых средствах измерений занимают дискретные вейвлет-фильтры. Однако остаётся актуальной задача минимизации погрешностей для фильтров, основанных

на дискретном вейвлет-преобразовании с общим порогом и пороговой функцией.

Цель настоящей работы – разработка методов минимизации погрешностей дискретных вейвлет-фильтров с общим порогом и пороговой функцией для всех уровней вейвлет-разложения.

Краткие теоретические сведения о методах вейвлет-фильтрации с общим порогом коэффициентов детализации и особенности их программной реализации. Кратко приведём основные понятия и определения, необходимые для изложения результатов работы. Многомасштабное представление функции $f(t)$ в базисе вейвлет-функции имеет вид [20]:

$$f(t) = \sum_k V_{J_0^k} \varphi(t)_{J_0^k} + \sum_{J \geq J_0} \sum_k W_{J^k} \Psi(t)_{J^k}, \quad (1)$$

где J – глубина вейвлет-разложения; $V_{J_0^k}$ и W_{J^k} – коэффициенты разложения аппроксимирующий и детализирующий соответственно; $\varphi(t)_{J_0^k}$ – масштабирующая функция; $\Psi(t)_{J^k}$ – вейвлет-функция.

В случае дискретного вейвлет-преобразования с порогом второе слагаемое в формуле (1) соответствует высокочастотным компонентам функции $f(t)$, которые уменьшают с помощью общей пороговой функции $K_f(c)$ с порогом c . С учётом введённых обозначений соотношение (1) принимает вид

$$f(t) = \sum_k V_{J_0^k} \varphi(t)_{J_0^k} + K_f(c) \sum_{J \geq J_0} \sum_k W_{J^k} \Psi(t)_{J^k}. \quad (2)$$

Особенности программной реализации соотношения (2) с обратным вейвлет-преобразованием во временную область зависят от применяемой компьютерной математической программы. В данном исследовании используем библиотеку PyWavelets – бесплатное программное обеспечение с открытым исходным кодом и верификацией, выпущенное по лицензии MIT [21]. Для вспомогательных вычислений применяем библиотеку scipy.signal (Программная библиотека scipy.signal.buttord: [сайт]. URL: <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/>).

Качество фильтрации оцениваем с помощью средней квадратической погрешности, которая определяется по формуле [22]:

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^N [x(i) - y(i)]^2 \right\} / N, \quad (3)$$

где $x(i)$ – информационный сигнал, не содержащий помех; $y(i)$ – сигнал, полученный в результате фильтрации.

Отметим, что использование косинусного или корреляционного расстояния между модельным и отфильтрованным сигналами [23] в частотной области даёт тот же результат, что и соотношение (3) во временной области.

Оптимальной будем считать фильтрацию, для которой вейвлет-функция, пороговая функция и порог обеспечивают как минимальную погрешность, так и визуальное сходство исходного и отфильтрованного сигналов.

Определение оптимальных параметров фильтрации для измерительных сигналов типа блоки. Для получения модельного зашумлённого сигнала типа блоки к исходному

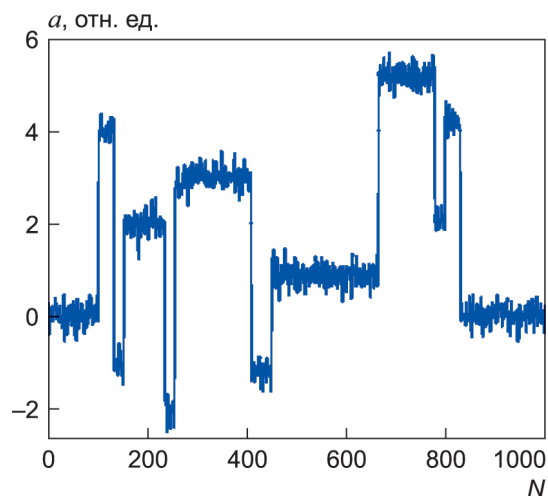


Рис. 1. Относительная амплитуда a зашумлённого модельного сигнала типа блоки с нормально распределённым шумом в зависимости от количества отсчётов N

Fig. 1. Relative amplitude a of a noisy model signal of the blocks type with normally distributed noise depending on the number of samples N

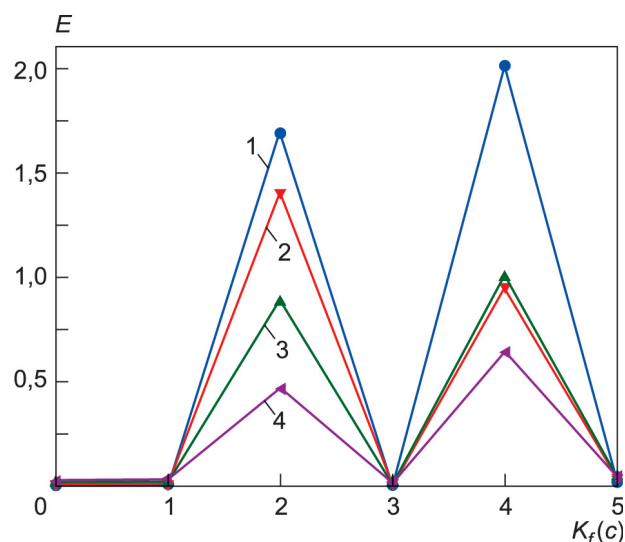


Рис. 2. Результаты определения вейвлета и пороговых функций $K_f(c)$ (функция порога – hard 3) при фильтрации ступенчатого сигнала типа блоки с нормально распределённым шумом:
1 – $E_{\min}=0,003631$; вейвлет: db2; 2 – $E_{\min}=0,007972$; вейвлет: db4;
3 – $E_{\min}=0,013958$; вейвлет: db6; 4 – $E_{\min}=0,015331$; вейвлет: db8

Fig. 2. The results of determining the wavelet and threshold functions $K_f(c)$ (threshold function – hard 3) when filtering a step signal of the blocks type with normally distributed noise:
1 – $E_{\min}=0,003631$; wavelet: db2; 2 – $E_{\min}=0,007972$; wavelet: db4;
3 – $E_{\min}=0,013958$; wavelet: db6; 4 – $E_{\min}=0,015331$; wavelet: db8

не зашумлённому сигналу добавим нормально распределённый шум с нулевым математическим ожиданием μ и средним квадратическим отклонением $\sigma=0,2$ при соотношении сигнал/шум в 22 дБ (рис. 1). На рис. 1 приведено отношение a текущей амплитуды к максимальной. Количество отсчётов N – отношение текущего времени к интервалу времени отсчёта, причём интервал отсчёта меньше половины периода сигнала по норме Найквиста.

Полученный сигнал (рис. 1) фильтруем с использованием вейвлет-функций Добеши для всех доступных пороговых функций (garotte; garrote; greater; hard; less; soft) [15]. При этом для заданных списком пороговых функций и вейвлет-функций подбираем значение порога c , которое в совокупности с указанными функциями обеспечивает минимум средней квадратической погрешности E . На рис. 2 приведены пороговые функции, вейвлеты и порог для сигнала типа блоки с нормально распределённым шумом с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma=0,2$ при соотношении сигнал/шум в 22 дБ и порогом 0,563. Масштаб отображения значений E подобран с учётом пропорционального и комфортного отображения минимального и максимального значения на графике.

Минимальная средняя квадратическая погрешность 0,003631 соответствует вейвлету db1, жёсткой пороговой функции (далее – hard) и порогу 0,563. Исследуем изменение сигнала после фильтрации с определёнными по рис. 2 параметрами (рис. 3).

Найденные вейвлет, пороговая функция и порог не приводят к искажению формы отфильтрованного сигнала, что свидетельствует о правильности указанного выше выбора.

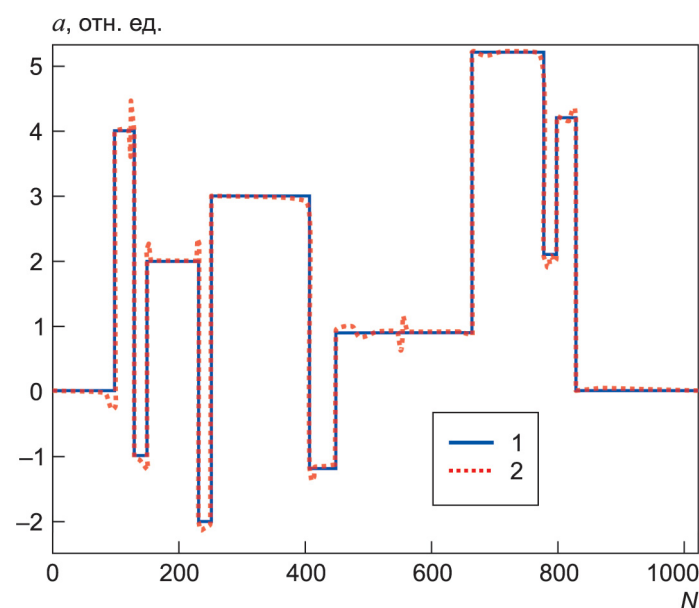


Рис. 3. Относительная амплитуда a исходного (1) и отфильтрованного (2) сигналов в зависимости от количества отсчётов N

Fig. 3. Relative amplitude a of the original (1) and filtered (2) signals depending on the number of samples N

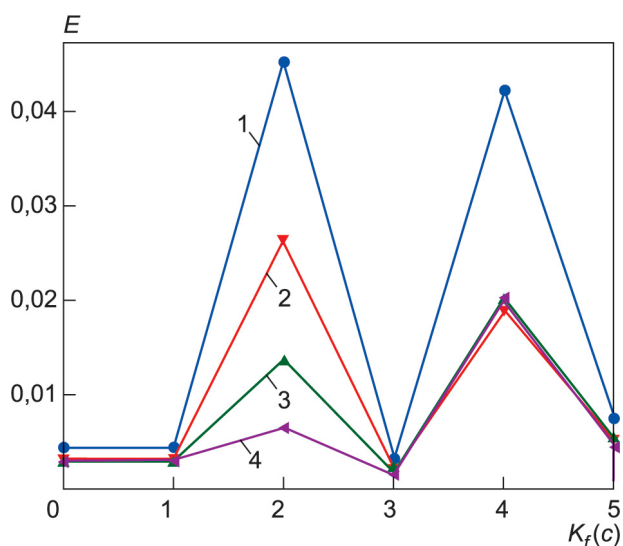


Рис. 4. Результаты определения оптимальных параметров фильтрации доплеровского сигнала с нормально распределённым шумом, $K_f(c)$ – пороговая функция (функция порога – hard 3):
 1 – $E_{\min} = 0,003916$; вейвлет: db2; 2 – $E_{\min} = 0,002429$; вейвлет: db4;
 3 – $E_{\min} = 0,001878$; вейвлет: db6; 4 – $E_{\min} = 0,015331$; вейвлет: db8

Fig. 4. The results of determining the optimal Doppler filtering parameters with normally distributed noise; $K_f(c)$ – threshold function (threshold function – hard 3):

1 – $E_{\min} = 0.003916$; wavelet: db2; 2 – $E_{\min} = 0.002429$; wavelet: db4;
 3 – $E_{\min} = 0.001878$; wavelet: db6; 4 – $E_{\min} = 0.015331$; wavelet: db8

Результат не противоречит теории вейвлет-преобразования, поскольку крутые фронты ступенчатого сигнала типа блоки соответствуют вейвлету db1 с одним исчезающим моментом. Максимальное число уровней разложения ступенчатого сигнала с вейвлетом db1 равно 10.

Определение оптимальных параметров фильтрации для измерительных сигналов типа Доплер. Для получения модельного зашумлённого сигнала типа Доплер добавим нормально распределённый шум с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,1$ (рис. 4). На рис. 4 приведены пороговые функции, вейвлеты и порог для описанного доплеровского сигнала при соотношении сигнал-шум в 9 дБ и порогом 0,499. Для заданных параметров шума путём выбора порога, пороговой функции и вейвлета обеспечим минимальную погрешность фильтрации.

Абсолютное значение порога доплеровского сигнала, равное 0,499, меньше значения порога для ступенчатого сигнала (0,563) при большем уровне шума (9 дБ). При этом минимальная средняя квадратическая погрешность составляет $E_{\min} = 0,001878$.

Для подтверждения эффективности предложенной методики фильтрации визуально оценим отличие отфильтрованного сигнала от исходного. На рис. 5 показан сравнительный анализ исходного и отфильтрованного сигналов при найденных

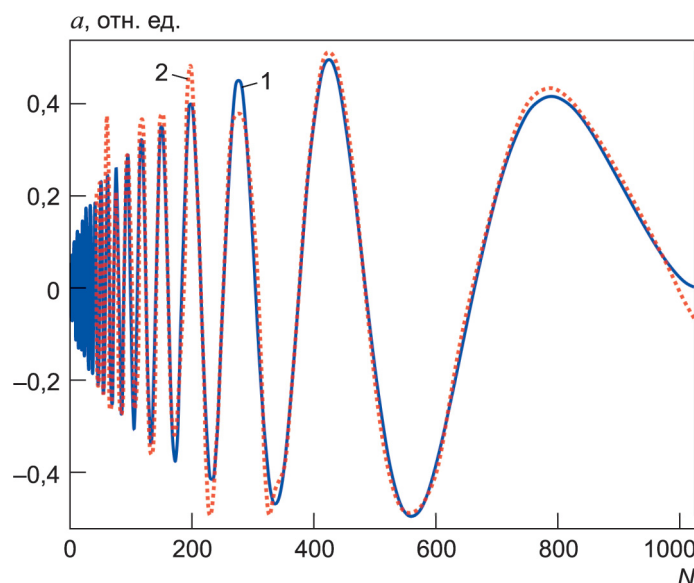


Рис. 5. Сравнительный анализ относительной амплитуды a исходного (1) и отфильтрованного (2) сигналов в зависимости от количества отсчётов N

Fig. 5. Comparative analysis of the relative amplitude a of the original (1) and filtered (2) signals depending on the number of samples N

оптимальных параметрах фильтрации: $E_{\min} = 0,001878$; пороговая функция hard; порог 0,499; вейвлет db6.

Полученный график для исходного и отфильтрованного сигналов при найденных вейвлете, пороге и пороговой функции подтверждает, что применение разработанной методики фильтрации не приводит к искажению формы отфильтрованного сигнала, а выбор значения параметров вейвлет-фильтрации – правильный. Полученный результат не противоречит теории вейвлет-преобразования, поскольку гармоническая форма сигнала соответствуют вейвлету с шестью исчезающими моментами db6 и аппроксимирующей функцией шестого порядка. Максимальное число уровней разложения доплеровского сигнала с вейвлетом db6 равно 6.

Заключение. Описанная методика вычислительного эксперимента позволяет минимизировать погрешность фильтрации в измерительных системах за счёт выбора сразу нескольких параметров – пороговой функции порога и вейвлета.

Установлено, что для измерительных сигналов типа блоки эффективную вейвлет-фильтрацию обеспечивает следующая совокупность параметров: жёсткая пороговая функция с порогом 0,563 и вейвлет Добеши db1. Для измерительных сигналов доплеровского типа требуется другая совокупность параметров: жёсткая пороговая функция с порогом 0,499 и вейвлет Добеши db6.

Использование приведённой методики определения основных параметров вейвлет-фильтрации с общим для всех уровней вейвлет-разложения сигнала порогом повышает эффективность вейвлет фильтрации для любого известного типа измерительного сигнала.

Список литературы

1. Половенко К. Г. Масштабный анализ электроэнцефалограмм на основе вейвлет-преобразований с базисной функцией Добеши // Прикладная радиоэлектроника. 2011. Т. 10. № 1. С. 15–21.
2. Salis C. I., Paschalis A. E. M., Bizopoulos A., Tzallas A. T., Angelidis P. A., Tsalikakis D. G., *13th IEEE International Conference on Bioinformatics and Bioengineering*, Chania, Greece, November 10–13, 2013, IEEE, 2013, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/BIBE.2013.6701613>
3. Кыздарбекова А. С., Касымбекова К. Б., Дутбайева Д. М., Кыздарбек У. С. Алгоритм извлечения признаков и удаления шума электрокардиосигнала на основе вейвлет-преобразования // Проблемы современной науки и образования. 2017. № 7 (89). С. 112–116.
4. Ehrentreich F., *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, 2002, vol. 372, no. 1, pp. 115–121. <https://doi.org/10.1007/s00216-001-1119-4>
5. Lu X.-Q., Liu H.-D., Kang J.-W., *Analytica Chimica Acta*, 2003, vol. 484, no. 2, pp. 201–210. [https://doi.org/10.1016/S0003-2670\(03\)00309-X](https://doi.org/10.1016/S0003-2670(03)00309-X)
6. Alsberg B. K., Woodward A. M., Winson M. K., Rowland J., Kell D. B., *Analyst*, 1997, vol. 122, no. 7, pp. 645–652. <https://doi.org/10.1039/A608255F>
7. Zhang B., Sun L.-X., Yu H.-B., Xin Y., Cong Z.-B., *Journal of Analytical Atomic Spectrometry*, 2013, vol. 28, no. 12, pp. 1884–1893. <https://doi.org/10.1039/c3ja50239b>
8. Mape-Fogaing I., Joly L., Durry G., Dumelie N., Decarpenterie T., Cousin J., Parvitte B., Zeninari V., *Applied Spectroscopy*, 2012, vol. 66, no. 6, pp. 700–710. <https://doi.org/10.1366/11-06459>
9. Niu M. S., Wang G.-S., *Wuli Xuebao*, 2017, vol. 66, no. 2, 024202.
10. Xia H., Dong F., Zhang Z., Tu G., Pang T., Wu B., Wang Y., *Advanced Sensor Systems and Applications IV*, 2010, vol. 7853, 785311. <https://doi.org/10.1117/12.871629>
11. Li J., Parchatka U., Fischer H., *Applied Physics B*, 2012, vol. 108, no. 4, pp. 951–963. <https://doi.org/10.1007/s00340-012-5158-7>
12. Zheng C. T., Ye W.-L., Huang J.-Q. et al., *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2014, vol. 190, pp. 249–258. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2013.08.055>
13. Ramos P. M., Ruisanchez I., *Journal of Raman Spectroscopy*, 2005, vol. 36, no. 9, pp. 848–856. <https://doi.org/10.1002/jrs.1370>
14. Edu I. R., Adochiei F. C., Grigorie T. L., Botez R. M., *3rd International Workshop on Numerical Modelling in Aerospace Sciences*, Bucharest, Romania, May 06–07, 2015, *INCAS Bulletin*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 71–80. <https://doi.org/10.13111/2066-8201.2015.7.2.7>
15. Воскобойников Ю. Е., Крысов Д. А. Вейвлет-фильтрация шумов различной статистической природы // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 6. С. 50–54.
16. Oliynyk O., Taranenko Y., Losikhin D., Shvachka A., *Eastern-European journal of enterprise technologies*, 2018, vol. 4, no. 4 (94), pp. 36–42. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.140649>
17. Быкова Т. В., Черепашук Г. А. Неопределенность вейвлет-восстановления результатов динамических измерений // Системи обробки інформації. Харьков. 2007. Т. 6 (64). С. 10–12.

18. Национальная библиотека им. Н. Э. Баумана. URL: <https://ru.bmstu.wiki/Вейвлет-преобразование#> (дата обращения 06.07.2020).

19. Гуревич Б. С., Гуревич С. Б., Манойлов В. В. Вейвлет-фильтрация пространственных частот при дискретизации световых полей // Научное приборостроение. 2012. Т. 22. № 1. С. 101–106.

20. Воскобойников Ю. Е. Вейвлет-фильтрация с двухпараметрическими пороговыми функциями: выбор функции и оценивание оптимальных параметров // Автоматика и программная инженерия. 2016. № 1 (15). С. 69–78.

21. Lee G. R., Gommers R., Wasilewski F., Wohlfahrt K., O'Leary A., *Journal of Open Source Software*, 2019, vol. 4 (36), 1237. <https://doi.org/10.21105/joss.01237>

22. Ясин А. С. Фильтрация зашумлённых сигналов и изображений с применением вейвлет-преобразования: дис. канд. физ.-мат. наук (Сарат. гос. ун-т им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, 2016).

23. Бурнаев Е. В., Оленев Н. Н. Мера близости для временных рядов на основе вейвлет коэффициентов. // Труды XLVIII научной конференции МФТИ. Часть VII. Москва – Долгопрудный, 2005. С. 108–110.

References

1. Polovenko K. G., *Prikladnaya radioelektronika*, 2011, vol. 10, no. 1, pp. 15–21 (in Russian).
2. Salis C. I., Paschalis A. E. M., Bizopoulos A., Tzallas A. T., Angelidis P. A., Tsalikakis D. G., *13th IEEE International Conference on Bioinformatics and Bioengineering*, Chania, Greece, November 10–13, 2013, IEEE, 2013, pp. 1–4. <https://doi.org/10.1109/BIBE.2013.6701613>
3. Kyzdarbekova A. S., Kassymbekova K. B., Dutbayeva D. M., Kyzdarbek U. S., *Problemy sovremennoy nauki i obrazovaniya*, 2017, vol. 7 (89), pp. 112–116 (in Russian).
4. Ehrentreich F., *Analytical and Bioanalytical Chemistry*, 2002, vol. 372, no. 1, pp. 115–121. <https://doi.org/10.1007/s00216-001-1119-4>
5. Lu X.-Q., Liu H.-D., Kang J.-W., *Analytica Chimica Acta*, 2003, vol. 484, no. 2, pp. 201–210. [https://doi.org/10.1016/S0003-2670\(03\)00309-X](https://doi.org/10.1016/S0003-2670(03)00309-X)
6. Alsberg B. K., Woodward A. M., Winson M. K., Rowland J., Kell D. B., *Analyst*, 1997, vol. 122, no. 7, pp. 645–652. <https://doi.org/10.1039/A608255F>
7. Zhang B., Sun L.-X., Yu H.-B., Xin Y., Cong Z.-B., *Journal of Analytical Atomic Spectrometry*, 2013, vol. 28, no. 12, pp. 1884–1893. <https://doi.org/10.1039/c3ja50239b>
8. Mape-Fogaing I., Joly L., Durry G., Dumelie N., Decarpenterie T., Cousin J., Parvitte B., Zeninari V., *Applied Spectroscopy*, 2012, vol. 66, no. 6, pp. 700–710. <https://doi.org/10.1366/11-06459>
9. Niu M. S., Wang G.-S., *Wuli Xuebao*, 2017, vol. 66, no. 2, 024202.
10. Xia H., Dong F., Zhang Z., Tu G., Pang T., Wu B., Wang Y., *Advanced Sensor Systems and Applications IV*, 2010, vol. 7853, 785311. <https://doi.org/10.1117/12.871629>
11. Li J., Parchatka U., Fischer H., *Applied Physics B*, 2012, vol. 108, no. 4, pp. 951–963. <https://doi.org/10.1007/s00340-012-5158-7>

12. Zheng C. T., Ye W.-L., Huang J.-Q. et al., *Sensors and Actuators B: Chemical*, 2014, vol. 190, pp. 249–258. <https://doi.org/10.1016/j.snb.2013.08.055>
13. Ramos P. M., Ruisanchez I., *Journal of Raman Spectroscopy*, 2005, vol. 36, no. 9, pp. 848–856. <https://doi.org/10.1002/jrs.1370>
14. Edu I. R., Adochiei F. C., Grigorie T. L., Botez R. M., *3rd International Workshop on Numerical Modelling in Aerospace Sciences*, Bucharest, Romania, May 06–07, 2015, INCAS Bulletin, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 71–80. <https://doi.org/10.13111/2066-8201.2015.7.2.7>
15. Voskoboinikov Yu. Ye., Krysov D. A., *Sovremennyye naukoymkiye tekhnologii*, 2018, no. 6, pp. 50–54 (in Russian).
16. Oliynyk O., Taranenko Y., Losikhin D., Shvachka A., *Eastern-European journal of enterprise technologies*, 2018, vol. 4, no. 4 (94), pp. 36–42. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.140649>
17. Bykova T. V., Cherepashchuk G. A., *Information processing systems*, 2007, vol. 6 (64), pp. 11–12 (in Russian).
18. Bauman National Library, available at: <https://ru.bmstu.wiki/Бейвлет-преобразование#> (accessed 06.07.2020).
19. Gurevich B. S., Gurevich S. B., Manoilov V. V., *Nauchnoe Priborostroenie*, 2012, vol. 22, no. 1, pp. 101–106 (in Russian).
20. Voskoboinikov Yu. E., *Automation and Software Engineering*, 2016, vol. 1 (15), pp. 69–78 (in Russian).
21. Lee G. R., Gommers R., Wasilewski F., Wohlfahrt K., O'Leary A., *Journal of Open Source Software*, 2019, vol. 4 (36), 1237. <https://doi.org/10.21105/joss.01237>
22. Yasin A. S., *Fil'tratsiya zashumlennykh signalov i izobrazheniy s primeneniym veyvlet-preobrazovaniya*: Candidate's dissertation in Mathematics and Physics Sciences (Saratov State University, Saratov, 2016) (in Russian).
23. Burnayev Ye. V., Olenev N. N., *Trudy XLVIII nauchnoy konferentsii MFTI, Chast' VII*, Moskva – Dolgoprudnyy, 2005, pp. 108–110 (in Russian).

Статья поступила в редакцию 27.10.2020; принята к публикации 20.11.2020.